مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی



فنون
مسأله حل کردن

تألیف استیون ج. کرانتس

ترجمهٔ مهران اخباریفر

انتشارات فاطمی

کتاب **فنون مسأله حل کردن** برای همهٔ کسانی است که به آموختن روشهای مسأله حل کردن علاقه‌مندند، چه مسأله‌های ریاضی و چه مسأله‌های غیرریاضی.

برای این منظور، فنونی از قبیل استقرا، برهان خلف، روش اِفنا، قیاس، فرمولبندی مجدد و چند فن دیگر مسأله حل کردن آموزش داده شده است، و از هر کدام مسأله‌های زیادی به عنوان نمونه حل شده است.

در انتهای هر فصل هم تمرینهای متنوعی گنجانده شده است تا خواننده فرصتی برای سنجش میزان یادگیری خود داشته باشد.

مطالعهٔ این کتاب به دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به شرکت در مسابقاتی از نوع المپیادهای ریاضی هستند، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان توصیه می‌شود.

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی



فنون مسأله حل کردن

تألیف استیون ج. کرانتس

ترجمهٔ مهران اخباریفر

انتشارات فاطمی

Techniques of Problem Solving
Steven G. Krantz
American Mathematical Society, 1997

فنون مسأله حل‌کردن

مؤلف: استیون ج. کرانتس
مترجم: مهران اخباریفر
ویراستار: ارشک حمیدی
ناشر: مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
چاپ اول، ۱۳۷۹
شابک ۶ـ۲۹۱ـ۳۱۸ـ۹۶۴
ISBN 964-318-291-6
تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
- مدیر تولید: فرید مصلحی
- طراح جلد: زهرا قورچیان
- حروفچینی و صفحه‌بندی (TEX-پارسی): زهره امینی
- نمونه‌خوان و صفحه‌آرا: فاطمه ثقفی
- نظارت بر چاپ: علیرضا رضانژاد

لیتوگرافی: گلشید
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ حدیث



تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۶۵۱۴۲۲ ـ ۶۵۴۷۷۰ نمابر: ۸۹۵۶۲۵۸
Web: Fatemi.ParsiBooks.com
E-mail: Fatemi@ParsiBooks.com

کرانتس، استیون جورج، ۱۹۵۱ ـ
Krantz, Steven George
فنون مسأله حل‌کردن / مؤلف استیون ج. کرانتس؛ مترجم مهران اخباریفر. ــ تهران: فاطمی، ۱۳۷۹.
یازده، ۳۶۸ ص.: مصور، جدول.
ISBN 964-318-291-6
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
۱. حل‌المسائل. الف. اخباریفر، مهران، ۱۳۴۵ـ ، مترجم. ب. عنوان.
۵۱۰/۷۶
QA۶۳/ک۴ف۹
۱۳۷۹
کتابخانهٔ ملی ایران
۱۰۴۱۵ـ۷۹م

فهرست

به‌نام خدا

آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود وضعیت آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: **عمومی کردن ریاضیات و تربیت نخبگان.** هدف اول از این رو اهمیت دارد که در آستانهٔ قرن بیست‌ویکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی دست یافتن به پیشرفتهای بیشتری در این باره باشیم و ابزارهای جدیدی برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوهٔ جامعهٔ خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنهٔ عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از نظر علاقه و استعدادهای ویژه مخاطب خود قرار داده است. از این‌رو برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها، آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر **المپیاد ریاضی** اهمیت ویژه‌ای دارد.

اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطهٔ آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقهٔ **اتووش** به نام **بارون لوراند اتووش**[1] به‌صورت مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به دلیل سادگی مفاهیم به‌کار گرفته شده هنوز هم جذاب است. پس از آن، طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا اینکه در سال ۱۹۵۹ رومانی پیشگام راه‌اندازی **المپیاد بین‌المللی ریاضی** شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیهٔ ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگری نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

مسابقات دانش‌آموزی درکشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است؛ اولین مسابقهٔ ریاضی

1- Baron Loránd Eötvös

دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید؛ بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری دارند.

بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو **مؤسسهٔ انتشارات فاطمی** به انتشار مجموعهٔ **آمادگی برای المپیاد ریاضی** اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتابهای زرد) شامل کتابهایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضی ۲ نظام جدید در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعهٔ مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دستهٔ سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

* * *

کتاب حاضر از دستهٔ دوم و هدفش آموزش اصول پایهٔ مسأله حل کردن است، چه مسأله‌های ریاضی و چه مسأله‌های غیرریاضی. برای این منظور، فنونی از قبیل استقرا، برهان خلف، روش اِفنا، قیاس، فرمولبندی مجدد و چند فن دیگر مسأله حل کردن آموزش داده شده است، و از هر کدام مسأله‌های زیادی به عنوان نمونه حل شده است. در انتهای هر فصل هم تمرینهای متنوعی گنجانده شده است تا خواننده فرصتی برای سنجش میزان یادگیری خود داشته باشد. مطالعهٔ این کتاب به دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به شرکت در مسابقاتی از نوع المپیادهای ریاضی هستند، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان توصیه می‌شود.

پیشگفتار

نگاهی کلی

بخش بزرگی از فعالیت روزمره حل مسأله است؛ مسأله‌هایی مانند بهترین روش برای تأمین پول خرید اتومبیل جدید چیست؟ چگونه باید همسر انتخاب کرد؟ بهترین روش برای برنامه‌ریزی درسی کدام است؟ چگونه می‌توان پول را به بهترین روش هزینه کرد؟

تفکر تحلیلی نوش‌دارو نیست. تفکر تحلیلی رهیافت درست برای هر پیشامد و هر مسأله‌ای نیست. ولی روشی قدرتمند برای روبه‌رو شدن با بسیاری از موقعیتهاست. در بیشتر درسهای مدرسه و دانشگاه پیامدهای تفکر تحلیلی تدریس می‌شود؛ در این درسها روش‌شناسی تفکر تحلیلی را نمی‌آموزند.

کتابهای بسیار زیادی دربارهٔ مسأله حل‌کردن وجود دارد که قدمت بعضی از آنها به قرن نوزدهم می‌رسد. اما از دیدگاه مؤلف، مسأله حل‌کردن چیزی بیش از به‌یاد داشتن فهرستی منقطع از معماها و سرگرمیهاست. مسأله حل‌کردن راه زندگی است. دانشمندان هر علمی ـ شیمیدانان، فیزیکدانان، روانشناسان، جامعه‌شناسان و بسیاری دیگر ـ در کارشان مجموعه‌ای از داده‌ها را گردآوری می‌کنند، فنونی را که به این داده‌ها مربوط‌اند انتخاب می‌کنند و سپس مسأله‌ای را حل می‌کنند. کتاب حاضر سعی دارد چنین دیدگاهی از مسأله حل کردن را اشاعه دهد.

هدف این کتاب *آموزش اصول پایهٔ مسأله حل کردن است*، چه مسأله‌های ریاضی و چه مسأله‌های غیرریاضی. بخش مهمی از کتاب برای آموزش ترجمهٔ بحثهای محاوره‌ای به داده‌های تحلیلی است. بخش مهم دیگری برای آموزش روشهای مسأله حل‌کردن برای روبه‌رو شدن با گروههایی از پرسشها یا داده‌های تحلیلی است. بخشی دیگر برای تدارک زرادخانه‌ای شخصی از مسأله‌های حل‌شده و فنون مسأله حل کردن است؛ به این ترتیب، دانش‌آموزی که بر مطالب این کتاب مسلط شود، «مسأله حل‌کن مسلح» است و آماده برای جدال با انواع معماها در بخشهای گوناگون زندگی.

فنون و مطالب

بعضی از فنون مسأله حل‌کردن که در این کتاب بیان شده‌اند عبارت‌اند از استقرا، برهان خلف، روش اِفنا، تشریح، قیاس، تعمیم، تخصیص، فرمولبندی مجدد، تجزیه و ترکیب. البته این فهرست کامل نیست؛ و اغلب برای حل کردن مسأله باید ایده‌هایی از چند روش را به کار گرفت.

گرچه بسیاری از مسائل نمونهٔ این کتاب ماهیت ریاضی دارند، بسیاری نیز ندارند. می‌خواهیم انواع گوناگونی از فنون تحلیلی را که در بسیاری از موقعیتها می‌توان به کار برد در اختیار خواننده بگذاریم. چون مؤلف ریاضیدان است و چون ریاضیات طبیعتاً وامدار فرمولبندی و حل مسأله است، طبیعی است که در این کتاب به کرّات با ریاضیات روبه‌رو شوید. ولی ریاضیات تنها هدف کتاب نیست.

با ادامهٔ درون‌مایهٔ بند قبل، از این کتاب به‌عنوان فرصتی برای آموزش برخی از ایده‌های تحلیلی و ریاضیاتی مهم درضمن مسائل استفاده می‌کنیم؛ از جمله، استدلالهای شمارشی، استقرا، مفهوم «وضعیت عمومی»، برهان خلف، رسم نمودار و فنون تحلیل بصری، اصل لانه‌کبوتری، روابط بازگشتی، توابع مولد، ایده‌هایی از آمار و احتمالات، و غیره. چنین ایده‌هایی در درسها و جاهای دیگر نیز به‌کار دانش‌آموز می‌آید.

همچنین از این کتاب، محتاطانه، به‌عنوان وسیله‌ای برای آشنا کردن دانش‌آموز با دنیای فن‌آوری جدید استفاده می‌کنیم. منظور این است که در مواردی، هنگام حل مسأله می‌گوییم «در این مرحله می‌توان از حسابان استفاده کرد، ولی به جای آن، ماشین‌حساب نموداری خود را بیاورید و چنین کنید . . .». یا ممکن است بگوییم «مسأله را به حل معادله‌ای غیرجبری تبدیل کرده‌ایم؛ حل این معادله با دست اساساً ناممکن است. در عوض، نرم‌افزار جبری کامپیوتر خود را آماده کنید . . .». چنین توسلهایی به فن‌آوری به‌ندرت درکتاب دیده می‌شود. اینها برای این است که دانش‌آموز بیاموزد کامپیوتر ابزار است، مانند کتاب، خطکش یا ماشین‌حساب.

مقایسه با کتابهای موجود

تعدادی کتاب هست که در آنها به‌تفصیل دربارهٔ ماهیت مسأله حل‌کردن فلسفه‌بافی شده است. مهمترین اینها کتابهای لاکاتوش، پولیا و شونفلد است (کتابنامه را ببینید). خواننده را تشویق می‌کنیم که با این کتابها آشنا شود. کتاب حاضر رهیافتی مستقیمتر و عملیتر به موضوع را در پیش گرفته است. ما احساس می‌کنیم که مسأله حل‌کردن را با حل‌کردن مسائل می‌آموزید (توجه داشته باشید که متخصصان مسأله حل‌کردن در این دیدگاه متفق‌القول نیستند). این درست شبیه آن است که نواختن پیانو را با پیانو زدن می‌آموزید. اکثر کتابهای آموزش پیانو قطعاتی طبقه‌بندی‌شده برای تمرین‌اند. در این کتابها چندان جار و جنجالی در مورد اینکه لمس کردن کلیدهای پیانو چه احساسی دارد نمی‌یابید. درست به همین ترتیب، ضمن حل کردن مسأله‌ها نکاتی آموزشی بیان می‌کنیم، ولی به نقادی فلسفی دربارهٔ هستی‌شناسی مسأله حل‌کردن نمی‌پردازیم.

یکی از ویژگیهایی که این کتاب را از بسیاری کتابهای دیگر در مورد مسأله حل‌کردن جدا می‌کند تمرینهای آن است. تمرینها به دو شکل‌اند. بعد از بسیاری از مسأله‌های حل‌شده در متن کتاب یک یا چند «مسألهٔ پیکارجو» طرح می‌شود که خواننده باید حل کند. در این مسأله‌ها معمولاً از فنونی مربوط به مسأله‌ای که خواننده در همان‌جا دیده است استفاده می‌شود. در این مسائل ممکن است تعمیم یا گونه‌ای دیگر یا راه‌حلی برای مسأله‌ای با مضمون مشابه از خواننده خواسته شده باشد. دانش‌آموز باید بکوشد مسأله‌های پیکارجو را همان موقع رسیدن به آنها حل کند ـ یا دست‌کم اولین تلاش خود را بکند. بعضی از مسائل پیکارجو فریب‌دهنده‌اند (و این فریبکاری عمدی است) و برای حل آنها چندین بار باید حمله کرد. همچنین در پایان هر فصل تعداد زیادی مسألهٔ اضافی هست که خواننده باید حل کند. همهٔ این مسأله‌ها، دست‌کم تا حدی، به مطالب متن کتاب مربوط‌اند. بیشتر از ۳۵۰ مسأله از این نوع در کتاب هست. راه‌حل بیشتر مسأله‌های انتهای فصلها در راهنمای حل مسائل هست.

پیش‌نیازها

پیش‌نیازهای این کتاب کمترین مقدار ممکن است. مطمئناً نیازی به دانستن حسابان نیست. (البته گاهی در مسائلی اختیاری از حسابان استفاده شده است. این مسائل مشخص شده‌اند.) از جبر و مثلثات تاحدی استفاده شده است. اما این کتاب بیشتر کتابی در مورد استدلال است تا ریاضیاتِ صرف. بیشتر دانش‌آموزانی که در سطح متوسطی تبحر ریاضی و/یا تحلیلی دارند از این کتاب سود خواهند برد.

۱

مفاهیم پایه

۱.۱ ملاحظات مقدماتی

نوشتن کتابی دربارهٔ مسأله حل‌کردن کمی ساده‌لوحانه به‌نظر می‌آید؛ نوشتن کتابی دربارهٔ شنا کردن یا پیانو نواختن نیز ساده‌لوحانه است. هیچ‌کدام از این مهارتها را نمی‌توانید صرفاً با خواندن کتابی دربارهٔ آن بیاموزید. این مهارتها را باید در عمل بیاموزید. درواقع، باید در مهارتی که می‌خواهید بیاموزید غوطه‌ور شوید. درست همان‌طور که برای بدنسازی باید به شیوه‌ای دقیق و برنامه‌ریزی‌شده وزنه زد، به‌دست آوردن مهارت در مسأله حل کردن نیز نیازمند داشتن برنامهٔ منظمی برای تمرین و سخت‌کارکردن است.

به هر حال، آموختن حل مسأله لذت‌بخش و ارزشمند است. حل مسأله فرایندی است برای ایجاد و گسترش قوای ذهنی، و انبانی از فنون را در اختیار شما قرار می‌دهد که در مطالعات دیگر و در زندگی روزمره نیز به کارتان می‌آیند.

این کتاب برای آموزش برخی فنون مسأله حل کردن و بحث دربارهٔ فرایندهای ذهنی مربوط به آن سازماندهی شده است. از هر مفهوم تعدادی نمونه مسأله به‌عنوان مثال آورده‌ایم؛ این مثالها شما را در آموختن فنون مسأله حل کردن یاری می‌کنند. باید هر مثال را به‌دقت مطالعه کنید، چون مثالهای خاص بسیار مهمتر از ملاحظات فلسفی بیان شده پیش از مثالها هستند.

برای تبحر یافتن در برخی مثالها ممکن است لازم باشد وقت نسبتاً زیادی صرف کنید؛ اما یافتن چنین تبحری بسیار مهم است. اگر می‌خواهید از این کتاب درکلاس درس استفاده کنید، حتماً با معلم و همکلاسهایتان دربارهٔ مسائلی که حل می‌کنید و فنونی که می‌آموزید گفتگو کنید. سؤال کردن را یاد بگیرید. بخشی از فرایند آموزش آموختن فرمولبندی گزاره‌ها و پرسشهای دقیق است. بخشی دیگر از فرایند آموزش آموختن رابطه برقرار کردن میان فرایندهای استدلال و تحلیل است. این کار ورزش ذهنی

پرتحرکی است. این ورزش را به‌تنهایی، و همچنین به‌صورت گروهی انجام دهید. توپ را (به‌طور ذهنی) در جهات مختلف پرتاب کنید و در مسیر توپ بدوید.

بخش مهم دیگری از این کتاب، این درس، و به‌طور کلی آموزش شما، آموختن خواندن است. منظور ما از توانایی خواندن باسواد بودن نیست. اگر می‌توانید جمله‌های این کتاب را بخوانید، به یقین مشکلی در این زمینه ندارید. ولی منظور ما از خواندن، خواندن مسأله یا متنی تحلیلی، یا راه‌حل، و رسیدن به عمق آن، درک کامل آن، و سرانجام ملکه شدن آن در ذهن است.

آن ایده‌ها و فنونی که ملکهٔ ذهن شما می‌شوند، همانهایی هستند که سرانجام مایملک شما خواهند بود، می‌توانید عملاً در زندگی از آنها استفاده کنید، به‌سادگی در دسترس شما قرار می‌گیرند و ابزار شخصی شما می‌شوند. این کتاب طوری طراحی شده است که شما را با فرایند ملکه‌سازی فنون حل مسأله در ذهن، و در آوردن آنها به‌صورت بخشی از برنامهٔ کاری ذهن، آشنا کند.

این کتاب مانند بیشتر کتابها به‌ترتیب خطی نوشته شده است. یعنی برای معرفی ایده‌ای در صفحه‌ای از کتاب ممکن است ایده‌های معرفی‌شده در صفحات قبلی به‌کار گرفته شوند، یا دست‌کم به آنها ارجاع داده شود. اما جست زدن به‌جلو در کتاب، نگاهی به مسائل بعدی انداختن، یا جستجو در کتاب به‌ترتیبی که علایقتان حکم می‌کند گناه نیست.

در بخش بعد حل مسأله‌ها را آغاز می‌کنیم. در ابتدا هدف اصلیمان آموختن نحوهٔ غلبه بر «تنبلی ذهنی» است. حتی مسأله حل‌کنهای با تجربه و با استعداد اغلب وقتی با مسأله‌ای دشوار مواجه می‌شوند تمایل به این دارند که این طرف و آن طرف را نگاه کنند، سر خود را تکان دهند و بگویند « خوب، نمی‌دونم. ناهار چی داریم؟» هدف شما باید این باشد که خود را برای تبدیل شدن به ماشین مبارزه با مسأله تربیت کنید. مسألهٔ جدیدی را می‌بینید و می‌گویید «قبلاً چیزی شبیه این دیده‌ام. این را امتحان می‌کنم ... شکلی می‌کشم ... مسأله را به‌این‌صورت بیان می‌کنم ... مثال می‌زنم ...» با مطالعهٔ این کتاب می‌آموزید که نه‌تنها در کلاس درس ریاضی، بلکه در هر موقعیتی به این شیوه فکر کنید.

۲.۱ اولین مسأله

کار خود را با تحلیل مسأله‌ای ساده آغاز می‌کنیم. این مسأله تک و تنهاست، به این معنی که نمی‌توان ارتباطی بین این مسأله و مسأله‌ای دیگر، یا فنی دیگر، تصور کرد. حل این مسأله به دانش یا تجربهٔ خاصی نیاز ندارد.

مسألهٔ ۱.۲.۱ تعیین کنید که عدد !۱۰۰ به چند صفر خاتمه می‌یابد.

راه‌حل. به‌یاد آورید که

$$۱۰۰! = ۱۰۰ \times ۹۹ \times ۹۸ \times \cdots \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

وقتی صفری در انتهای حاصل‌ضرب چند عدد ظاهر می‌شود، حتماً ضرب در ۱۰ صورت گرفته است. پس عددی که به ۱، ۳، ۷، یا ۹ ختم شود احتمالاً صفری در حاصل‌ضرب ایجاد نمی‌کند (چون چنین عددهایی ۱۰ را نمی‌شمارند). درواقع، تجزیهٔ ۱۰ به عاملهای اول $۵ \times ۲ = ۱۰$ است. می‌کوشیم که مسأله را با شمردن عاملهای ۵ در !۱۰۰ حل کنیم.

در عددهای ۱ تا ۱۰ تنها دو عدد ۵ و ۱۰ عامل ۵ دارند. ۵ را با ۲ جفت می‌کنیم که حاصل‌ضربشان ۱۰ است و عدد ۱۰ نیز نیاز به جفت ندارد. این دو عامل ۱۰ دو صفر در حاصل‌ضرب نهایی ایجاد می‌کنند.

در عددهای ۱۱ تا ۲۰ تنها دو عدد ۱۵ و ۲۰ عامل ۵ دارند. با استدلالی شبیه استدلال بند قبل، دو صفر دیگر را می‌شماریم.

عددهای ۲۱ تا ۳۰ کمی با عددهای قبلی فرق دارند. باز هم ۲۵ و ۳۰ تنها دو عددی هستند که عامل ۵ دارند، ولی ۲۵ دو عامل ۵ دارد. بنابراین

$$۲۲ \times ۲۴ \times ۲۵ = ۱۱ \times ۱۲ \times (۲ \times ۵) \times (۲ \times ۵)$$

و این حاصل‌ضرب منجر به $۱۰۰ = ۱۰ \times ۱۰$، یا دو صفر دیگر در حاصل‌ضرب نهایی می‌شود. پس حاصل‌ضرب عددهای ۲۱ تا ۳۰ سه صفر در حاصل‌ضرب نهایی ایجاد می‌کنند.

عددهای ۳۱ تا ۴۰ مانند دو گروه اولی که بررسی کردیم گروهی ساده‌اند. این گروه نیز دو صفر ایجاد می‌کند.

عددهای ۴۱ تا ۵۰ حالت خاص دارند، چون ۴۵ یک عامل ۵ اما ۵۰ دو عامل ۵ دارد. پس این عددها نیز (مانند عددهای ۲۱ تا ۳۰) سه صفر در حاصل‌ضرب نهایی ایجاد می‌کنند.

عددهای ۵۱ تا ۶۰ و ۶۱ تا ۷۰ مانند دو گروه اول‌اند. هیچ‌یک از این عددها دو عامل ۵ ندارد و هر یک از این دو گروه دو صفر ایجاد می‌کند.

عددهای ۷۱ تا ۸۰ نیز حالت خاص دارند، چون ۷۵ دو عامل ۵ و ۸۰ یک عامل ۵ دارد. حاصل‌ضرب این عددها کلاً سه صفر ایجاد می‌کند.

عددهای ۸۱ تا ۹۰ روی‌هم دو عامل ۵ دارند و دو صفر ایجاد می‌کنند.

عددهای ۹۱ تا ۱۰۰ روی‌هم سه عامل ۵ دارند؛ ۹۵ یک عامل ۵ و ۱۰۰ دو عامل ۵ دارد. پس حاصل‌ضرب این عددها نیز سه صفر در حاصل‌ضرب نهایی ایجاد می‌کند.

اگر همهٔ تحلیل را یکجا در نظر بگیریم، شش گروه عدد داریم که هر یک دو صفر ایجاد می‌کند و چهار گروه داریم که هر یک سه صفر ایجاد می‌کند. پس کلاً ۲۴ صفر در انتهای !۱۰۰ ظاهر می‌شود. □

این مثال چند ویژگی مهم حل موفق مسأله را نشان می‌دهد:

- یک ویژگی اساسی را تشخیص دادیم که مسأله بر محور آن می‌گردد (هر صفر انتهایی حاصل‌ضرب در ۱۰ است).

- حل مسأله را با تحلیل حالتی خاص آغاز کردیم (حاصل‌ضرب $۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times ۸ \times ۹ \times ۱۰$).
- تعیین کردیم که چگونه باید از حالت خاص به مسألهٔ کامل رسید.

بررسی کردن حالت خاص، یا حالتی کوچکتر، همیشه منجر به حل مسألهٔ موردنظر نمی‌شود. ولی این کار شما را راه می‌اندازد. این کار یکی از وسایل بسیاری است که برای حمله کردن به مسأله در اختیار داریم.

اگر دوباره به راه‌حل مسألهٔ اول نگاه کنیم، می‌بینیم که می‌توانستیم زیرکتر باشیم. بین عددهای ۱ تا ۱۰۰ تعداد مضربهای ۵ برابر $۲۰ = ۵ \div ۱۰۰$ است. چهار تا از این مضربهای ۵ درواقع مضرب ۲۵ هستند و هر کدام دو عامل ۵ دارند. پس روی‌هم ۲۴ عامل ۵ در $!۱۰۰$ وجود دارد. ضرب هر یک از این عاملها در عددی زوج یک عامل ۱۰، و در نتیجه یک صفر ایجاد می‌کند. نتیجه می‌گیریم که ۲۴ صفر در انتهای $!۱۰۰$ وجود دارد.

به مثال دیگری که با درنظرگرفتن حالت خاص حل می‌شود توجه کنید:

مسألهٔ ۲.۲.۱ در کلاسی ۱۲ دانش‌آموز هست. در ابتدای هر ساعت درس هر دانش‌آموز با هر یک از دیگر دانش‌آموزان دست می‌دهد. تعداد دست‌دادنها چندتاست؟

راه‌حل. کار را با بررسی حالتی خاص شروع می‌کنیم تا کم‌کم به حالت مربوط به ۱۲ دانش‌آموز برسیم.

فرض کنید فقط ۲ دانش‌آموز در کلاس باشند. دراین‌صورت، این ۲ نفر فقط یک بار با هم دست می‌دهند.

اکنون فرض کنید که دانش‌آموز دیگری وارد کلاس شود. او با هر یک از دو دانش‌آموزی که قبلاً در کلاس بوده‌اند دست می‌دهد. پس تعداد کلِّ دست‌دادنها $۳ = ۲ + ۱$ است.

اگر دانش‌آموز چهارمی وارد کلاس شود، باید با هر یک از دانش‌آموزانی که قبلاً در کلاس بوده‌اند دست بدهد. دراین‌صورت، تعداد کلِّ دست‌دادنها $۶ = ۳ + ۲ + ۱$ خواهد بود.

اکنون الگوی روشنی در اختیار داریم: اضافه شدن دانش‌آموز پنجم تعداد کلِّ دست‌دادنها را به $۴ + ۳ + ۲ + ۱$ می‌رساند. برای ۱۲ دانش‌آموز، تعداد کلِّ دست‌دادنها برابر است با

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۹ + ۱۰ + ۱۱ = ۶۶$$

و مسأله حل شده است. □

اغلب ضمن حل یا تحلیل مسأله، مسأله‌های دیگری مطرح می‌شوند. در اینجا مسأله‌ای را عنوان می‌کنیم که در حل مسألهٔ ۲.۲.۱ با آن مواجه شدیم.

مسألهٔ ۳.۲.۱ فرض کنید k عددی طبیعی باشد. مجموع زیر را بیابید:

$$S = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (k - ۱) + k$$

پیش از اینکه راه‌حلی برای این مسأله عرضه کنیم به بحثی مقدماتی دربارهٔ آن می‌پردازیم. S را تابع بگیرید: قرار دهید

$$S(k) = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (k - ۱) + k$$

این تابع ممکن است از چه نوعی باشد؟ فرض کنید تابع f به‌گونه‌ای باشد که هر بار که k به اندازهٔ ۱ افزایش یابد، $f(k)$ به اندازهٔ مقدار ثابتی ، مثلاً ۳، افزایش یابد. دراین‌صورت f باید تابعی خطی باشد. درواقع، f باید به‌صورت $f(k) = ۳k + b$ باشد. به همین ترتیب، اگر افزایش تابع g هر بار که k به اندازهٔ ۱ افزایش می‌یابد تابعی خطی از k باشد، می‌توانیم حدس بزنیم که g تابعی درجهٔ دوم است. (کسانی که حسابان می‌دانند می‌توانند به مفهوم مشتق فکر کنند: مشتق تابع درجهٔ دوم تابعی خطی است.) مثلاً اگر $g(k) = k^۲$، آنگاه $g(k + ۱) - g(k) = ۲k + ۱$، و این تفاضل خطی است.

این ملاحظات بیانگر شیوه‌ای برای پرداختن به این مسأله‌اند.

راه‌حل. روشی سودمند برای تحلیل مجموعها این است که هر جمله را به‌صورتی بازنویسی کنیم که بتوانیم جمله‌هایی را با هم حذف کنیم. توجه کنید که

$$۲^۲ - ۱^۲ = ۳ = ۲ \times ۱ + ۱$$

$$۳^۲ - ۲^۲ = ۵ = ۲ \times ۲ + ۱$$

$$۴^۲ - ۳^۲ = ۷ = ۲ \times ۳ + ۱$$

$$\vdots$$

$$k^۲ - (k - ۱)^۲ = \quad ۲(k - ۱) + ۱$$

$$(k + ۱)^۲ - k^۲ = \quad ۲k + ۱$$

اکنون ستونها را با هم جمع می‌کنیم:

$$[۲^۲ - ۱^۲] + [۳^۲ - ۲^۲] + [۴^۲ - ۳^۲] + \cdots + [(k + ۱)^۲ - k^۲]$$
$$= [۲ \times ۱ + ۱] + [۲ \times ۲ + ۱] + [۲ \times ۳ + ۱] + \cdots + [۲k + ۱]$$

سمت چپ «ادغام» می‌شود (یعنی همهٔ جمله‌ها غیر از اولین و آخرین جمله حذف می‌شوند) و در سمت راست می‌توان فاکتورگیری کرد. نتیجه چنین است:

$$(k + ۱)^۲ - ۱^۲ = ۲[۱ + ۲ + ۳ + \cdots + k] + [\underbrace{۱ + ۱ + ۱ + \cdots + ۱}_{k \text{ بار}}]$$

یا

$$k^۲ + ۲k = ۲S + k$$

به‌یاد آورید که S همان مجموع مطلوب است.

اگر از برابری بالا S را پیدا کنیم معلوم می‌شود

$$S = \frac{k^۲ + k}{۲} \qquad \square$$

فرمولی را که در مسألهٔ قبل به‌دست آوردیم اغلب به کارل فریدریش گاوس (۱۸۵۵-۱۷۷۷) نسبت می‌دهند، اگرچه شواهدی وجود دارد که نشان می‌دهد این فرمول مدتها قبل از او شناخته شده بوده است.

مسألهٔ پیکارجوی ۴.۲.۱ اگر k عددی طبیعی باشد، با همان روشی که برای حل مسألهٔ قبل به‌کار بردیم، فرمولی برای مجموع زیر بیابید:

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + k^۲$$

اکنون با آگاهی از نتیجهٔ مسألهٔ ۳.۲.۱ دوباره به مسألهٔ «دست‌دادن» توجه می‌کنیم. اگر k دانش‌آموز درکلاسی باشند و در ابتدای هر ساعت درس هر دانش‌آموز با هر یک از دیگر دانش‌آموزان دست دهد، از راه‌حل مسألهٔ ۲.۲.۱ معلوم می‌شود که تعداد کلِ دست‌دادنها $(k - ۱) + \cdots + ۳ + ۲ + ۱$ است. مسألهٔ ۳.۲.۱ نشان می‌دهد که این مجموع برابر است با

$$\frac{(k - ۱)^۲ + (k - ۱)}{۲} = \frac{k^۲ - k}{۲}$$

در اینجا پرسش دیگری دربارهٔ مسألهٔ دست‌دادن مطرح می‌کنیم.

مسألهٔ ۵.۲.۱ باز هم شرایط مطرح‌شده در مسألهٔ ۲.۲.۱ را درنظر بگیرید، اما این‌بار فرض کنید که k دانش‌آموز در کلاس‌اند. اگر k زوج باشد، تعداد کلِ دست‌دادنها زوج است یا فرد؟ اگر k فرد باشد، تعداد کلِ دست‌دادنها زوج است یا فرد؟

راه‌حل. اگر ۲ دانش‌آموز (مقداری زوج برای k) در کلاس باشند، تعداد دست‌دادنها ۱، یعنی عددی فرد است. اگر یک دانش‌آموز به کلاس اضافه شود، به تعداد دست‌دادنها دو تا اضافه می‌شود: تعداد دانش‌آموزان ۳ (فرد) و تعداد دست‌دادنها ۳ (فرد) است. اگر دانش‌آموز دیگری نیز به کلاس اضافه شود،۳ دست‌دادن دیگر اضافه می‌شود. پس تعداد دانش‌آموزان ۴ (زوج) و تعداد کلِ دست‌دادنها ۶ (زوج) است.

اگر جدولی مانند جدول ۱ تشکیل دهیم، به‌تدریج الگویی نمایان می‌شود. برای کامل بودن جدول و ساده شدن بحثی که در پی می‌آید، حالتهای ۰ دانش‌آموز و ۱ دانش‌آموز را نیز در جدول گنجانده‌ایم؛ البته در ریاضیات اغلب چنین کاری می‌کنیم.

می‌بینیم که در ستون تعداد دست‌دادنها در جدول ۱، دو عدد اول زوج‌اند، سپس دو عدد فرد داریم، بعد دو عدد زوج و همین‌طور تا آخر.

جدول۱

تعداد دانش‌آموزان	تعداد دست‌دادنها	زوجیت تعداد دست‌دادنها
۰	۰	زوج
۱	۰	زوج
۲	۱	فرد
۳	۳	فرد
۴	۶	زوج
۵	۱۰	زوج
۶	۱۵	فرد
۷	۲۱	فرد
۸	۲۸	زوج
۹	۳۶	زوج
۱۰	۴۵	فرد
۱۱	۵۵	فرد
۱۲	۶۶	زوج
۱۳	۷۸	زوج

الگوی دو عدد زوج، دو عدد فرد، با نمو چهار در تعداد دانش‌آموزان تکرار می‌شود. اکنون توجه کنید که در ستون «تعداد دست‌دادنها» در جدول ۱، عدد سطر مربوط به $k + ۱$ دانش‌آموز مجموع دو عدد سطر مربوط به k دانش‌آموز است. می‌دانیم که تعداد دست‌دادنها برای k دانش‌آموز $\frac{k^۲ - k}{۲}$ است. پیش خودتان درستی این فرمول را با قرار دادن عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ در آن تحقیق کنید. درواقع چیزی که امتحان می‌کنید این است که (اگر ℓ عددی صحیح و نامنفی باشد)

الف) در سطرهای ۴ℓ و $۴\ell + ۱$ تعداد دست‌دادنها زوج است؛

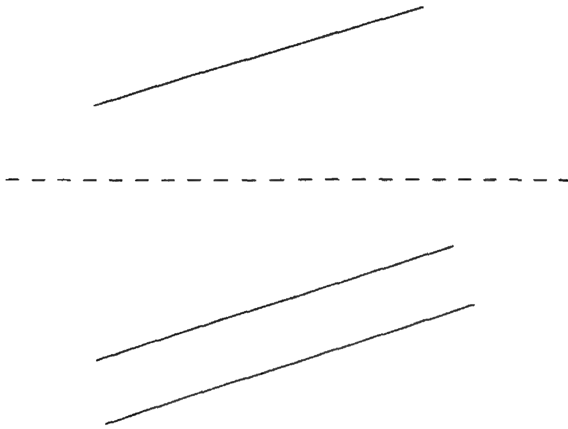
ب) در سطرهای $۴\ell + ۲$ و $۴\ell + ۳$ تعداد دست‌دادنها فرد است.

به این ترتیب، مسألهٔ زوج یا فرد بودن تعداد دست‌دادنها برای k دانش‌آموز حل شده است. □

توجه کنید که تحلیل مسألهٔ ۵.۲.۱ با مضمون این بخش مطابقت ندارد: برای حل این مسأله ابتدا حالت ساده‌ای را درنظر نگرفتیم. در عوض، مسألهٔ ۵.۲.۱ را به‌عنوان محصولی جانبی بررسی کردیم، چون نتیجهٔ مسألهٔ ۲.۲.۱ چنین پرسشی را مطرح ساخت.

اکنون به آخرین مثال از فن درنظرگرفتن حالت خاص می‌پردازیم.

مسألهٔ ۶.۲.۱ بیشترین تعداد ناحیه‌هایی که ممکن است سه خط راست در صفحه ایجاد کنند چیست؟



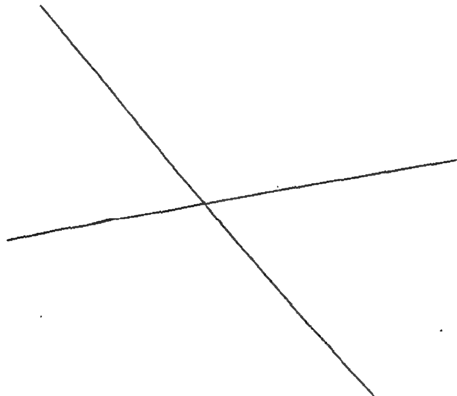
شکل۱

راه‌حل. کار را با پرسشی ساده‌تر شروع می‌کنیم: «بیشترین تعداد ناحیه‌هایی که ممکن است خطی در صفحه ایجاد کند چیست؟». البته جای هیچ بحثی نیست، چون هر خط همیشه صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند.

اکنون دو خط در نظر می‌گیریم. اگر این دو خط بر هم منطبق باشند، باز هم صفحه تنها به دو ناحیه تقسیم می‌شود (شکل ۱، بالا، را ببینید). اگر دو خط متمایز، ولی متوازی باشند (شکل ۱، پایین)، صفحه به سه ناحیهٔ مجزا تقسیم می‌شود.

دو حالتی راکه بررسی کردیم حالتهای تباهیده یا غیرمعمول تلقی می‌کنیم، چون اگر دو میله را با هم بر روی زمین بیندازیم، احتمال اینکه روی‌هم قرارگیرند یا با هم موازی باشند صفر است. ولی میله‌ها با احتمال ۱ طوری روی زمین می‌افتند که ناموازی‌اند. وضعیت آخر را «وضعیت عمومی» دو میله می‌نامیم.

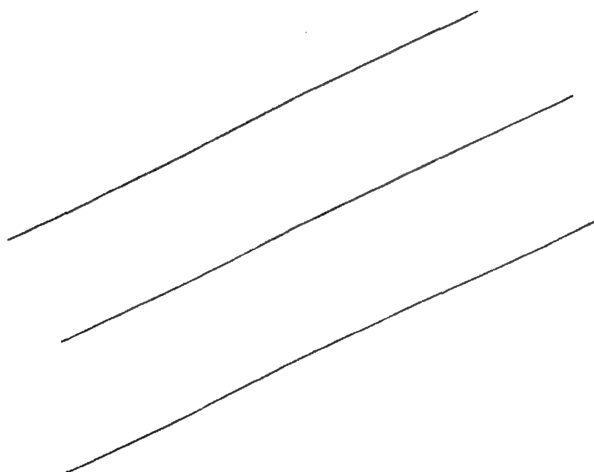
اکنون فرض کنید که دو خط در وضعیت عمومی قرار داشته باشند. این وضعیت در شکل ۲



شکل۲

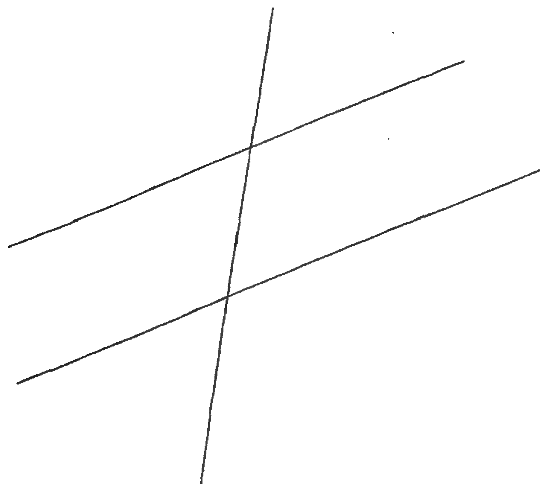
نمایش داده شده است. در این حالت صفحه به چهار ناحیه تقسیم می‌شود.

سرانجام به حالت سه خط می‌رسیم. اگر سه خط بر هم منطبق باشند، با همان حالت یک خط مواجهیم. اگر دو تا از سه خط بر هم منطبق باشند، با همان حالت دو خط مواجهیم. پس فرض می‌کنیم که سه خط متمایز باشند.

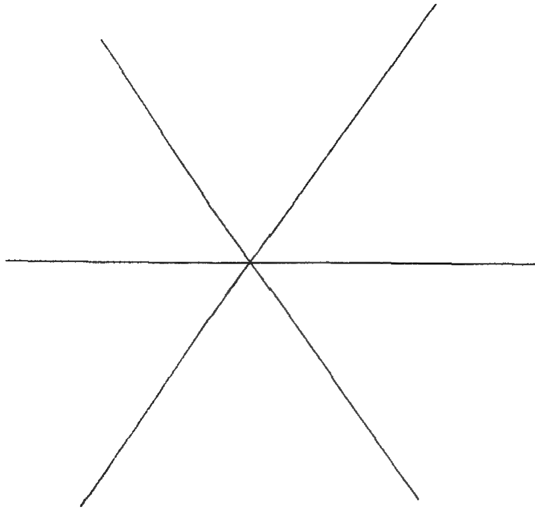


شکل۳

اگر هر سه خط با هم موازی باشند، صفحه به چهار ناحیه تقسیم می‌شود (شکل ۳ را ببینید). اگر دوتا از آنها با هم موازی باشند و خط سوم این دو خط را قطع کند، صفحه به شش ناحیه تقسیم می‌شود (شکل ۴). اکنون فرض کنید که هیچ دو خطی از این سه خط با هم موازی نباشند.

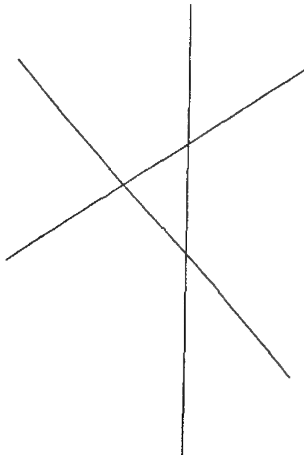


شکل۴



شکل۵

اگر هر سه خط از یک نقطه بگذرند (شکل ۵)، صفحه به شش ناحیه تقسیم می‌شود. اگر هر سه خط از یک نقطه نگذرند و هیچ دوتایی از آنها با هم موازی نباشند (این وضعیت عمومی است، یعنی وضعیتی است که با احتمال ۱ روی می‌دهد. شکل ۶ را ببینید)، صفحه به ۷ ناحیه تقسیم می‌شود. پس بیشترین تعداد ناحیه‌هایی که ممکن است سه خط در صفحه ایجاد کنند هفت‌تاست. □



شکل۶

در مسألهٔ قبل مطمئناً از روش پرداختن به حالتهای ساده برای فهمیدن خواستهٔ مسأله استفاده کردیم. اما در این مسأله روش اِفنا را نیز به‌کار گرفتیم. مفاهیم توازی و تقاطع ـ آنچه که سرانجام «وضعیت عمومی» نامیدیم ـ را به‌کار گرفتیم تا همهٔ آرایشهای ممکن خطها را بررسی کنیم. ممکن است تعمیم مسألهٔ اخیر به چهار یا پنج خط را تمرینی آموزنده بیابید.

این بخش را با دومین مسألهٔ پیکارجوی این کتاب به پایان می‌رسانیم. این مسأله‌ها ـ که شما باید حل کنید ـ ارتباط تنگاتنگی با مسأله‌های حل‌شده در متن کتاب دارند. باید بکوشید این مسأله‌ها را بلافاصله پس از مطالعهٔ مسأله‌ها و راه‌حلهای آنها که در متن کتاب عرضه شده‌اند حل کنید. مسأله‌های پیکارجو گاهی سرراست‌اند و در آنها ایدهٔ اساساً جدیدی مطرح نشده است. گاهی نیز این مسأله‌ها دشوارتر از مثالها و تمرینهای متن کتاب هستند و حل آنها نیاز به استفاده از ترفندهای بیشتری دارد. این مسأله‌ها را برای تشویق شما به وسعت دادن تواناییها و تخیلتان در کتاب گنجانده‌ایم. به‌خصوص، باید از این مسأله‌ها به‌عنوان دلیلی برای صحبت کردن با دیگران برای یافتن ایده‌های جدید استفاده کنید.

مسألهٔ پیکارجوی ۷.۲.۱ پنج صفحه فضای سه‌بعدی را حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

پاسخ این مسأله ۲۶ ناحیه، و تجسم آن نسبتاً دشوار است. نکتهٔ قابل‌توجه این است که راه‌حل این مسأله چندان دشوار نیست. آنچه دشوار است استفاده کردن از توان تجسم سه‌بعدی برای رسیدن به راه‌حل مسأله است. دربارهٔ حل کامل این مسأله بعداً در این کتاب بحث خواهیم کرد.

۳.۱ چگونه بشماریم

در مسألهٔ ۱.۲.۱ نیم‌نگاهی به «مسأله‌های شمارشی» انداختیم. مسأله‌های شمارشی به شکلهای مختلفی رو می‌نمایند: به چند طریق متفاوت می‌توان از میان ۳۶ کارت متمایز ۵ کارت انتخاب کرد؟ به چند طریق متفاوت ممکن است با پرتاب دوتاس به مجموع ۸ دست یافت؟ به چند طریق متفاوت می‌توان با سکه‌های پنج، ده و بیست‌وپنج سنتی ۱ دلار پرداخت کرد؟

جوهر فن شمارش داشتن راهکاری سازمان‌یافته است. کار را با مقدماتیترین مسألهٔ شمارشی آغاز می‌کنیم.

مسألهٔ ۱.۳.۱ k شیء $\{a_1, \ldots, a_k\}$ را در اختیار داریم. با این k شیء چند جفت مرتب متفاوت می‌توان تشکیل داد؟

راه‌حل. برای انتخاب اولین عضو جفت مرتب k گزینه داریم (یعنی a_1، a_2، ... و a_k). پس از انتخاب شیئی به‌عنوان عضو اول، چند گزینه برای انتخاب عضو دوم داریم؟ پاسخ $k-1$ است، چون $k-1$ شیء از اشیای $\{a_1, \ldots, a_k\}$ باقی مانده‌اند.

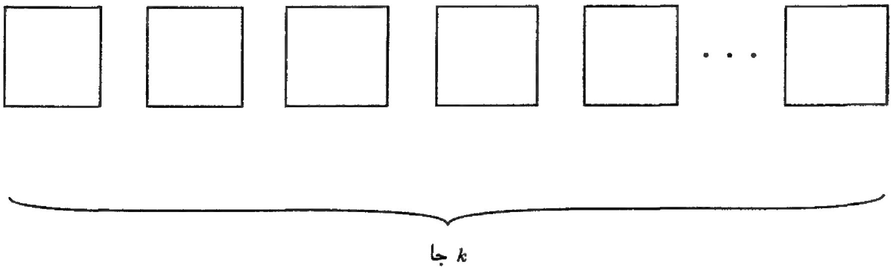
اگر a_1 را به‌عنوان عضو اول انتخاب کنیم، هر یک از a_2، a_3، ... و a_k ـ یعنی $k-1$ گزینه ـ را می‌توانیم به‌عنوان عضو دوم انتخاب کنیم. اگر a_2 را به‌عنوان عضو اول انتخاب کنیم، می‌توانیم هر یک از a_1، a_3، a_4، ... و a_k ـ باز هم $k-1$ گزینه ـ را به‌عنوان عضو دوم انتخاب کنیم، و همین‌طور تا آخر. به‌طور خلاصه، k گزینه برای انتخاب عضو اول جفت مرتب داریم. برای هر یک از این گزینه‌ها،

$k - ۱$ گزینه برای انتخاب عضو دوم جفت مرتب داریم. پس تعداد کلِّ جفتهای مرتبی که می‌توان از میان $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_k\}$ انتخاب کرد $k(k - ۱)$ است. □

می‌توانیم راه‌کاری را که در مسألهٔ قبل برای شمارش از آن استفاده کردیم برای رسیدن به نکته‌ای بنیادی در مورد «جایگشت»ها، یا ترتیبهای متناهی به‌کار ببریم.

مسألهٔ ۲.۳.۱ k شیء $\{a_۱, \ldots, a_k\}$ را در اختیار داریم. این اشیا را به چند ترتیب متفاوت می‌توانیم آرایش دهیم؟

راه‌حل. فرض کنید k جا داریم که می‌توانیم اشیا را در آنها قرار دهیم (شکل ۷). k شیءِ متمایز (یعنی $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k) داریم که می‌توانیم در جای اول قرار دهیم.



شکل۷

وقتی که شیئی را در جای اول قرار دهیم، $k - ۱$ شیءِ متمایز باقی می‌مانند که می‌توانیم در جای دوم قرار دهیم. بنابراین، با استدلالی شبیه آنچه در مسألهٔ قبل بیان کردیم، می‌بینیم که $k(k - ۱)$ گزینه برای انتخاب دو شیء که در دو جای اول قرار دهیم داریم.

پس از انتخاب دو شیء برای قرار دادن در دو جای اول، می‌بینیم که $k - ۲$ شیء برای قرار دادن در جای سوم باقی می‌مانند. بنابراین، $k(k - ۱)(k - ۲)$ گزینه برای انتخاب سه شیئی که باید در سه جای اول قرار گیرند داریم.

می‌توانیم استدلال را به همین شیوه ادامه دهیم. می‌بینیم که $k(k - ۱)(k - ۲)(k - ۳)$ گزینه برای چهار جای اول داریم، $k(k - ۱)(k - ۲)(k - ۳)(k - ۴)$ گزینه برای پنج جای اول داریم، و غیره. در نهایت،

$$k(k - ۱)(k - ۲) \cdots ۳ \times ۲ \times ۱ = k!$$

ترتیب مختلف برای k شیءِ $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_k\}$ داریم. □

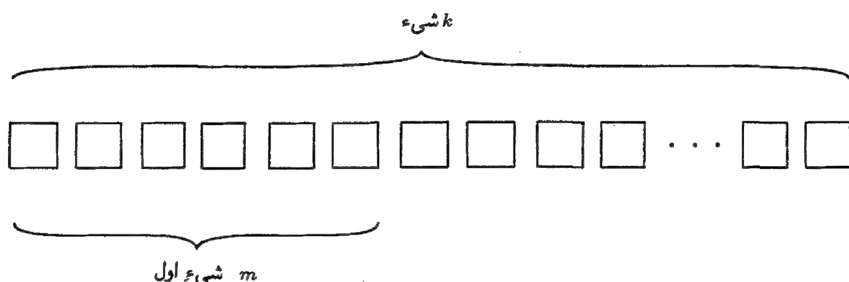
بررسی موفق بسیاری از مسأله‌های شمارشی به آشنایی با «تابع انتخاب» متکی است. اکنون به این مفهوم می‌پردازیم:

مسألهٔ ۳.۳.۱ k شیء $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ را در اختیار داریم. فرض کنید m عددی طبیعی و کوچکتر از یا برابر با k باشد. به چند طریق می‌توان m شیء را از میان این k شیء انتخاب کرد؟

مثالی از این نوع مسأله این است که بپرسیم به چند طریق می‌توان از گروهی ۲۵ نفری ۱۱ نفر برای شرکت در مسابقهٔ فوتبال انتخاب کرد. آنچه که در این مسأله جالب است و آن را از مسأله‌های قبلی متمایز می‌کند این است که در این مسأله ترتیب مهم نیست. یعنی ۱۱ بازیکن را به هر ترتیبی که نام ببریم آرایش تیم تغییر نمی‌کند.

اکنون به حل مسأله می‌پردازیم.

راه‌حل. روشی برای انتخاب m شیء از میان k شیءِ اولیه نیاز داریم. فرض کنید چنین عمل کنیم: ترتیبی برای کلِّ مجموعهٔ k شیء انتخاب می‌کنیم و m شیءِ اول این ترتیب را به‌عنوان m شیءِ موردنظر انتخاب می‌کنیم. شکل ۸ را ببینید. چون $k!$ طریق مختلف برای مرتب کردن k شیء وجود دارد (مسألهٔ قبل را ببینید)، به‌نظر می‌رسد که $k!$ گزینه برای انتخاب m شیء داریم.



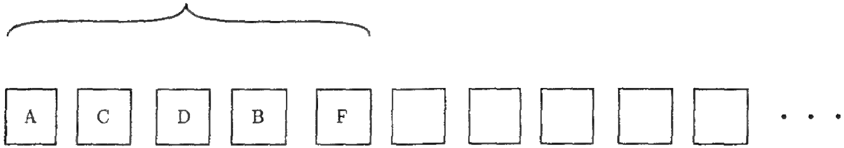
شکل۸

البته در این استدلال چیزی باید اشتباه باشد، چون پاسخ $k!$ به m بستگی ندارد. اشتباه در این است که ترتیبهای مختلف m شیءِ اول را متفاوت درنظرگرفته‌ایم (شکل ۹ را ببینید). چون نمی‌خواهیم چنین تمایزی بین ترتیبهای مختلف m شیء قائل شویم، پاسخ به‌دست آمده را بر تعداد ترتیبهای ممکن m شیء ـ یعنی $m!$ ـ تقسیم می‌کنیم. همچنین ترتیبهای مختلف $k-m$ شیءِ آخر را نیز حالتهای متفاوت درنظرگرفته‌ایم. پس باید پاسخ را بر تعداد ترتیبهای ممکن این اشیا ـ یعنی $(k-m)!$ ـ نیز تقسیم کنیم. اکنون طرح شمارش دقیق است و زیرگردایه‌های حاوی m شیء را که از میان k شیء انتخاب شده‌اند می‌شمارد.

فهمیدیم که تعداد زیرگردایه‌های حاوی m شیء که از میان k شیء انتخاب شده‌اند برابر است با

$$\frac{k!}{m!\,(k-m)!}$$

باز هم توجه کنید که راه‌کار زیر را برای به‌دست آوردن فرمول بالا به‌کار بردیم: تعداد ترتیبهای ممکن همهٔ k شیء را درنظر می‌گیریم و مسأله را به انتخاب m شیءِ اول از هر یک از این ترتیبها تبدیل





شکل۹

می‌کنیم. اما باید پاسخ حاصل را بر تعداد ترتیبهای ممکن m شیء تقسیم کنیم. همچنین باید پاسخ را بر تعداد ترتیبهای مختلف ممکن برای $k - m$ شیءِ باقی‌مانده تقسیم کنیم. □

مقدار

$$\frac{k!}{m!(k-m)!}$$

کاربردی عمومی در استدلالهای شمارشی دارد و معمولاً «انتخاب m از k» نامیده می‌شود. این مقدار را با نماد $\binom{k}{m}$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\binom{k}{m} = \frac{k!}{m!(k-m)!}$$

مسألهٔ ۴.۳.۱ چند گزینه برای انتخاب ۵ کارت از میان ۵۲ کارت متمایز داریم؟

راه‌حل. با ایده‌هایی که کسب کرده‌ایم حل این مسأله آسان است. پاسخ مسأله «انتخاب ۵ از ۵۲» است:

$$\text{تعداد گزینه‌ها برای انتخاب ۵ کارت از ۵۲ کارت متمایز} = \binom{۵۲}{۵} = \frac{۵۲!}{۵!۴۷!} = ۲۵۹۸۹۶۰$$ □

مسألهٔ ۵.۳.۱ به چند طریق متفاوت می‌توان ۲۶ کارت از ۵۲ کارت متمایز را بین دو نفر به تساوی تقسیم کرد؟

راه‌حل. به نفر اول ۱۳ کارت از ۵۲ کارت داده می‌شود. بنابراین

$$C_۱ = \binom{۵۲}{۱۳} = \frac{۵۲!}{۱۳!۳۹!}$$

راه مختلف برای دادن ۱۳ کارت به نفر اول وجود دارد. به نفر دوم نیز ۱۳ کارت از بین ۳۹ کارت باقی‌مانده داده می‌شود. (توجه کنید که لزومی ندارد ابتدا به نفر اول کارت دهیم و سپس به نفر دوم. آنچه مهم است این است که به نفر اول به‌طور تصادفی ۱۳ کارت می‌دهیم و به نفر دوم به‌طور تصادفی ۱۳ کارت از بقیهٔ کارتها می‌دهیم.) بنابراین، تعداد امکانات موجود برای نفر دوم برابر است با

$$C_{۲} = \binom{۳۹}{۱۳} = \frac{۳۹!}{۱۳!۲۶!}$$

پس تعداد کل راههای تقسیم ۲۶ کارت به تساوی بین دو نفر برابر است با

$$C_{۱} \times C_{۲} = \binom{۵۲}{۱۳} \times \binom{۳۹}{۱۳} = \frac{۵۲!}{۱۳!۳۹!} \times \frac{۳۹!}{۱۳!۲۶!} \approx ۵/۱۵۷۸ \times ۱۰^{۲۱}$$ □

مسألهٔ ۶.۳.۱ فرض کنید k و m دو عدد طبیعی باشند. چند تک‌جمله‌ای مختلف از درجهٔ m در $\mathbb{R}^k$ وجود دارد؟

ابتدا باید روشن کنیم که پرسش ما در اینجا چیست. فضای $\mathbb{R}^k$ از عناصری به‌شکل $(x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_k)$ تشکیل شده است که در آن $x_{۱}$، $x_{۲}$، ... و x_k عددهایی حقیقی‌اند. تک‌جمله‌ای عبارتی مانند $(x_{۱})^{۲} \cdot (x_{۳})^{۳} \cdot (x_{۵})^{۶}$ است. به بیان دیگر، تک‌جمله‌ای از حاصل‌ضرب توانهایی از متغیرها تشکیل شده است. می‌گوییم درجهٔ تک‌جمله‌ای بالا ۱۱ است، چون مجموع نمای توانهایی که در آن ظاهر شده‌اند $۱۱ = ۶+۳+۲$ است. مسأله تعداد همهٔ تک‌جمله‌ایهای از درجهٔ مفروض m را در $\mathbb{R}^k$ می‌خواهد.



$m+k-۱$ جعبه

شکل ۱۰



$k-۱$ جعبهٔ سایه‌خورده
m جعبهٔ سایه‌نخورده

شکل ۱۱

راه‌حل. اکنون روشی را برای شمارش می‌آموزیم. در شکل ۱۰، $m+k-۱$ جعبه می‌بینید. $k-۱$ جعبه از آنها را به‌دلخواه سایه می‌زنیم. آنچه باقی می‌ماند جعبه‌هایی بدون سایه است که ممکن است همگی کنار هم نباشند؛ تعداد کلِ جعبه‌های باقی‌مانده m است. شکل ۱۱ را ببینید.

بین ضلع سمت چپ اولین جعبه (در سمت چپ شکل) و اولین جعبهٔ سایه‌خورده گروهی از جعبه‌های سایه نخورده قرار دارد. فرض کنید تعداد این جعبه‌ها m_1 باشد. توجه کنید که $0 \leqslant m_1 \leqslant m$. بعد از این، در سمت راست اولین جعبهٔ سایه‌خورده و سمت چپ دومین جعبهٔ سایه‌خورده تعدادی جعبهٔ سایه‌نخورده، مثلاً m_2 جعبه، قرار دارد. به همین ترتیب کار را ادامه دهید.

می‌بینیم که با سایه‌زدن $k - 1$ جعبه به عددهای نامنفی m_1، m_2، ... و m_k می‌رسیم به‌طوری‌که $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m$. در نتیجه، این kتایی از اعداد نامنفی متناظر با تک‌جمله‌ای $(x_1)^{m_1} \cdot (x_2)^{m_2} \ldots (x_k)^{m_k}$ است.

این فرایند را برعکس نیز می‌توان انجام داد. هر تک‌جمله‌ای مانند $(x_1)^{m_1} \cdot (x_2)^{m_2} \ldots (x_k)^{m_k}$ متناظر با kتایی $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$، و این kتایی نیز متناظر با سایه‌زدن $k - 1$ جعبه از $m + k - 1$ جعبه است. درواقع شکل ۱۲ سایه‌زدن متناظر با $(x_1)^2 \cdot (x_3)^3 \cdot (x_5)^6$ را در $\mathbb{R}^6$ نشان می‌دهد.



شکل۱۲

بنابراین، شمردن تک‌جمله‌ایهای از درجهٔ m در $\mathbb{R}^k$ دقیقاً متناظر است با شمردن راههای مختلف سایه‌زدن (انتخاب) $k - 1$ جعبه از میان $m + k - 1$ جعبه. توجه کنید که هیچ‌چیز زیادی یا مبهمی وجود ندارد. بنابراین، تعداد تک‌جمله‌ایهایی که می‌خواهیم بشماریم برابر است با

$$\binom{m+k-1}{k-1} = \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!m!} \qquad \square$$

۴.۱ کاربرد استقرا

استقرای ریاضی یکی از توانمندترین روشها در همهٔ ریاضیات است. پیش از آغاز مطالعهٔ این روش، باید به تمایز استفاده از «استقرا» در شاخه‌های دیگر دانش بشری و استفاده از «استقرای ریاضی» در ریاضیات توجه کنیم.

اکثر رشته‌های علمی تکیهٔ زیادی بر استقرا دارند. شیمیدان، فیزیکدان، یا زیست‌شناس تعدادی از نمونه‌های پدیده‌ای را بررسی می‌کند و می‌کوشد به استقرا قاعده یا حکمی کلی را از این داده‌ها حدس بزند. فرایند رسیدن از داده‌ها به قاعده ممکن است شکلهای گوناگونی داشته باشد. این فرایند از پیش تعریف نشده است؛ و محک اصلی برای اعتبار فرایند، آزمایش بیشتر و گردآوری داده‌های بیشتر است.

وسعت کاربرد «استقرای ریاضی» محدود و روش استفاده از آن مشخص است. طرح استقرای ریاضی چنین است. فرض کنید حکم $P(k)$ را در مورد هر عدد طبیعی مانند k داریم. مثلاً ممکن است حکم این باشد که «$k^2 - 2k + 1 \geqslant 0$»؛ یا ممکن است این باشد که «عدد $2k + 4$ را می‌توان

به‌صورت مجموع دو عدد اول فرد نوشت» استقرای ریاضی برای اثبات $P(k)$ به‌ازای هر k به شیوهٔ زیر به‌کار می‌رود:

(۱) ابتدا درستی $P(۱)$ را تحقیق می‌کنیم؛
(۲) سپس تحقیق می‌کنیم که به‌ازای هر $j \in \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$،

$$P(j) \Longrightarrow P(j + ۱)$$

با فرض اینکه این دو تحقیق شده باشند، به نکات زیر توجه می‌کنیم. استفاده از (۱) و حالت خاص $j = ۱$ در (۲)، $P(۱)$ و $P(۱) \Longrightarrow P(۲)$ را به‌دست می‌دهد. از این رو می‌توانیم $P(۲)$ را نتیجه بگیریم. اکنون حالت خاص $j = ۲$ در (۲)، $P(۲) \Longrightarrow P(۳)$ را به‌دست می‌دهد. از این و $P(۲)$ که در گام قبل به‌دست آمد می‌توانیم $P(۳)$ را نتیجه بگیریم. اگر به همین روش ادامه دهیم، معلوم می‌شود که $P(k)$ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k درست است.

این بحث که برای اثبات معتبر بودن روش استقرای ریاضی آوردیم شهودی است. بررسی دقیق این روش ارتباط تنگاتنگی با نظریهٔ مجموعه‌ها و ساختار اعداد طبیعی دارد؛ در اینجا نمی‌توانیم وارد جزئیات شویم. خواننده را برای مطالعهٔ بحثی با جزئیات بیشتر به [KRA1] و [SUP] ارجاع می‌دهیم.

اکنون به مثالهایی توجه می‌کنیم که در آنها استقرا بسیار سودمند است.

مسألهٔ ۱.۴.۱ تحقیق کنید که

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (k - ۱) + k = \frac{k + k^۲}{۲}$$

راه‌حل. این مسأله را در بخش ۲.۱ به‌روشی دیگر حل کردیم. فنی که در آنجا به‌کار بردیم ممکن است ترفندی خلق‌الساعه به‌نظر آید. اما با مطالعهٔ مثالهایی شبیه به مسأله‌ای که هم‌اکنون حل می‌کنیم به استفاده از استقرا خو می‌گیرید، و این ترفند را ابزاری متعارف برای حل مسأله‌هایی شبیه به این مسأله می‌یابید.

هنگام استفاده از روش استقرا (از این پس به‌جای اصطلاح استقرای ریاضی فقط می‌گوییم استقرا)، پیش رفتن به‌طور منظم اهمیت دارد.

ابتدا باید ببینیم حکم $P(k)$ که باید تحقیق کنیم چیست. در اینجا حکم این است

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (k - ۱) + k = \frac{k + k^۲}{۲}$$

برای تحقیق $P(۱)$ توجه می‌کنیم که

$$۱ = \frac{۱ + ۱^۲}{۲}$$

جالبترین و هوشمندانه‌ترین قسمت در روش استقرا قسمت (۲) است. فرض می‌کنیم می‌دانیم $P(j)$ برقرار است. پس در این مسأله فرض می‌کنیم

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + j = \frac{j + j^۲}{۲} \qquad (*)$$

از این می‌خواهیم حکم متناظر به‌ازای $j + ۱$ را به‌دست آوریم.

برای رسیدن به این هدف، $j + ۱$ را به دوطرف $(*)$ اضافه می‌کنیم. به‌دست می‌آوریم

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + j + (j + ۱) = \frac{j + j^۲}{۲} + (j + ۱)$$

پس از ساده کردن می‌رسیم به

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (j + ۱) = \frac{j + j^۲ + ۲(j + ۱)}{۲}$$

و یا

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (j + ۱) = \frac{(j + ۱) + (j + ۱)^۲}{۲}$$

این دقیقاً همان حکم $P(j + ۱)$ است.

توجه کنید که با فرض برقراری $P(j)$، $P(j + ۱)$ را به‌دست آوردیم. این دقیقاً قسمت (۲) در روش استقراست.

تحقیق کامل شده است. بنابر روش استقرا، وقتی که گامهای (۱) و (۲) را تحقیق کرده باشیم می‌توانیم مطمئن باشیم که $P(k)$ به‌ازای هر k برقرار است. پس مسأله حل شده است. □

گاهی استقرا را باید از نقطه‌ای غیر از $j = ۱$ آغاز کرد. در مسألهٔ بعدی کار را از $j = ۰$ آغاز می‌کنیم.

مسألهٔ ۲.۴.۱ فرض کنید S مجموعه‌ای k عضوی باشد. ثابت کنید که S دقیقاً ۲^k زیرمجموعه دارد.

راه‌حل. روش استقرا را به‌کار می‌گیریم. ابتدا به‌یاد آورید که مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ B می‌نامیم اگر هر عضو A عضو B نیز باشد. به‌خصوص، $\varnothing \subset A$، که در آن، $\varnothing$ «مجموعهٔ تهی» (یا مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد) است. همچنین $A \subset A$.

اکنون حکم استقرایی $P(k)$ این است: «اگر مجموعهٔ S، k عضو داشته باشد، آنگاه S، ۲^k زیرمجموعه دارد».

همان‌طور که قبلاً گفتیم استقرا را از ۰، به‌جای ۱، آغاز می‌کنیم. در مورد گام (۱)، توجه کنید که اگر $S = \{\} = \varnothing$، یعنی S هیچ عضوی نداشته باشد، تنها زیرمجموعهٔ S خود S است. پس S، $۲^۰ = ۱$ زیرمجموعه دارد. بنابراین $P(۰)$ را تحقیق کرده‌ایم.

در مورد گام (۲)، فرض می‌کنیم $P(j)$ درست باشد. یعنی هر مجموعهٔ j عضوی ۲^j زیرمجموعه

$S' = \{s_1, s_2, \ldots, s_j\}$. توجه کنید که مجموعهٔ S'، j عضو دارد. بنابر فرض، S' کلاً 2^j زیرمجموعه دارد. اکنون زیرمجموعه‌های S را می‌شماریم.

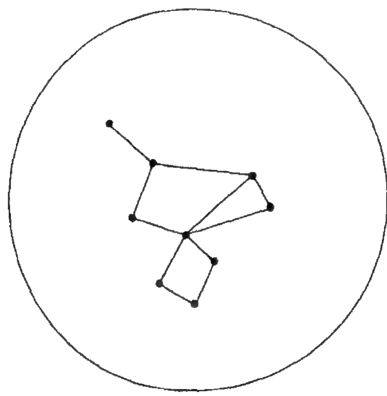
بی‌شک هر زیرمجموعهٔ S' زیرمجموعهٔ S نیز هست. پس تا اینجا S، 2^j زیرمجموعه دارد. همچنین، اگر A زیرمجموعه‌ای از S' باشد، $A \cup \{s_{j+1}\}$ زیرمجموعهٔ S است. به این ترتیب، S، 2^j زیرمجموعهٔ دیگر نیز دارد. پس کلاً $2^j + 2^j = 2^{j+1}$ زیرمجموعهٔ S را مشخص کرده‌ایم. توجه کنید که درواقع، همهٔ زیرمجموعه‌های S را به‌حساب آورده‌ایم، چون هر زیرمجموعهٔ S یا s_{j+1} را دربردارد یا ندارد. بنابراین، $P(j+1)$ را از $P(j)$ به‌دست آورده‌ایم. این همان قسمت (۲) در روش استقراست.

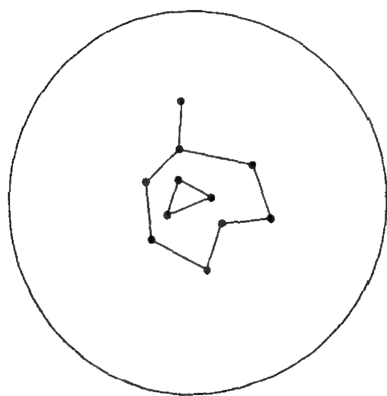
تحقیق کامل شده است. □

مسألهٔ ۳.۴.۱ فرض کنید گرافی پذیرفتنی روی کرهٔ واحد در فضای سه‌بعدی داریم. در اینجا منظور از «گراف پذیرفتنی» آرایشی همبند از کمانهاست. دو کمان را فقط در نقاط انتهاییشان می‌توان به‌هم وصل کرد. نقاط انتهایی کمانهای گراف را رأس می‌نامیم. کمانها را یال می‌نامیم. یال بخشی از کمان است که بین دو رأس قرار دارد. وجه ناحیه‌ای دوبعدی، بدون حفره، است که با یالها و رأسها احاطه شده است. در شکل ۱۳ گرافی پذیرفتنی و گرافی ناپذیرفتنی را می‌بینید.

در این مسأله باید درستی فرمول اویلر را برای گراف پذیرفتنی تحقیق کنید. V را تعداد رأسها، E را تعداد یالها، و F را تعداد وجه‌ها می‌گیریم. دراین صورت فرمول اویلر این است

$$V - E + F = 2$$

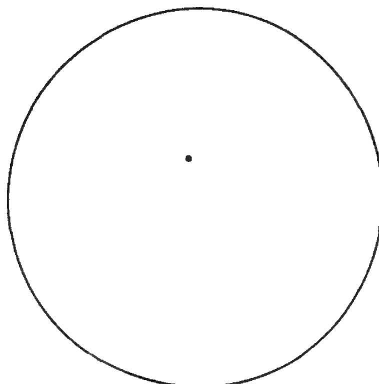

گراف پذیرفتنی


گراف ناپذیرفتنی

شکل۱۳

راه‌حل. برای اطمینان از درک صورت مسأله چند حالت خاص را بررسی می‌کنیم.

ساده‌ترین گراف پذیرفتنی، با تعریف ما، یک رأس تنها بدون هیچ‌چیز دیگر است (شکل ۱۴).



شکل۱۴

این رأس تنها، درکره، یک وجه است. پس $V = ۱$، $E = ۰$ و $F = ۱$. دراین صورت

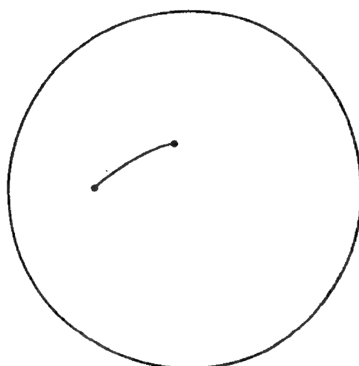
$$V - E + F = ۱ - ۰ + ۱ = ۲$$

و می‌بینیم که فرمول اویلر برقرار است.

ساده‌ترین گراف بعدی یک یال و در هر طرف این یال یک رأس دارد. متمم این یال با نقطه‌های انتهاییش (درکره) یک وجه است. شکل ۱۵ را ببینید. بنابراین، در این حالت $V = ۲$، $E = ۱$ و $F = ۱$. می‌بینیم که

$$V - E + F = ۲ - ۱ + ۱ = ۲$$

پس فرمول اویلر در این حالت نیز درست است.



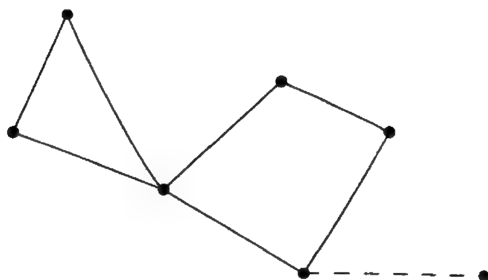
شکل۱۵

اکنون $P(k)$ را این حکم می‌گیریم که «فرمول اویلر در هرگراف پذیرفتنی که k یال دارد درست است». از استقرا برای اثبات این حکم به‌ازای هر k استفاده می‌کنیم.

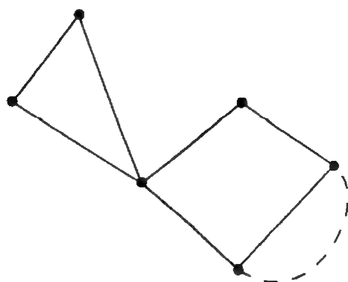
$P(۱)$ را تحقیق کردیم. این قسمت (۱) در روش استقراست.

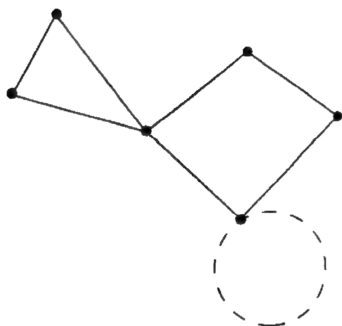
برای قسمت (۲) فرض می‌کنیم که فرمول اویلر برای هر گراف پذیرفتنی که j یال دارد درست باشد. اکنون G را گرافی می‌گیریم که $j + 1$ یال دارد. در G یالی وجود دارد که اگر آن را حذف کنیم، گراف باقی‌ماندهٔ G' هم پذیرفتنی است (تمرین ـ مثلاً یالی که دو وجه مختلف را از هم جدا می‌کند این ویژگی را دارد). فرض کنید V'، E' و F' تعداد رأسها، یالها و وجه‌های گراف G' باشند. اکنون ببینیم که اعداد متناظر V، E و F از گراف G چه می‌توانند باشند.

گراف G از گراف G' با افزودن یک یال به‌دست آمده است. (فرایند ساخت G' را عکس می‌کنیم). اگر یال اضافه‌شده فقط از یک انتها به گراف G' وصل باشد (یال اضافه‌شده در شکل ۱۶ به‌صورت خط‌چین است)، تعداد وجه‌ها تغییر نمی‌کند، تعداد یالها یکی اضافه می‌شود و تعداد رأسها نیز یکی اضافه می‌شود. شکل ۱۶ را ببینید. پس $V = V' + 1$، $E = E' + 1$ و $F = F'$. چون بنابر فرض $V' - E' + F' = 2$، نتیجه می‌شود که $V - E + F = 2$، همان که می‌خواستیم. اگر یال اضافه شده از هر دو سر به گراف G' وصل باشد (یال اضافه شده در شکل ۱۷ به‌صورت خط‌چین است ـ دو حالت نشان داده شده است)، تعداد وجه‌ها یکی اضافه می‌شود، تعداد یالها یکی اضافه می‌شود و تعداد رأسها تغییر نمی‌کند. بنابراین $V = V'$، $E = E' + 1$ و $F = F' + 1$. چون بنابر فرض $V' - E' + F' = 2$، نتیجه می‌گیریم که $V - E + F = 2$.



شکل ۱۶





شکل ۱۷

چون حالت دیگری برای اضافه کردن یک یال وجود ندارد، گام (۲) در روند استقرایی برداشته شده است. استدلال کامل است. □

مسألهٔ ۴.۴.۱ فرض کنید k عددی طبیعی باشد. اگر $k + ۱$ نامه در k صندوق‌پستی توزیع شود، ثابت کنید که صندوقی حاوی دست‌کم دو نامه خواهد بود.

راه‌حل. اگرچه راه‌حلهای زیادی برای این مسأله وجود دارد، در اینجا صرفاً برای روشن ساختن روش استقرا از این روش استفاده می‌کنیم.

حکم $P(k)$ این است که «اگر $k + ۱$ نامه در k صندوق‌پستی توزیع شود، صندوقی وجود دارد که در آن دست‌کم دو نامه انداخته شده است».

در حالتی‌که $k = ۱$، توجه کنید که $k + ۱ = ۲$ نامه در $k = ۱$ صندوق‌پستی انداخته می‌شود. پس صندوقی (همان تنها صندوق) وجود دارد که حاوی دو نامه (درواقع همهٔ نامه‌ها) است.

اکنون فرض کنید $P(j)$ ثابت شده باشد. فرض کنید $(j + ۱) + ۱$ نامه در $j + ۱$ صندوق‌پستی توزیع شده باشد.

- اگر آخرین صندوق‌پستی خالی باشد، همهٔ نامه‌ها در j صندوق‌پستی اول انداخته شده‌اند. به‌خصوص، دست‌کم $j + ۱$ (درواقع $j + ۲$) نامه در j صندوق توزیع شده است. پس بنابر فرض استقرا یکی از j صندوق اول حاوی دست‌کم دو نامه است.
- اگر آخرین صندوق‌پستی حاوی دقیقاً یک نامه باشد، $j + ۱$ نامهٔ دیگر باید در j صندوق اول توزیع شده باشد. باز هم بنابر فرض استقرا یکی از j صندوق اول حاوی دست‌کم دو نامه است.
- اگر آخرین صندوق‌پستی حاوی دو یا چند نامه باشد، کار تمام است چون یک صندوق‌پستی (یعنی همان آخرین صندوق) حاوی دست‌کم دو نامه است.

به این ترتیب تحقیق گزاره کامل شده است. □

اصلی که درصورت مسألهٔ قبل بیان شده است، اهمیتی بنیادی در ریاضیات دارد. معمولاً این اصل را «اصل لانه‌کبوتری» می‌نامیم. نام اولیهٔ این اصل «اصل بستن کشوهای دیریشله» بوده است، چون این اصل را اولین بار پیتر گوستاو لیون دیریشله، ریاضیدان آلمانی (۱۸۵۹-۱۸۰۵)، فرمولبندی کرد. در بخش بعد استدلال به‌وسیلهٔ تناقض را می‌آموزید. سپس می‌توانید به‌عنوان تمرین تحقیق کنید که درستی اصل لانه‌کبوتری را به‌آسانی می‌توان با روش تناقض تحقیق کرد.

مسألهٔ پیکارجوی ۵.۴.۱ گروهی برای شرکت در یک میهمانی دور هم جمع شده‌اند. این افراد با یکدیگر دست می‌دهند. ثابت کنید تعداد افرادی که به تعداد دفعات فردی با دیگران دست می‌دهند زوج است.

مسألهٔ ۶.۴.۱ فرض کنید شش نفر در اتاقی باشند. توضیح دهید چرا یا سه نفر از این افراد هستند که هر یک از آنها دو نفر دیگر را می‌شناسد، یا سه نفر از این افراد هستند که هیچ‌یک از آنها دو نفر دیگر را نمی‌شناسد.

راه‌حل. البته فرض می‌کنیم که اگر A شخص B را بشناسد، B نیز A را می‌شناسد. یکی از این افراد را J می‌نامیم. J یا سه نفر از پنج نفر دیگر را می‌شناسد، یا هیچ سه نفری از آنها را نمی‌شناسد. فرض کنید حالت اول روی دهد. مثلاً J با H، M و L آشناست. اکنون اگر دو نفر از این افراد یکدیگر را بشناسند (مثلاً H با L آشنا باشد)، سه‌تایی $\{J, H, L\}$ سه نفر هستند که هر دو نفر از آنها یکدیگر را می‌شناسند. اما اگر هیچ دو نفری از این افراد یکدیگر را نشناسد، $\{H, M, L\}$ سه نفر هستند که هیچ‌یک از آنها دیگری را نمی‌شناسد. □

مسألهٔ پیکارجوی ۷.۴.۱ مسألهٔ قبل را می‌توانیم به‌صورت زیر تعبیر کنیم:

> شش نقطه روی یک قطعه کاغذ دارید. پانزده جفت نقطه می‌توانیم انتخاب کنیم. هر یک از این جفت نقطه‌ها را یا با یک پاره‌خط قرمز یا با یک پاره‌خط آبی به‌هم وصل می‌کنیم. ثابت کنید یا مثلثی با سه ضلع آبی وجود دارد یا مثلثی با سه ضلع قرمز.

توضیح دهید که چرا این فرمولبندی با مسألهٔ قبل هم‌ارز است.

مسألهٔ پیکارجوی ۸.۴.۱ به آخرین مسألهٔ حل‌شده و مسألهٔ پیکارجوی قبلی توجه کنید. اکنون فرض کنید پاره‌خطهایی که نقطه‌ها را به‌وسیلهٔ آنها به‌هم وصل می‌کنیم به سه رنگ قرمز، آبی و زرد باشند. دراین صورت، اگر شش نقطه داشته باشیم لزوماً مثلثی با سه ضلع همرنگ تشکیل نمی‌شود. توضیح دهید که چرا این‌طور است.

درواقع، بگویید چند نقطه لازم است تا درصورتی‌که هر جفت نقطه را با پاره‌خطی به رنگ قرمز یا آبی یا زرد به هم وصل کنیم، مطمئن باشیم که مثلثی با سه ضلع همرنگ ایجاد می‌شود.

مسألهٔ پیکارجوی ۹.۴.۱ تعمیمی از مسألهٔ پیکارجوی قبل فرمولبندی کنید. فرض کنید k رنگ داشته باشید. چند نقطه لازم است تا تضمین شود که فرایند وصل کردن هر جفت نقطهٔ ممکن به یکدیگر با پاره‌خطی به یکی از این رنگها مثلثی با سه ضلع همرنگ ایجاد می‌کند؟

۵.۱ مسأله‌های منطقی

منطق در هر مسأله‌ای که حل می‌کنیم نقش دارد. اما بعضی از مسأله‌ها ماهیت هندسی دارند، مسأله‌های دیگری ماهیت شمارشی دارند، و برخی دیگر تحلیلی‌اند. در این بخش منطق را به‌عنوان

ابزار اصلی هم در فرمولبندی مسأله‌ها و هم در حل مسأله‌ها به‌کار می‌گیریم. کار خود را با مسأله‌ای کلاسیک از نوع مسأله‌های «راستگو و دروغگو» آغاز می‌کنیم.

مسألهٔ ۱.۵.۱ در جزیره‌ای هستید که ساکنانش دو دسته‌اند: راستگویان و دروغگویان. وقتی سؤالی از جزیره‌نشینان می‌کنید که پاسخش بله یا خیر است، راستگویان همیشه راست و دروغگویان همیشه دروغ پاسخ می‌دهند. هیچ روش بصری برای تشخیص راستگویان از دروغگویان وجود ندارد. آیا می‌توانید تنها با یک‌بار پرسیدن سؤالی از یکی از جزیره‌نشینان تعیین کنید که مخاطب شما راستگوست یا دروغگو؟ این سؤال چیست؟

راه‌حل. اگر سؤال مستقیمی مانند «آیا شما راستگویید؟» بپرسید، راستگو پاسخ می‌دهد «بله» و دروغگو (که باید دروغ بگوید) نیز می‌گوید «بله». اگر بپرسید «آیا شما دروغگویید؟» باز هم نتیجهٔ مشابهی می‌گیرید. پس سؤالی مقدماتی و مستقیم مبنایی برای تمییز دادن افراد دو دسته نمی‌شود.

بنابراین، باید سؤالی مرکب، مانند سؤالی شرطی، یا شامل «یا»، یا شامل «و» کنید. یکی از چیزهایی که در هر دورهٔ مقدماتی منطق می‌آموزید این است که هر پرسشی را که به شکل یکی از این سه نوع باشد، می‌توان به شکل هر یک از دو نوع دیگر فرمولبندی کرد ([KRA1] را ببینید). در اینجا سؤالی به شکل «اگر ـ آنگاه» فرمولبندی می‌کنیم که مقصود ما را برآورد.

سؤالی که می‌خواهیم بکنیم ممکن است به شکل «اگر اکنون باران می‌بارد، آنگاه به این سؤال که . . . چه پاسخ می‌دهید؟» یا «اگر شما ادیب‌اید، آنگاه به این سؤال که . . . چه پاسخ می‌دهید؟» باشد. اما روشن است که این شرطها ارتباطی با موضوع مورد بررسی ما ندارند.

احتمالاً سؤالی به شکل «اگر راستگو بودید، آنگاه به این سؤال که . . . چه پاسخ می‌دادید؟» بیشتر به موضوع مربوط است. به همین ترتیب، بخش دوم سؤال نیز باید ارتباطی با مسأله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم داشته باشد. اکنون سؤال زیر را بررسی می‌کنیم:

اگر شما راستگویید، آنگاه به سؤال «آیا شما دروغگویید؟» چه پاسخ می‌دهید؟

اکنون پاسخهایی را که دو دستهٔ جزیره‌نشینان به این سؤال خواهند داد تحلیل می‌کنیم.

روشن است که راستگو به سؤال «آیا شما دروغگویید؟» پاسخ «نه» می‌دهد. پس اگر سؤال دست‌روکن بالا را از یک راستگو بپرسید، صادقانه پاسخ می‌دهد «نه».

دروغگو هم به همان روشنی راستگوها فکر می‌کند. دروغگو می‌داند که راستگو در پاسخ به این سؤال که دروغگوست یا نه، می‌گوید «نه». دروغگو باید دروغ بگوید. پس او در پاسخ می‌گوید «بله».

پس سؤالی یافته‌ایم که در پاسخ به آن، راستگو همیشه می‌گوید «نه» و دروغگو همیشه می‌گوید «بله». این سؤال بی‌شک وسیله‌ای است برای تمییز دادن راستگویان از دروغگویان، و پاسخ مسألهٔ ماست. □

تغییر دادن سؤالی که در مسألهٔ قبل فرمولبندی کردیم و دیدن اینکه نتیجه چه می‌شود خالی از

تفریح نیست. مثلاً این سؤال را بررسی کنید: «اگر شما دروغگویید، به این سؤال که «آیا شما راستگویید؟» چه پاسخی می‌دهید؟». گونه‌های دیگری از این سؤال را نیز می‌توانید امتحان کنید. اگر بپرسید «آیا شما اردک‌اید؟» چه روی می‌دهد؟

مسألهٔ پیکارجوی بعدی از همین نوع است و شما را به پیکار می‌طلبد.

مسألهٔ پیکارجوی ۲.۵.۱ در جزیرهٔ راستگویان و دروغگویان هستید. دو نفر به شما نزدیک می‌شوند. آنها را A و B بنامید. آیا می‌توانید تنها با یک‌بار پرسیدن سؤالی از A که پاسخ آن بله یا نه باشد، تعیین کنید که B راستگوست یا دروغگو؟

مسألهٔ پیکارجوی ۳.۵.۱ ساکنان جزیره‌ای سه دسته‌اند: راستگویان، دروغگویان و کسانی که گاهی راست می‌گویند و گاهی دروغ. با مطالعهٔ ظاهر این افراد نمی‌توان تشخیص داد که هر یک از آنها از کدام دسته است. اگر یکی از ساکنان جزیره را ملاقات کنید، آیا می‌توانید تنها با یک‌بار پرسیدن از او تعیین کنید که از کدام دسته است؟

مسألهٔ بعدی در چند سال اخیر محبوبیت زیادی یافته است. این مسأله از مسابقه‌ای تلویزیونی الهام گرفته شده است. ماهیت مسابقه (با کمی ساده‌سازی) به‌صورت زیر است. مسابقه‌دهنده در برابر سه درِ بسته قرار می‌گیرد. او می‌داند که پشت یکی از درها جایزه‌ای بسیار ارزشمند، مثلاً اتوموبیلی پرزرق و برق، قرار دارد و پشت دو در دیگر جایزه‌هایی کم‌ارزش، مثلاً یک بز، است. مسابقه‌دهنده باید یکی از درها را (بی‌هدف) انتخاب کند؛ جایزه‌ای که پشت درِ انتخاب شده است به او تعلق می‌گیرد. اما مجری مسابقهٔ تلویزیونی سر به‌سر مسابقه‌دهنده می‌گذارد و با چرب‌زبانی او را تطمیع و ترغیب می‌کند که تصمیمش را در مورد درِ انتخاب شده عوض کند.

مسأله‌ای که به مسألهٔ «مونتی‌هال» مشهور شده است این است: مسابقه‌دهنده دری را انتخاب می‌کند. برای روشن بودن استدلال فرض کنید «درِ شمارهٔ ۳» را انتخاب کرده است. پیش از اینکه در باز شود و مسابقه‌دهنده جایزهٔ پشت آن را ببیند، مجری می‌گوید: «جایزهٔ پشت یکی از درها را به شما نشان می‌دهم.» دری باز می‌شود و پشت آن بزی ایستاده است. سپس مجری می‌گوید «می‌خواهید تصمیم خود را در مورد درِ انتخاب‌شده عوض کنید؟» وضع بسیار جالبی است.

روشن است که مسابقه‌دهنده دری را که مجری باز کرده است انتخاب نمی‌کند، چون می‌داند که جایزهٔ پشت در بز است. پس موضوع این است که مسابقه‌دهنده بر تصمیم خود باقی بماند، یا اینکه درِ بستهٔ دیگر (دری که مسابقه‌دهنده قبلاً انتخاب نکرده و مجری هم آن را باز نکرده است) را انتخاب کند؟ رهیافتی طبیعی این است که بگوییم پشت یکی از دو در بسته بز است و پشت در دیگر اتوموبیل. پس احتمال اینکه پشت هر یک از دو درِ بسته بز باشد یکی است و لزومی ندارد که مسابقه‌دهنده تصمیم خود را عوض کند. اما در این رهیافت طبیعی این عامل که دو بز از هم متمایزند به‌حساب نیامده است. تحلیل دقیقتری از حالتها در راه‌حل زیر آمده است، و به نتیجهٔ شگفت‌انگیزی می‌انجامد.

مسألهٔ ۴.۵.۱ مسألهٔ مونتی‌هال را با استفاده از تحلیل حالت‌به‌حالت حل کنید.

راه‌حل. بزها را با G_1 و G_2 (بز اول و بز دوم) و اتوموبیل را با C نشان می‌دهیم. برای ساده‌سازی برهان، فرض می‌کنیم که مسابقه‌دهنده همیشه ابتدا درِ شمارهٔ ۳ را انتخاب کند. اما نمی‌توانیم فرض کنیم که مجری همیشه درِ شمارهٔ ۱ را باز می‌کند (ممکن است بزی پشت در شمارهٔ ۲ باشد). پس حالتهای زیر را باید درنظر بگیریم:

در ۱	در ۲	در ۳
G_1	G_2	C
G_2	G_1	C
G_1	C	G_2
G_2	C	G_1
C	G_1	G_2
C	G_2	G_1

همان‌طور که در بخش ۴.۱ آموختیم، $6 = 3!$ جایگشت از سه شیء وجود دارد. به همین دلیل است که جدول بالا شش ردیف دارد.

۱. در حالت اول مجری بز پشت یکی از درهای شمارهٔ ۱ یا ۲ را به مسابقه‌دهنده نشان می‌دهد. به سود مسابقه‌دهنده نیست که تصمیم خود را عوض کند. پس جواب در این حالت منفی است و برای این حال ن ثبت می‌کنیم.

۲. حالت دوم شبیه حالت اول است و تغییر تصمیم به سود مسابقه‌دهنده نیست؛ برای این حالت نیز ن ثبت می‌کنیم.

۳. در حالت سوم مجری بزی را پشت در شمارهٔ ۱ به مسابقه‌دهنده نشان می‌دهد و به سود مسابقه‌دهنده است که تصمیم خود را عوض کند. پس جواب مثبت است و برای این حالت ب ثبت می‌کنیم.

۴. حالت چهارم شبیه حالت سوم است، و به سود مسابقه‌دهنده است که تصمیم خود را عوض کند؛ برای این حالت نیز ب ثبت می‌کنیم.

۵. در حالت پنجم مجری بزی را پشت در شمارهٔ ۲ به مسابقه‌دهنده نشان می‌دهد و به سود مسابقه‌دهنده است که تصمیم خود را عوض کند. برای این حالت ب ثبت می‌کنیم.

۶. حالت ششم مانند حالت پنجم است، و به سود مسابقه‌دهنده است که تصمیم خود را عوض کند؛ برای این حالت نیز ب ثبت می‌کنیم.

ملاحظه کنید که نتیجهٔ تحلیل حالت به حالت چهار ب (بله) و دو ن (نه) است. پس بعد از اینکه مجری بز را نشان داد، شانس اینکه مسابقه‌دهنده با تغییر تصمیم خود ببرد دو به یک است. □

مسألهٔ قبل ماهیتاً مسأله‌ای احتمالاتی بود. بسیاری از مسأله‌های احتمال مقدماتی را می‌توان با استدلالهای شمارشی یا حالت‌به‌حالت حل کرد. در فصلهای ۳ و ۸ تجربهٔ بیشتری در حل مسأله‌های احتمالات کسب می‌کنید.

مسألهٔ ۵.۵.۱ تعداد بزرگسالان بیشتر از تعداد پسران، تعداد پسران بیشتر از تعداد دختران، و تعداد دختران بیشتر از تعداد خانواده‌هاست. اگر هیچ خانواده‌ای کمتر از ۳ فرزند نداشته باشد، کمترین تعداد ممکن خانواده‌ها چقدر است؟

راه‌حل. اگر دقیقاً یک خانواده وجود داشته باشد، باید دست‌کم دو دختر، دست‌کم سه پسر و دست‌کم چهار بزرگسال وجود داشته باشد. اما چهار بزرگسال دو خانواده تشکیل می‌دهند و این تناقض است.

اگر دقیقاً دو خانواده وجود داشته باشد، دست‌کم سه دختر، دست‌کم چهار پسر و دست‌کم پنج بزرگسال داریم. اما نمی‌شود پنج بزرگسال فقط از دو خانواده باشند؛ باید دست‌کم سه خانواده داشته باشیم، و این تناقض است.

اگر دقیقاً سه خانواده وجود داشته باشد، دست‌کم چهار دختر، دست‌کم پنج پسر و دست‌کم شش بزرگسال وجود دارد، و این تناقض نیست. پس جواب مسأله ممکن است سه خانواده باشد.

درواقع فرض کنید سه زوج زن و شوهر وجود داشته باشد. زوج اول دو دختر و یک پسر، زوج دوم دو دختر و یک پسر و زوج سوم سه پسر دارند. دراین‌صورت، شش بزرگسال، پنج پسر، چهار دختر و سه خانواده وجود دارد. همهٔ شرایط مسأله برقرارند.

پاسخ مسأله این است که سه خانواده کمترین تعداد ممکن است. □

روش حل مسألهٔ قبل را روش «اِفنا» می‌نامیم. اگر جواب مسأله مثلاً ۳۵۷ بود، این روش چندان کارساز نبود، چون رسیدن به این جواب وقت زیادی می‌گرفت. به هر حال، روش اِفنا ابزاری مهم و حساب‌شده است که باید در انبان خود داشته باشیم.

مسألهٔ ۶.۵.۱ توضیح دهید که چرا بی‌شمار عدد اول وجود دارد.

راه‌حل. به‌یاد آورید که عدد اول عددی طبیعی غیر از ۱ است که مقسوم‌علیهی غیر از ۱ و خودش ندارد. نخستین چند عدد اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹ و ۲۳ هستند. هر عدد طبیعی بر عددی اول بخش‌پذیر است؛ درواقع، هر عدد طبیعی را به‌طور یکتا می‌توان به عاملهای اول تجزیه کرد. این نتیجه مضمون قضیهٔ بنیادی حساب است.

مسأله‌ای را که پیش رو داریم به روش برهان با رسیدن به تناقض حل می‌کنیم. فرض کنید فقط تعدادی متناهی عدد اول در جهان داشته باشیم. این عددهای اول را p_1، p_2، ... و p_k بنامید. عدد

$$N = (p_1 p_2 \cdots p_k) + 1$$

را درنظر بگیرید (حاصل‌ضرب همهٔ این عددهای اول به‌علاوهٔ ۱). اکنون، همان‌طور که در بند قبل گفتیم، N باید بر عددی اول بخش‌پذیر باشد. اما N بر p_1 بخش‌پذیر نیست، چون باقیماندهٔ تقسیم N بر p_1 برابر ۱ است. به همین ترتیب N بر p_2 بخش‌پذیر نیست، چون باقیماندهٔ تقسیم N بر p_2 نیز ۱ است. درواقع، می‌بینیم که N بر هیچ‌یک از عددهای اول p_1 ، p_2، ... و p_k بخش‌پذیر نیست. اما اینها را تنها عددهای اول در عالم فرض کردیم. با وجود این N باید بر عددی اول بخش‌پذیر باشد! این تناقض است.

نتیجه می‌گیریم که ممکن نیست تعدادی متناهی عدد اول داشته باشیم. باید بی‌شمار عدد اول داشته باشیم. □

«برهان با رسیدن به تناقض» ابزاری ساده اما توانمند در ریاضیات و استدلال تحلیلی است. طرح این روش به‌صورت زیر است: می‌خواهیم حکم P را ثابت کنیم. حکم P یا درست است یا نادرست. هیچ حالت «بینابینی» یا «صبر کنیم تا ببینیم» وجود ندارد؛ یا این است یا آن (برای مطالعهٔ بیشتر در این مورد [KRA1] را ببینید). راه‌کار در روش «برهان با رسیدن به تناقض» این است که امکان نادرست بودن P را حذف کنیم. پس فرض می‌کنیم که P نادرست باشد و با استدلال نشان می‌دهیم که این فرض پذیرفتنی نیست (به تناقض منجر می‌شود). تنها نتیجهٔ ممکن درستی P است. مسألهٔ ۶.۵.۱ نحوهٔ استفاده از این روش استدلال را روشن می‌کند.

برهان بی‌شمار بودن عددهای اول را معمولاً به اقلیدس نسبت می‌دهند؛ قدمت این برهان به ۲۰۰۰ سال می‌رسد. این یکی از اولین نمونه‌های برهان با رسیدن به تناقض بوده است. اما شگفت‌انگیز است که برهان با رسیدن به تناقض تا قرن بیستم ابزار رایجی در ریاضیات نشد.

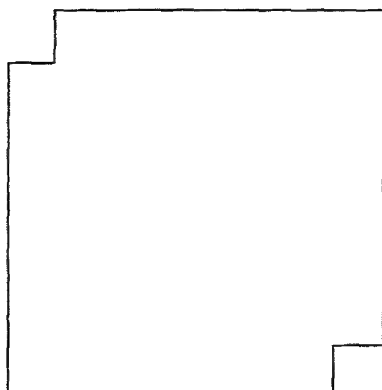
۶.۱ موضوع زوجیت

مقدماتی‌ترین مثال زوجیت «فرد بودن در برابر زوج بودن» است، اما بسیاری مثالهای دیگر نیز هست. جنبه‌های گوناگون زوجیت را در این بخش بررسی می‌کنیم.

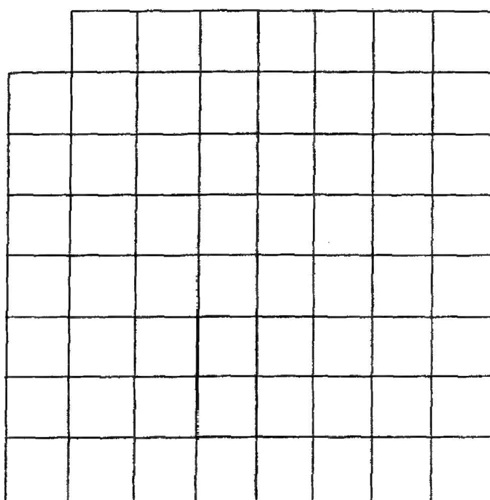
مسألهٔ ۱.۶.۱ کف حمامی به مساحت ۸ × ۸ فوت مربع را می‌خواهیم موزاییک کنیم. هر موزاییک ۱ × ۲ فوت مربع است. در دو گوشهٔ روبه‌روی هم حمام قفسه‌هایی هست که هر کدام ۱ × ۱ فوت مربع از کف حمام را گرفته است. این وضعیت را در شکل ۱۸ می‌بینید. [در شکل ۱۹ راهی برای تقسیم کف حمام به مربعهای ۱ × ۱ فوت مربع را می‌بینید.]

چگونه می‌توان کف حمام را موزاییک کرد؟

راه‌حل. مساحت سطحی که باید موزاییک شود ۸ × ۸ فوت مربع منهای ۲ فوت مربع است. به بیان دیگر، باید سطحی به مساحت ۶۲ فوت مربع را موزاییک کنیم. پس ۳۱ موزاییک لازم داریم.



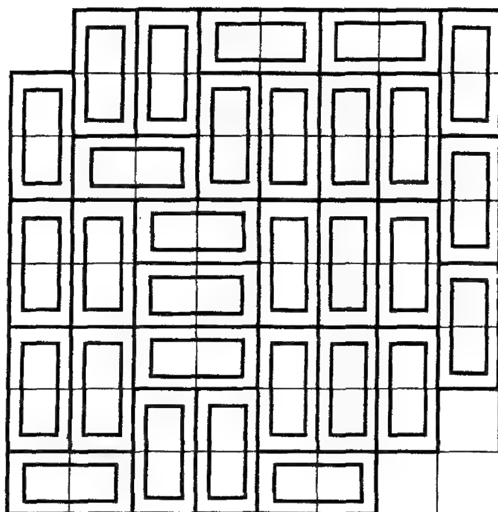
شکل۱۸



شکل۱۹

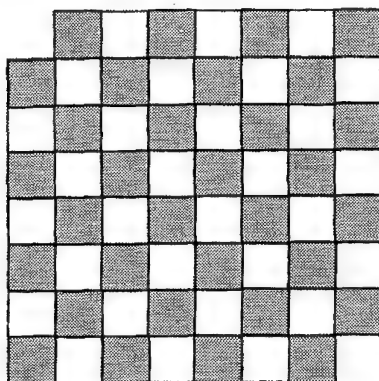
در شکل ۲۰ آرایشی ممکن برای موزاییکها را می‌بینید؛ توجه کنید که با این آرایش نمی‌توان کلِّ کف حمام را پوشاند. دو مربع باقی می‌مانند (در گوشهٔ پایین و سمت راست شکل)، و آنها را نمی‌توان با یک موزاییک پوشاند. کوششهای دیگر نیز با شکست مواجه می‌شوند. (می‌توانید روی صفحهٔ شطرنج امتحان کنید؛ سکه‌هایی را روی مربعهای دو گوشهٔ روبه‌روی هم قرار دهید که نشان دهند موزاییکها نباید این مربعها را بپوشانند.)

به‌نظر می‌رسد کاسه‌ای زیر نیمکاسه است. شاید کف حمام را نتوان موزاییک کرد. اما چگونه می‌توانیم به‌طور قانع‌کننده‌ای استدلال کنیم که چرا نمی‌توان این کار را انجام داد؟ به صدها راه می‌توانیم بکوشیم که کف حمام را موزاییک کنیم و بررسی همهٔ موزاییک‌کاریهای ممکن ناخوشایند به‌نظر می‌رسد. ایده‌ای که اکنون مطرح می‌کنیم ـ و از مفهوم زوجیت الهام گرفته شده است ـ رنگ کردن کف حمام



شکل ۲۰

مانند صفحهٔ شطرنج است. شکل ۲۱ را ببینید. توجه کنید که وقتی یک موزاییک ۱ × ۲ فوت مربع را روی کف حمام قرار می‌دهیم، دو مربع مجاور را می‌پوشانیم. یکی از این مربعها سیاه و دیگری سفید است. پس اگر دو موزاییک روی کف حمام قرار دهیم، دو مربع سیاه و دو مربع سفید را می‌پوشانیم.



شکل ۲۱

به‌طورکلی، اگر k موزاییک را روی کف حمام قرار دهیم، k مربع سیاه و k مربع سفید را می‌پوشانیم. اما کف حمامی که می‌خواهیم موزاییک کنیم ۳۲ مربع سیاه و ۳۰ مربع سفید دارد. چون تعداد مربعهای سیاهی که با موزاییکها پوشانده می‌شوند همیشه برابر تعداد مربعهای سفیدی است که با آن موزاییکها پوشانده می‌شوند، مشکلی حل‌نشدنی داریم. کف حمام را با این موزاییکها نمی‌توان پوشاند! □

در مسألهٔ قبل از زوجیت در رنگ کردن کف استفاده کردیم. حل این مسأله بدون استفاده از زوجیت به استدلال ترکیبیاتی پیچیده‌ای نیاز دارد.

مسألهٔ ۲.۶.۱ ظرفی به گنجایش ۶ لیتر و ظرف دیگری به گنجایش ۴ لیتر داریم. این ظرفها را با فروکردن در آب رودخانه پر می‌کنیم. چگونه می‌توانیم فقط با استفاده از همین دو ظرف در یکی از آنها ۳ لیتر آب بریزیم؟

راه‌حل. چیزی که در صورت مسأله به‌طور ضمنی بیان شده است و اکنون صریحاً بیان می‌کنیم این است که تنها حرکات مجاز عبارت‌اند از (یک) پر کردن یک ظرف، (دو) خالی کردن یک ظرف، (سه) ریختن محتوای یک ظرف در ظرف دیگر. با این تفاصیل، عملیات پر و خالی کردن ظرفها متناظر با جمع و تفریق مضربهای ۴ و ۶ است. جمع و تفریق عددهای زوج همیشه حاصل زوج دارد. پس هیچ راهی برای به‌دست آوردن عدد ۳ نیست.

مسأله را نمی‌توان حل کرد. □

مسألهٔ پیکارجوی ۳.۶.۱ اکنون فرض کنید که ظرفی با گنجایش ۹ لیتر و ظرفی با گنجایش ۴ لیتر دارید. چگونه می‌توانید دقیقاً ۶ لیتر آب در ظرف بزرگتر بریزید؟

در دو مثال دیدیم که چگونه با استفاده از مفهوم زوجیت می‌توان ثابت کرد که مسأله‌ای قابل حل نیست. اکنون مثالی را بررسی می‌کنیم که در آن با استفاده از زوجیت جواب مثبت برای مسأله می‌یابیم.

مسألهٔ ۴.۶.۱ **(ماشِک)** چندوجهی‌یی با ۱۹۸۱ رأس مجسم کنید. [این کار آنقدر که به‌نظر می‌رسد دشوار نیست. کافی است ۱۹۸۱ نقطه روی کرهٔ واحد در فضای سه‌بعدی درنظر بگیرید. سپس این نقطه‌ها را با پاره‌خطهایی به‌گونه‌ای بدیهی به‌هم وصل کنید تا چندوجهی حاصل شود.]

تصور کنید که به هر یال بار الکتریکی ۱+ یا ۱− نسبت دهیم. توضیح دهید که چرا باید رأسی داشته باشیم که حاصل‌ضرب بارهای همهٔ یالهایی که در آن رأس به هم می‌رسند ۱+ باشد.

راه‌حل. فرض کنید که حاصل‌ضربهای متناظر با همهٔ رأسها را در هم ضرب کنیم. دراین‌صورت هر یال را دوبار به حساب آورده‌ایم (چون هر یال دو رأس در دو انتها دارد)؛ پس هر ۱+ دو بار و هر ۱− نیز دو بار به‌حساب آمده است. بنابراین حاصل‌ضرب ۱+ است.

اکنون توجه می‌کنیم که تعداد رأسها فرد است. پس ممکن نیست که حاصل‌ضرب مربوط به همهٔ رأسها ۱− باشد (چون حاصل‌ضرب تعدادی فرد ۱− برابر ۱− است). بنابراین، دست‌کم حاصل‌ضرب مربوط به یک رأس باید ۱+ باشد. □

مسألهٔ ۵.۶.۱ گله‌ای گوسفند به ناگاه وارد مزرعه‌ای می‌شود که کارگران در آن مشغول به کارند. خیلی زود کارگران خود را در احاطهٔ گوسفندان می‌یابند. با شمارشی سریع ۱۲۰ سر و ۳۰۰ پا می‌بینیم. در مزرعه چند رأس گوسفند و چند نفر کارگر هست؟

راه‌حل. تعداد کارگران را با p و تعداد گوسفندان را با c نشان می‌دهیم. تعداد کارگران و گوسفندان با هم $c+p$ و تعداد پاها $4c+2p$ است (چون هر گوسفند ۴پا و هر انسان ۲پا دارد). پس

$$c+p=120$$

$$4c+2p=200$$

این دستگاه دو معادله را حل می‌کنیم و جواب $c=30$ و $p=90$ را می‌یابیم. □

مسألهٔ پیکارجوی ۶.۶.۱ در مسألهٔ ۵.۶.۱ فرض کنید از قبل می‌دانسته‌اید که ۱۰ تا از گوسفندان گله ناقص‌اند و هر کدام ۳ پا دارند، ولی باز هم با شمارش سریع ۱۲۰ سر و ۳۰۰ پا ببینید. چند گوسفند و چند کارگر در مزرعه هست؟

مسألهٔ ۷.۶.۱ (هالموس) در خانهٔ آقای شلوبوکینز مهمانی برپاست. غیر از آقای شلوبوکینز و پسرش که مهماندارند، چهار مرد هر یک با پسر خود حضور دارند. برخی از این افراد، ولی نه همهٔ آنها، دوبه‌دو با هم دست می‌دهند. هیچ‌کس با دیگری دوبار دست نمی‌دهد و هیچ‌کس با پسر خود دست نمی‌دهد. آقای شلوبوکینز و پسرش هر یک با چند نفر دست می‌دهند.

در پایان مهمانی آقای شلوبوکینز از هر یک از حاضران (غیر از خودش) می‌پرسد که با چند نفر دست داده است. پاسخ هیچ دو نفری از حاضران یکی نیست. تعیین کنید که پسر آقای شلوبوکینز با چند نفر بایستی دست داده باشد.

راه‌حل. آقای شلوبوکینز را با S و چهار مرد دیگر را با A، B، C و D نشان می‌دهیم. هیچ‌کس ۹ بار دست نداده است، چون هیچ‌کس با پسرش دست نداده است. بنابراین عددهای مختلفی که این ۹ نفر (غیر از آقای شلوبوکینز) بیان کرده‌اند باید عددهای ۰ تا ۸ باشند.

یک نفر ۸ بار دست داده است. فرض کنید این شخص آقای A باشد. دراین‌صورت پسر A چند بار دست داده است؟ B، C، D و S و پسرانشان باید با آقای A دست داده باشند تا آقای A با ۸ نفر دست داده باشد. پس B، C، D و S و پسرانشان دست‌کم یک‌بار دست داده‌اند. اما یک نفر با هیچ‌کس دست نداده است. این شخص باید پسر آقای A باشد.

اکنون آقای A و پسرش را کنار می‌گذاریم. یک نفر دقیقاً ۷ بار دست داده است. فرض کنید این شخص پسر آقای B باشد. از قبل می‌دانستیم که پسر آقای B با آقای A دست داده است. در ضمن، با پسر آقای A دست نداده است، چون هیچ‌کس با پسر آقای A دست نداده است. پس پسر آقای B برای اینکه ۷ بار دست داده باشد باید با C، D، S و سه پسر آنها دست داده باشد. اما یک نفر باید یک‌بار دست داده باشد (اکنون C، D، S و پسرانشان دست‌کم دوبار دست داده‌اند، چون هر یک از آنها با آقای A و همچنین با پسر آقای B دست داده است). این شخص باید آقای B باشد.

اگر استدلال را به همین شیوه ادامه دهیم می‌بینیم شخصی که ۶ بار دست داده است باید پسر یا پدر شخصی باشد که ۲ بار دست داده است؛ و شخصی که ۵ بار دست داده است باید پسر یا پدر شخصی باشد که ۳ بار دست داده است. دراین صورت، تنها پسر آقای شلوبوکینز باقی می‌ماند که باید ۴ بار دست داده باشد ـ چهار تنها عدد باقی‌مانده است (توجه کنید ۴ تنها عددی است که نمی‌توان آن را با عدد دیگری جفت کرد).

پاسخ مسأله این است که پسر آقای شلوبوکینز ۴ بار دست داده است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۸.۶.۱ به ابتدای راه‌حل مسألهٔ قبل توجه کنید. چگونه می‌توانیم مطمئن باشیم که پسر آقای شلوبوکینز ۸ بار دست نداده است؟

مسألهٔ ۹.۶.۱ گوسفندی هنگام چرا در طول یک روز چراگاهی را از علف پاک می‌کند. گاوی همان چراگاه را در طول نصف روز از علف پاک می‌کند. اگر این گوسفند و گاو با هم به چرا مشغول شوند چقدر طول می‌کشد تا چراگاه از علف پاک شود؟

راه‌حل. بنابر اطلاعاتی که در مسأله داده شده است، گاو مثل دو گوسفند است (البته در مورد خوردن علفهای چراگاه). پس گاو و گوسفند با هم مثل سه گوسفند علف می‌خورند. پس چراگاه را در مدت یک‌سوم روز از علف پاک می‌کنند. □

مسألهٔ پیکارجوی ۱۰.۶.۱ گوزن افریقایی چراگاهی را در مدت دو روز از علف پاک می‌کند. لاما در مدت سه روز این چراگاه را از علف پاک می‌کند. بزی همین چراگاه را در مدت ۴ روز از علف پاک می‌کند. چه مدت طول می‌کشد که این سه حیوان با هم چراگاه را از علف پاک کنند؟

مسألهٔ ۱۱.۶.۱ آخرین رقم عدد $۳^{۴۷۹۸}$ چیست؟

راه‌حل. آشکارا محاسبهٔ این عدد آخرین کاری است که به فکرش می‌افتیم. برای محاسبهٔ این عدد حتی با نرم‌افزاری چون مَتِمَتیکا با مشکل کمبود حافظه روبه‌رو می‌شویم. پس به‌جای این کار بهتر است کمی فکر کنیم.

توجه کنید که $۳ = ۳^۱$، $۹ = ۳^۲$، $۲۷ = ۳^۳$، $۸۱ = ۳^۴$، $۲۴۳ = ۳^۵$، و الی آخر. رقمهای آخر ممکن این توانها ۳، ۹، ۷ و ۱ است؛ این الگو پیوسته تکرار می‌شود. در این فهرست ۱ خاص است، چون $۱ = ۱ \times ۱$، و رقم ۱ وقتی حاصل می‌شود که سه را به توان چهار برسانیم. پس خوب است بنویسیم

$$۳^{۴۷۹۸} = [۳^۴]^{۱۱۹۹} \times ۳^۲$$

در اینجا فقط نمای ۴۷۹۸ را بر ۴ تقسیم کرده‌ایم، و خارج‌قسمت ۱۱۹۹ و باقیمانده ۲ شده است. برای نوشتن عبارت بالا از قانونهای مقدماتی نماها استفاده کرده‌ایم.

اکنون، بنابر چیزی که گفتیم، عدد درون کروشه به ۱ ختم می‌شود. اگر این عدد را به توان ۱۱۹۹ برسانیم، باز هم عدد حاصل به ۱ ختم می‌شود. از طرفی دیگر $۳^۲$ برابر ۹ است. نتیجه می‌گیریم که $۳^{۴۷۹۸}$ به ۹ ختم می‌شود. □

مسألهٔ پیکارجوی ۱.۶.۱۲ آخرین رقم عدد $۷^{۶۵۴۳۲}$ چیست؟

مسألهٔ پیکارجوی ۱.۶.۱۳ (این مسأله دشوار است) آخرین سه رقم عدد $۳^{۴۷۹۸}$ چیست؟

تمرین فصل ۱

۱. ثابت کنید هر توان با نمای طبیعی از $\sqrt{۲} - ۱$ را می‌توان به شکل $\sqrt{N} - \sqrt{N - ۱}$ نوشت که در آن N عددی طبیعی باشد. [راهنمایی: از استقرا استفاده کنید. حالتهایی را که نمای توانهای $\sqrt{۲} - ۱$ زوج است جدا از حالتهایی که نمای توانهای $\sqrt{۲} - ۱$ فرد است بررسی کنید.]

۲. مجموع اولین k عدد طبیعی فرد را حساب کنید.

۳. مجموع مکعبهای اولین k عدد طبیعی را حساب کنید.

۴. ثابت کنید در هر گردایه‌ای از ۵۲ عدد طبیعی متمایز، دو عدد متمایز وجود دارد که مجموع یا تفاضل آنها بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

۵. همهٔ جفتها از عددهای صحیح مانند m و n را بیابید به‌طوری‌که $m \times n = m + n$.

۶. عدد !۲۰۰ به چند صفر ختم می‌شود؟

۷. عدد $۲^{۳۰۰} \times ۵^{۶۰۰} \times ۴^{۴۰۰}$ به چند صفر ختم می‌شود؟

۸. گروهی از افراد در اتاقی جمع شده‌اند. بعضی از آنها با دیگران دست می‌دهند. بعضی دیگر با کسی دست نمی‌دهند. در مورد تعداد کسانی که با تعدادی زوج از افراد حاضر در اتاق دست داده‌اند چه می‌توانید بگویید؟

۹. کتابی ۱۰۰ صفحه دارد که از ۱ تا ۱۰۰ شماره خورده‌اند. چند رقم برای شماره‌گذاری صفحه‌های این کتاب به‌کار رفته است؟

۱۰. چند عدد طبیعی مانند k با این ویژگی وجود دارد که $k!$ به صفر ختم نمی‌شود؟

۱۱. عدد k مضربی از ۹ است. رقمهای این عدد را با هم جمع می‌کنیم. اگر حاصل بیش از یک رقم داشته باشد، این رقمها را نیز با هم جمع می‌کنیم. آنقدر به جمع کردن رقمهای حاصل‌جمعها ادامه می‌دهیم تا به جواب یک‌رقمی برسیم. این عدد یک‌رقمی ۹ است. آیا می‌توانید توضیح دهید که چرا چنین است؟

۱۲. به مسألهٔ ۱۱ توجه کنید. دستورالعملهای زیر را به دوست خود بدهید: «عدد صحیحی از ۱ تا ۱۰ انتخاب کن. این عدد را در ۹ ضرب کن. رقمهای عدد حاصل را با هم جمع کن. از عدد به‌دست‌آمده ۲ را کم کن. اکنون عددی یک‌رقمی داری. حرفی از الفبا را که متناظر با این رقم است درنظر بگیر؛ مثلاً «الف» برای ۱، «ب» برای ۲، «پ» برای ۳، و الی آخر. کشوری را درنظر بگیر که نامش با این حرف شروع شود. حرف دوم نام این کشور را درنظر بگیر. حیوانی را درنظر بگیر که نامش با این حرف شروع شود.» به دوست خود فرصت دهید که لحظه‌ای فکر کند. سپس بگویید «ولی در ترکیه راکون نیست!».

نکتهٔ این مزاح چیست؟ چرا اغلب جواب می‌دهد؟

۱۳. عدد طبیعی اولی مانند p درنظر بگیرید. فرض کنید n عدد طبیعی دلخواهی باشد. دستوری برای تعداد عاملهای p در $n!$ پیدا کنید.

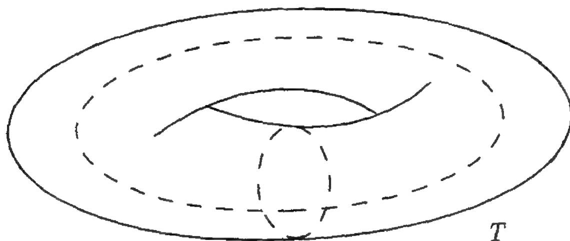
۱۴. [هالموس] هندوانه‌ای ۵ کیلوگرم وزن دارد. می‌دانیم که ۹۹٪ وزن هندوانه وزن آب هندوانه است. بعد از اینکه هندوانه مدتی در اتاق خشک‌کن قرار داده می‌شود، معلوم می‌شود که ۹۸٪ وزن هندوانه وزن آب هندوانه است. وزن هندوانه چقدر است؟

۱۵. پانزده تیم در مسابقاتی دوره‌ای شرکت کرده‌اند. هر تیم دقیقاً یک‌بار با بقیهٔ تیمها بازی می‌کند. هر تیم برای هر برد ۳ امتیاز، برای هر تساوی ۲ امتیاز و برای هر باخت ۱ امتیاز می‌گیرد. در پایان مسابقات امتیاز هیچ دو تیمی یکی نیست. آخرین تیم در رده‌بندی ۲۱ امتیاز دارد. توضیح دهید که چرا تیم اول دست‌کم یک تساوی داشته است.

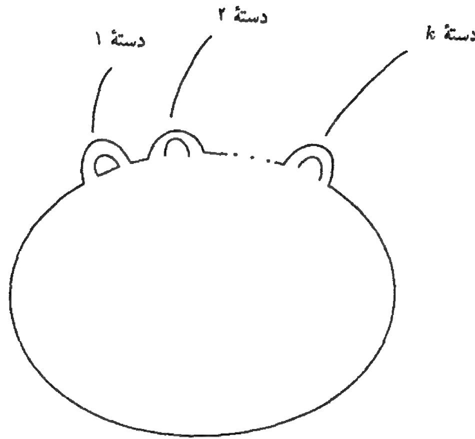
۱۶. فرض کنید T چنبره‌ای مانند شکل ۲۲ باشد.

عدد γ را طوری بیابید که فرمول $V - E + F = \gamma$ به‌ازای هر گراف پذیرفتنی روی سطح چنبرهٔ T برقرار باشد (به‌یاد آورید که عدد γ برای کره ۲ بود؛ اما برای چنبره عدد دیگری است). عدد γ را مشخصهٔ اویلر چنبره می‌نامیم. در این فصل دیدیم که مشخصهٔ اویلر کره ۲ است.

برهانی برای اینکه عدد γ برای هر گراف پذیرفتنی روی T مناسب است عرضه کنید.



شکل۲۲



کره‌ای k دسته‌ای

شکل۲۳

۱۷. فرض کنید S کره‌ای k دسته‌ای باشد (شکل ۲۳ را ببینید).
[چنبره به مفهومی، کره‌ای یک دسته‌ای است. آیا می‌توانید دلیل درستی این ادعا را توضیح دهید؟] عدد γ را طوری تعیین کنید که فرمول $V - E + F = \gamma$ به‌ازای هر گراف پذیرفتنی روی رویهٔ S برقرار باشد. آیا می‌توانید توضیح دهید که چرا این فرمول همیشه به‌ازای این مقدار γ برقرار است؟

۱۸. هر نقطه از صفحهٔ دکارتی را با یکی از رنگهای قرمز، آبی یا زرد رنگ می‌کنیم. توضیح دهید چرا می‌توانیم نتیجه بگیریم که پاره‌خطی به طول واحد وجود دارد که دو نقطهٔ انتهایی آن همرنگ‌اند.

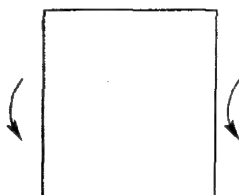
۱۹. ثابت کنید که اگر هر نقطهٔ صفحه را با یکی از هفت رنگ ـ قرمز، آبی، زرد، سبز، بنفش، نارنجی و صورتی ـ رنگ کنیم، ممکن است هیچ پاره‌خطی به طول واحد با نقاط انتهایی همرنگ وجود نداشته باشد.

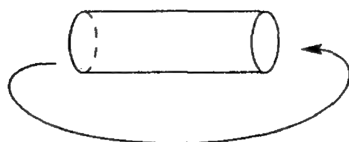
۲۰. در قبیله‌ای بدوی رسومات اجتماعی زیر رعایت می‌شود: وقتی شوهری دروغ می‌گوید همهٔ زنهای قبیله، غیر از همسر خودش، فوراً مطلع می‌شوند. نه زنها هیچ‌وقت در مورد این موضوع با کسی صحبت می‌کنند و نه شوهرهای آنها. وقتی که زنی بتواند به‌طور غیرقابل انکار بگوید که شوهرش دروغ گفته است، پیش از غروب همان روز حرف «A» را روی پیشانی خود خالکوبی می‌کند.

روزی رئیس قبیله اعلام می‌کند که دست‌کم یک شوهر دروغگو در قبیله هست (اما نمی‌گوید که چند شوهر دروغگو در قبیله هست). اگر درواقع ۳۷ شوهر دروغگو در قبیله باشد، چه چیزی آشکار می‌شود؟ [راهنمایی: ابتدا موقعیتی را درنظر بگیرید که رئیس قبیله همین مطلب را اعلام کرده باشد، ولی فقط یک شوهر دروغگو در قبیله باشد. سپس حالتی را بررسی کنید که فقط دو شوهر دروغگو در قبیله باشند. اکنون از استقرا استفاده کنید.]

۲۱. مسألهٔ قبل، درصورتی‌که رئیس قبیله تعداد شوهران دروغگو را اعلام کند چه تغییری می‌کند؟

۲۲. قطعه‌ای کاغذ مربعی‌شکل دارید. تصور کنید که لبهٔ بالایی کاغذ را به لبهٔ پایینی، و لبهٔ سمت چپ کاغذ را به لبهٔ سمت راست چسبانده‌اید (شکل ۲۴ را ببینید). این کار را به‌گونه‌ای انجام دهید که جهت لبه‌ها حفظ شود. شکل هندسی به‌دست آمده چیست؟

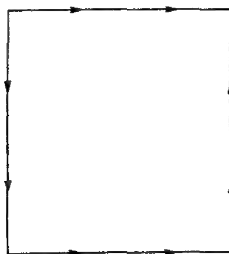




شکل۲۴

اکنون تصور کنید که وقتی می‌خواهید لبهٔ سمت چپ را به لبهٔ سمت راست بچسبانید، ابتدا لبهٔ سمت چپ را یک پیچ می‌دهید (شکل ۲۵ نشان می‌دهد که منظور چیست). نتیجه شیئی است به نام بطری کلاین؛ بطری کلاین را نمی‌توان به‌عنوان رویه‌ای در فضا مجسم کرد، اما با توصیف بیان شده می‌توانیم به لحاظ ریاضی آن را تصور کنیم.

عدد γ را طوری تعیین کنید که فرمول $V - E + F = \gamma$ به‌ازای هر گراف پذیرفتنی روی سطح بطری کلاین برقرار باشد. آیا می‌توانید ثابت کنید که این فرمول به‌ازای این مقدار γ همواره برقرار است؟



شکل۲۵

۲۳. مجموع زیر را حساب کنید و به شکل جمع‌وجور بنویسید:

$$\frac{۱}{۲!} + \frac{۲}{۳!} + \frac{۳}{۴!} + \cdots + \frac{n}{(n+۱)!}$$

۲۴. فرض کنید S مجموعه‌ای k عضوی باشد. می‌دانیم که S ، ۲^k زیرمجموعه دارد. این حکم چه ارتباطی با ضرایب بسط دوجمله‌ای دارد؟ [راهنمایی: به $(۱+x)^k$ توجه کنید.]

۲۵. کیسه‌ای حاوی a توپ سفید و b توپ سیاه است؛ می‌دانیم که $a+b \geqslant ۳$. بازیکنان A و B بازی‌یی با این کیسه و توپها انجام می‌دهند. دو روش بازی کردن را درنظر بگیرید:

۱. بازیکن A توپی را به تصادف بیرون می‌آورد. اگر توپ سفید باشد می‌برد و اگر سیاه باشد می‌بازد.

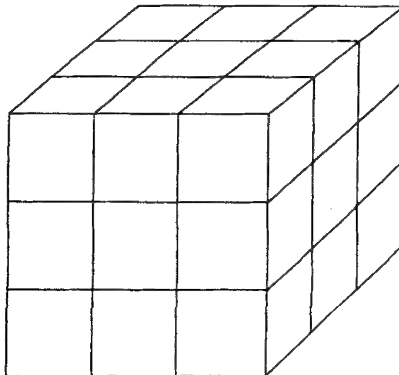
۲. بازیکن A توپی را بیرون می‌آورد و بدون نگاه کردن به آن دور می‌اندازد. سپس بازیکن B توپ سیاهی را بیرون می‌آورد. بعد A توپ دیگری را بیرون می‌آورد. اگر این توپ سفید باشد A می‌برد و اگر سیاه باشد او می‌بازد.

ثابت کنید که در روش اول A با احتمال $\frac{a}{a+b}$ می‌برد. اما در روش دوم A با احتمال $\frac{a}{a+b} + \frac{a}{(a+b)(a+b-۲)}$ می‌برد. روش دوم آشکارا برای A بهتر است.

این مسأله چه ارتباطی با مسألهٔ مونتی‌هال دارد؟

۲۶. مکعبی چوبی به ابعاد ۳ × ۳ × ۳ اینچ مکعب دارید. با رسم شبکه‌های ۳ × ۳ روی هر سطح مکعب می‌توانید نشان دهید که چگونه می‌توان مکعب را به ۲۷ مکعب کوچکتر هم‌اندازه تقسیم کرد. شکل ۲۶ را ببینید.

آیا ممکن است موریانه‌ای طوری چوب را بخورد که از هر مکعب بیرونی فقط یک‌بار بگذرد و سرانجام به مکعب میانی برسد؟



شکل ۲۶

۲۷. مثال مربوط به موزاییک کردن کف حمام را در این فصل مطالعه کنید. اگر دو مربع حذف‌شده به جای اینکه در دو گوشهٔ روبه‌روی هم باشند، در دو گوشهٔ مجاور قرار داشته باشند چه روی می‌دهد؟ اگر دو مربع حذف‌شده مجاور باشند چه روی می‌دهد؟ (در این حالت آیا مهم است که دو مربع حذف‌شده کجا هستند؟)

۲۸. دست‌کم دو روش برای محاسبهٔ مجموع

$$۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + \cdots + ۲۰۰$$

بیابید. [توجه: جمع کردن همهٔ این عددها با هم «روش» محسوب نمی‌شود.]

۲۹. در سالن نمایشی ۵۰۰ صندلی هست. تزیین‌گر سالن پارچه‌هایی با سه رنگ قرمز، آبی و زرد برای روکش کردن این صندلیها در اختیار دارد. او هر یک از صندلیها را با یکی از این پارچه‌ها روکش می‌کند. سرانجام، بعضی صندلیها قرمز، بعضی آبی و بعضی زردند و هیچ الگوی خاصی دیده نمی‌شود. این کار را به چند طریق می‌توان انجام داد؟

۲

نگاهی عمیقتر به هندسه

۱.۲ هندسهٔ مسطحهٔ کلاسیک

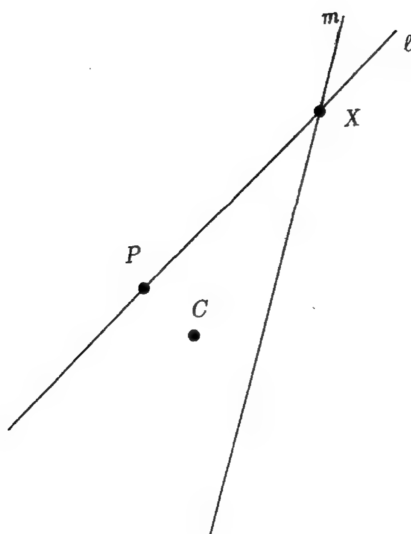
مسأله‌های این بخش براساس مفاهیم کلاسیک هندسهٔ اقلیدسی طرح شده‌اند. در این بخش با مثلث و دایره، ترسیم با ستّاره و پرگار، زاویه‌های قائمه، زاویه‌های مجاور و زاویه‌های متقابل به رأس سروکار داریم. بعداً به مسائلی در مورد هندسهٔ فضایی نیز خواهیم پرداخت. در این بخش، هر کاری که می‌کنیم در صفحه است.

مسألهٔ ۱.۱.۲ ℓ و m را دو خط در صفحه می‌گیریم که نسبت به هم کج‌اند (یعنی یکدیگر را در نقطه‌ای یکتا مانند X قطع می‌کنند). P را نقطه‌ای (غیر از X) روی ℓ می‌گیریم. به کمک ستاره و پرگار دایره‌ای رسم کنید که بر هر دو خط مماس باشد و از P بگذرد.

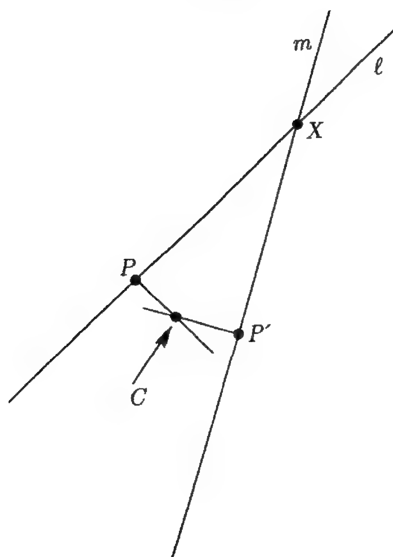
راه‌حل. اگر بتوانیم مرکز دایره، C، را مشخص کنیم، می‌توانیم دایره را رسم کنیم؛ زیرا شعاع دایره فاصلهٔ C تا P است، و این فاصله را می‌توانیم با پرگار اندازه بگیریم (شکل ۲۷).

توجه می‌کنیم که چون P نقطهٔ تماس است، شعاعی از دایره که به P ختم می‌شود بر ℓ عمود است. پس ترسیم خط عمود بر ℓ در P سودمند است (شکل ۲۸). می‌توانیم فاصلهٔ X تا P را اندازه بگیریم. پس می‌توانیم نقطهٔ P' را روی m طوری مشخص کنیم که فاصلهٔ آن از X همین مقدار باشد. به‌دلیل تقارن شکل، دایره‌ای که می‌خواهیم رسم کنیم در نقطهٔ P' بر m مماس است.

اگر بتوانیم خط عمود بر ℓ در نقطهٔ P و خط عمود بر m در نقطهٔ P' را رسم کنیم، نقطهٔ تقاطع این دو خط باید مرکز دایرهٔ مطلوب باشد (شکل ۲۸ را ببینید). پس مسأله را به مسألهٔ ترسیم خطی عمود بر خط مفروض در نقطه‌ای مفروض از این خط تبدیل کرده‌ایم.



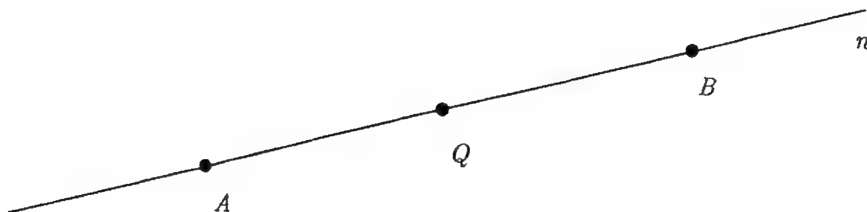
شکل۲۷



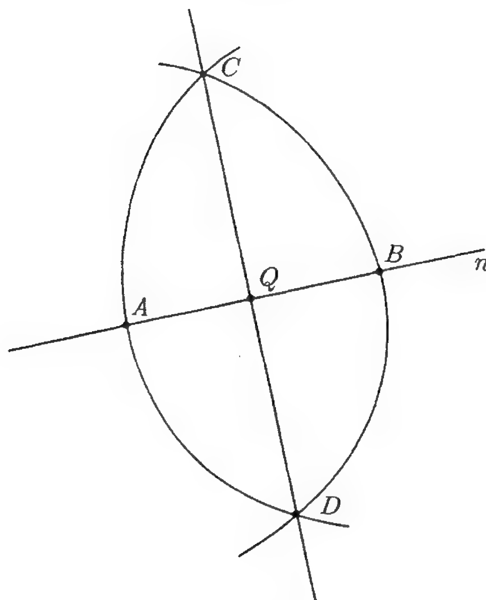
شکل۲۸

شکل ۲۹ را ببینید. نقطهٔ Q روی خط n است. به کمک پرگار نقطه‌های A و B را روی خط n در دو طرف Q و همفاصله از Q مشخص کنید. خط عمودی که می‌خواهیم رسم کنیم مجموعهٔ همهٔ نقاط همفاصله از A و B است. نقطه‌ای از این خط عمود، یعنی Q، را می‌شناسیم. چون هر خط با دو نقطه مشخص می‌شود، کافی است نقطه‌ای دیگر از خط عمود را بیابیم.

پرگار را به اندازهٔ فاصلهٔ A تا B باز کنید. کمانی به مرکز A و به این شعاع رسم کنید. شکل ۳۰ را



شکل۲۹



شکل۳۰

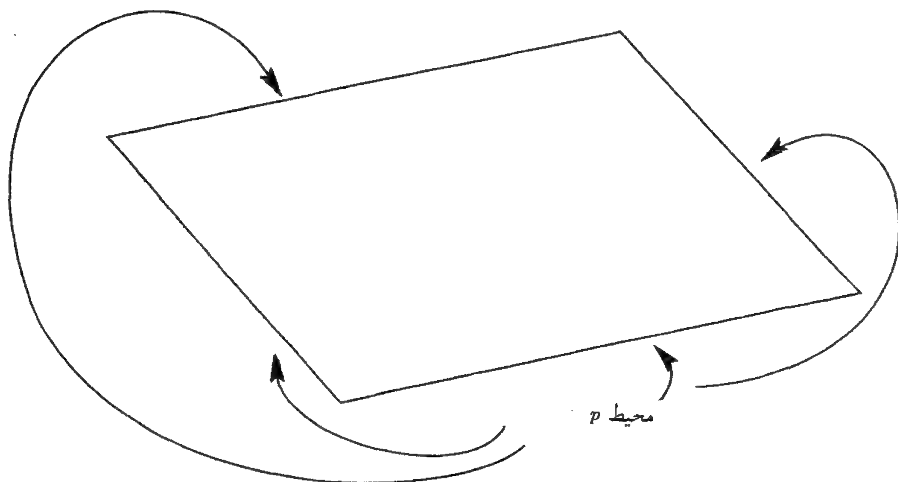
ببینید. کمان دیگری به مرکز B و به همین شعاع رسم کنید. روشن است که دو نقطهٔ تقاطع این کمانها، یعنی C و D، از A و B همفاصله‌اند. پس C، D و Q هر سه روی خط مطلوب قرار دارند. خط یکتایی که این نقطه‌ها مشخص می‌کنند از Q می‌گذرد و بر n عمود است.

دیدیم که چگونه می‌توان خطی عمود بر خط مفروض در نقطهٔ مفروض رسم کرد. اگر این اطلاعات را با تحلیل قبلی مربوط به مسألهٔ ترسیم دایرهٔ مماس بر دو خط ترکیب کنیم راه‌حل مسأله کامل می‌شود. □

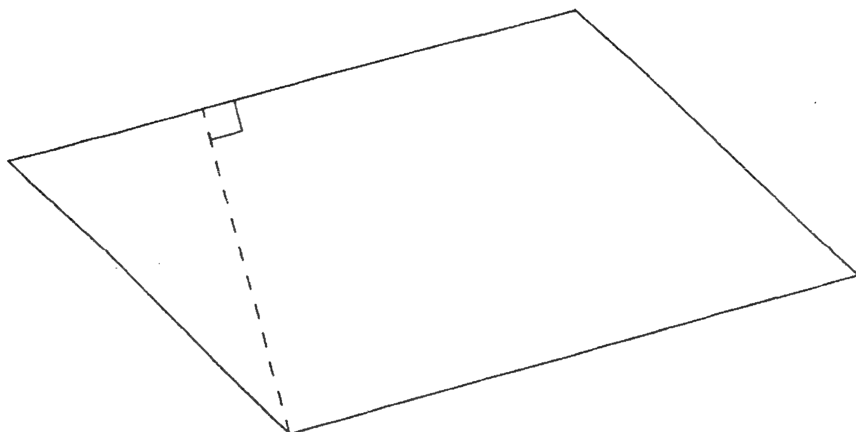
یک ویژگی جالب راه‌حل مسألهٔ قبل این است که از ساده‌سازی استفاده کردیم: ترسیم دایرهٔ مطلوب به یافتن مرکز دایره تبدیل شد؛ یافتن مرکز دایره به ترسیم خطهایی عمود تبدیل شد، و غیره. مسأله حل‌کنهای ماهر معمولاً مایل‌اند مسألهٔ مفروض را به مسأله‌ای ساده‌تر، یا رشته‌ای از مسأله‌های ساده‌تر تبدیل کنند.

مسألهٔ ۲.۱.۲ از متوازی‌الاضلاعهایی که محیط معلومی دارند، کدام بیشترین مساحت را دارد؟

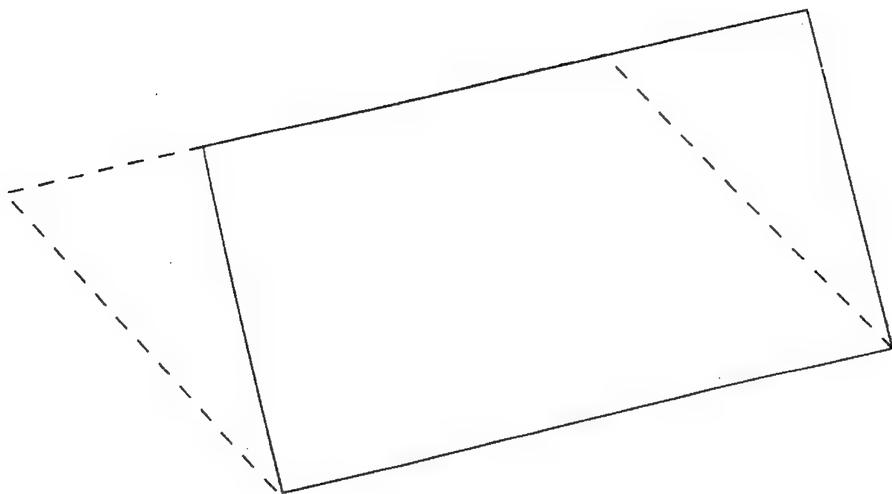
راه‌حل. محیط معلوم را با p نشان دهید. متوازی‌الاضلاعی با محیط p درنظر بگیرید (شکل ۳۱). توجه کنید که اگر مانند شکل ۳۲ از متوازی‌الاضلاع مثلثی ببریم و آن را مجدداً مانند شکل ۳۳ کنار باقی‌ماندهٔ متوازی‌الاضلاع قرار دهیم، مساحت تغییر نمی‌کند ولی محیط کاهش می‌یابد (چون پهنا تغییر نکرده است، ولی دو ضلع دیگر عمودی، و در نتیجه کوتاهتر شده‌اند). نتیجه می‌شود که برای یافتن مساحت اپتیمال، باید توجه خود را به جای متوازی‌الاضلاعهای معمولی به مستطیلها معطوف کنیم.



شکل۳۱



شکل۳۲

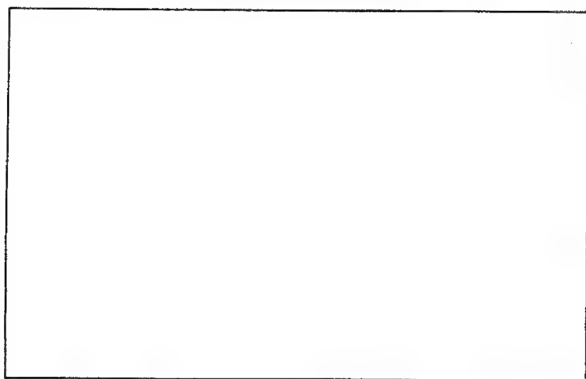


شکل۳۳

اکنون مستطیلی را که لزوماً مربع نیست، مانند شکل ۳۴، درنظر بگیرید. باز هم فرض کنید که محیط p است. می‌توانیم طول مستطیل را با $\frac{p}{۴}+\epsilon$ و عرض آن را با $\frac{p}{۴}-\epsilon$، به‌ازای ϵای نامنفی، نمایش دهیم. توجه کنید که با این مقدارها محیط مستطیل p می‌شود (شکل ۳۵). مساحت این مستطیل برابر است با

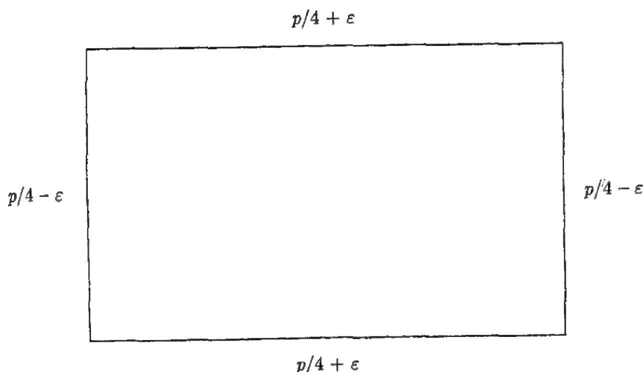
$$\left[\frac{p}{۴}+\epsilon\right]\cdot\left[\frac{p}{۴}-\epsilon\right]=\frac{p^{۲}}{۱۶}-\epsilon^{۲}$$

این مساحت وقتی ماکسیمم می‌شود که ϵ، که نامنفی است، تا جایی که ممکن است کوچک شود. درواقع، مساحت ماکسیمم آشکارا به‌ازای $\epsilon=۰$ حاصل می‌شود. اما این صرفاً یعنی اینکه مساحت اپتیمال وقتی حاصل می‌شود که مستطیل مربع باشد. □



محیط p

شکل۳۴



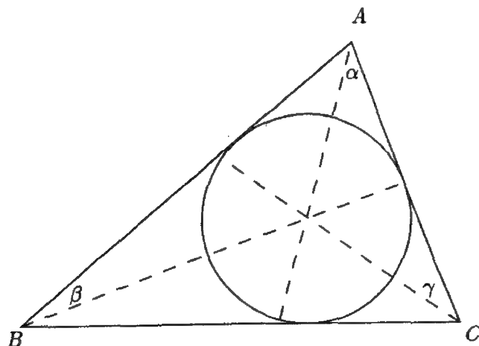
شکل۳۵

در مثال قبل چند نکته هست. یکی اینکه بدون حسابان هم خیلی کارها می‌توان کرد. استفاده از تقارن و استدلال هندسی روشهایی مهم‌اند. این مسأله را به کمک حسابان و همچنین به‌کمک هندسهٔ تحلیلی هم می‌توانید حل کنید. اما خلاقیت جانشین توانمندی برای این ابزارهای پیچیده‌تر است.

مسألهٔ ۳.۱.۲ با استفاده از ستاره و پرگار، مرکز دایرهٔ محاطی مثلثی معلوم را پیدا کنید.

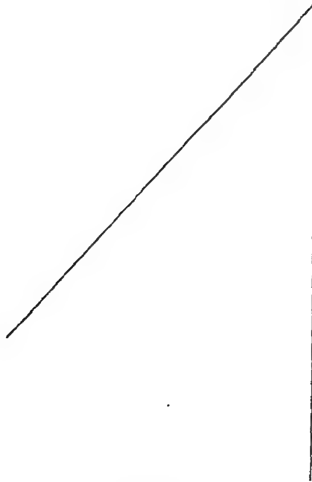
راه‌حل. در اینجا فرض می‌کنیم که غیر از تعریف مفهوم هندسی دایرهٔ محاطی، هیچ شناخت خاصی از آن نداریم. دست‌کم در حال حاضر، در وجود دایرهٔ محاطی شک نمی‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم در هر مثلث دایره‌ای وجود دارد که از داخل بر هر سه ضلع مثلث در نقاط درونی این ضلعها مماس است. بعداً چاره‌ای برای خلاصی از نگرانی در مورد مسألهٔ وجود این دایره پیدا می‌کنیم.

به شکل ۳۶ توجه کنید. دایرهٔ مطلوب بر ضلعهای AB و AC مماس است. پس مرکز دایره از دو ضلع زاویهٔ A به یک فاصله است، و بنابراین روی نیمساز زاویهٔ α در A قرار دارد. دو جفت ضلع دیگر را نیز می‌توان همین‌طور بررسی کرد. درمجموع، اگر بتوانیم سه نیمساز مثلث را رسم کنیم، و اگر از پیش فرض کرده باشیم که دایرهٔ محاطی وجود دارد، این سه نیمساز یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند و این نقطه مرکز دایرهٔ محاطی است.

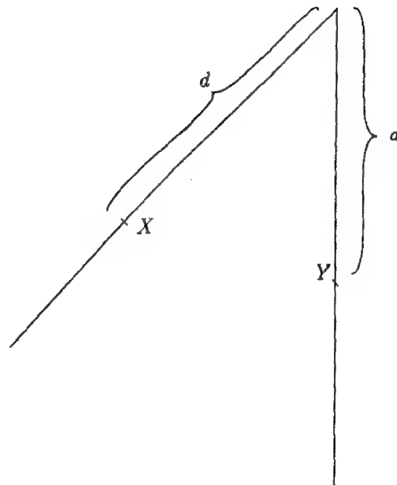


شکل۳۶

مسأله به یافتن نیمساز زاویه‌ای معلوم تبدیل شده است. شکل ۳۷ را ببینید. باید نقطه‌ای پیدا کنیم که از دو نیمخطی که زاویه را در بردارند به یک فاصله باشد. این کار را نمی‌توانیم با اندازه‌گیری از رأس زاویه انجام دهیم. پس پرگار را به مقدار ثابت d باز می‌کنیم و دو نقطهٔ X و Y را روی دو ضلع زاویه، و هر کدام به فاصلهٔ d از رأس زاویه، علامت می‌زنیم. شکل ۳۸ را ببینید.

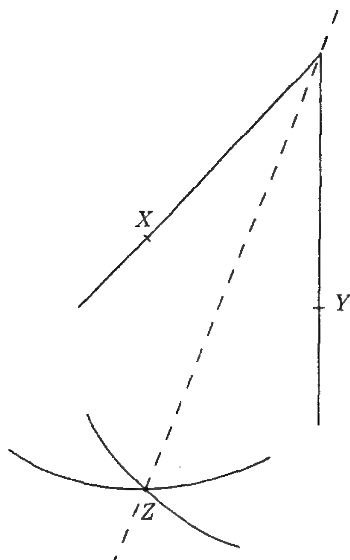


شکل۳۷



شکل۳۸

اکنون نوک پرگار را در نقطهٔ X بگذارید و کمانی به شعاع d مانند شکل ۳۹ رسم کنید. نوک پرگار را در نقطهٔ Y بگذارید و کمانی به شعاع d رسم کنید. نقطهٔ Z، محل برخورد این کمانها، از X و Y به یک فاصله است. خطی که از Z و رأس زاویه می‌گذرد نیمساز مطلوب است.



شکل۳۹

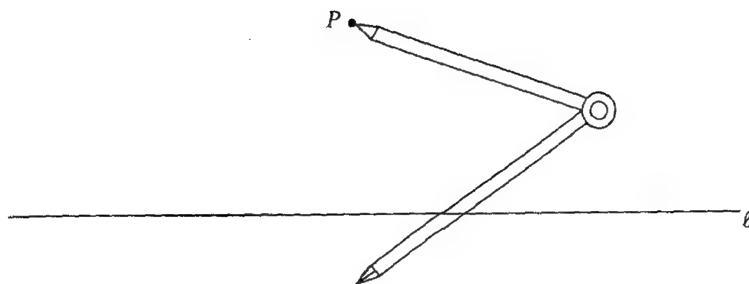
اکنون که روشی برای ترسیم نیمسازها می‌دانیم، استدلال قبلی نشان می‌دهد که چگونه می‌توان دایرهٔ محاطی مثلثی معلوم را رسم کرد. به این ترتیب مسأله حل شده است. □

باقی می‌ماند که چند کلمه‌ای دربارهٔ وجود دایرهٔ محاطی صحبت کنیم. توجه کنید نیمسازی که از رأس A خارج می‌شود از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است. همچنین، نیمسازی که از رأس B خارج می‌شود از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است. درنتیجه نقطهٔ تقاطع این دو نیمساز از AB، AC و BC به یک فاصله است. پس نقطهٔ تقاطع نیمسازهایی که از A و B خارج می‌شوند روی نیمسازی که از رأس C خارج می‌شود نیز قرار دارد. این نشان می‌دهد که سه نیمساز مثلث واقعاً در یک نقطه متقاطع‌اند. چون این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است. شعاع این دایره فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع سه نیمساز از یکی از ضلعهای مثلث است. مسألهٔ بعدی چگونگی پیدا کردن این شعاع را روشن می‌کند.

مسألهٔ ۴.۱.۲ فرض کنید ℓ خط و P نقطه‌ای است که روی این خط قرار ندارد. با استفاده از ستاره و پرگار خطی رسم کنید که از P بگذرد و بر ℓ عمود باشد.

راه‌حل. نوک پرگار را در P قرار دهید و پرگار را به اندازه‌ای بزرگتر از فاصلهٔ P تا خط ℓ باز کنید (شکل ۴۰).

کمانی رسم کنید و دو نقطهٔ تقاطع این کمان باخط ℓ را درنظر بگیرید. این دو نقطه را A و B بنامید (شکل ۴۱).



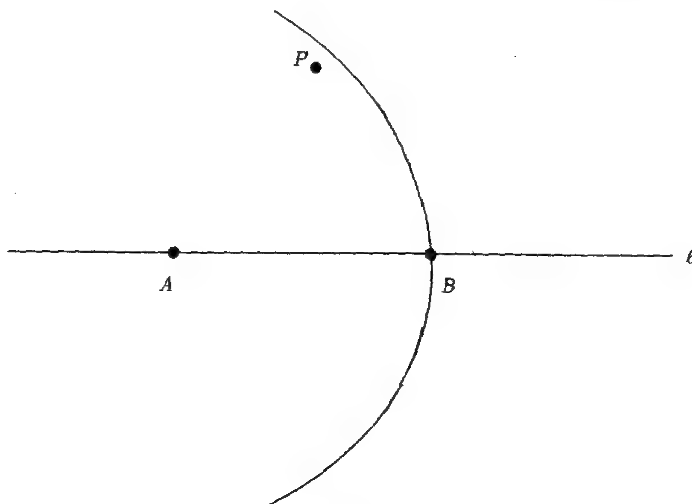
شکل ۴۰



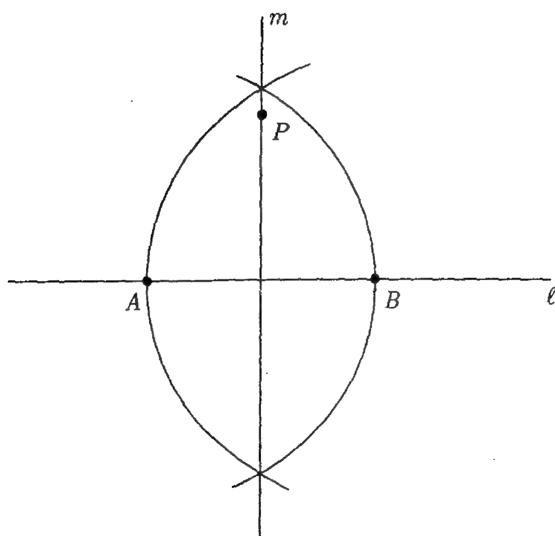


شکل ۴۱

نوک پرگار را در A بگذارید و پرگار را به اندازه‌ای باز کنید که سر دیگر پرگار از B بگذرد. کمانی مانند شکل ۴۲ رسم کنید.



شکل ۴۲



شکل۴۳

نوک پرگار را در B بگذارید و سر دیگر پرگار را به A برسانید. کمانی رسم کنید. نتیجه را در شکل۴۳ می‌بینید.

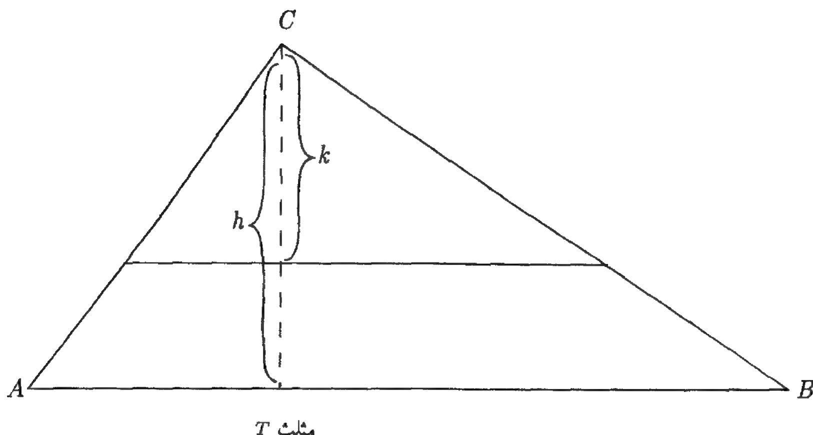
دو نقطهٔ تقاطع کمانها از A و B به یک فاصله‌اند. خطی که از این دو نقطهٔ تقاطع می‌گذرد، خط m، همهٔ نقاطی است که از A و B به یک فاصله‌اند. این خط بر ℓ عمود است. این خط از P نیز می‌گذرد، چون P مطمئناً از A و B به یک فاصله است. □

توجه کنید که اکنون شعاع دایرهٔ به مرکز P که بر ℓ مماس است همان فاصلهٔ P تا نقطهٔ تقاطع ℓ و m است.

مسألهٔ ۵.۱.۲ فرض کنید مثلث T با قاعدهٔ $\overline{AB}$ مفروض باشد. روشی ترسیمی برای کشیدن خطی موازی با $\overline{AB}$ که به ضلعهای $\overline{CA}$ و $\overline{CB}$ ختم شود بیان کنید که مثلث را به دو ناحیه با مساحتهای برابر تقسیم کند.

راه‌حل. شکل ۴۴ را ببینید. فرض کنید طول ارتفاع مثلث h و فاصلهٔ رأس C تا پاره‌خطی که می‌خواهیم رسم کنیم k باشد. [توجه کنید که در مسألهٔ قبل ترسیم ارتفاع یا خط عمود را یاد گرفتیم.]

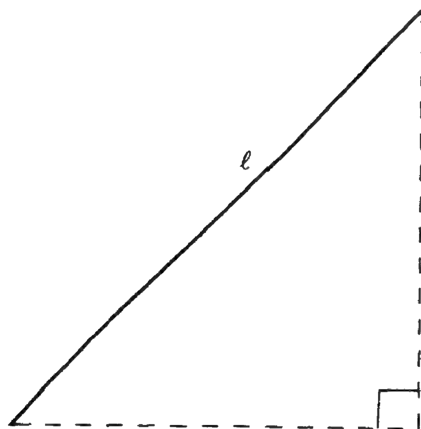
بخش P از مثلث T که در بالای پاره‌خط مطلوب قرار دارد، خود مثلث، و با T متشابه است. دلیل این امر روشن است، زیرا ضلعهای متناظر دو مثلث با هم موازی‌اند. اگر نسبت طول ارتفاع مثلث کوچکتر، k، به طول ارتفاع مثلث بزرگتر، h، برابر α باشد، نسبت طول قاعده‌های دو مثلث نیز α است. پس نسبت مساحتهای دو مثلث α^2 است (چون مساحت برابر با نصف قاعده ضرب در ارتفاع



شکل۴۴

است). پس می‌خواهیم پاره‌خط افقی را چنان انتخاب کنیم که $\alpha^۲ = \frac{۱}{۲}$ یا $\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$. به بیان دیگر، می‌خواهیم خط را طوری رسم کنیم که $k = \frac{۱}{\sqrt{۲}}h$.

مسأله به ترسیم پاره‌خطی که طول آن $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ برابر طول پاره‌خطی مفروض باشد تبدیل شده است. اگر ℓ پاره‌خط مفروض، مانند شکل ۴۵، باشد می‌توانیم از ایده‌های به‌کار رفته در مسأله‌های قبل استفاده، و به کمک ستاره و پرگار مثلثی قائم‌الزاویه رسم کنیم که طول وتر آن برابر ℓ باشد. (جزئیات ترسیم: مربعی به طول ضلع ℓ رسم کنید؛ قطرهای این مربع را بکشید.) دراین‌صورت طول هر ساق این مثلث قائم‌الزاویه $\frac{\ell}{\sqrt{۲}}$ است. این همان ترسیم مطلوب است. □

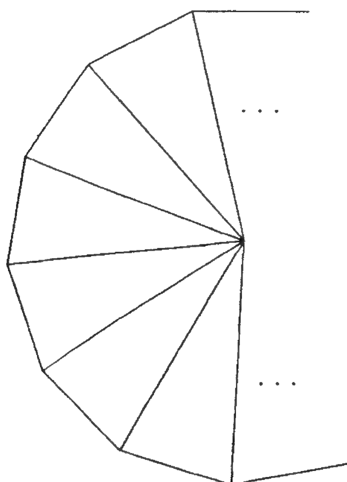


شکل۴۵

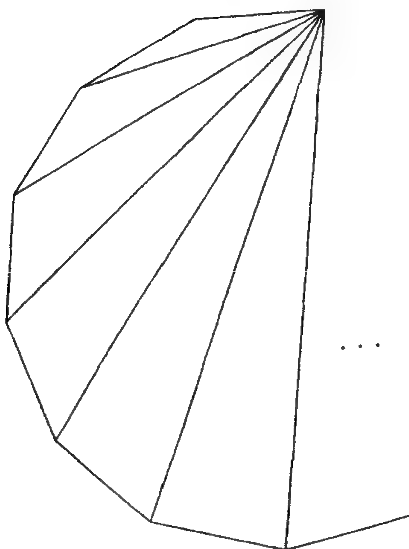
یک‌بار دیگر روش ساده‌سازی مسأله را در عمل دیدیم. از توان مثلثهای متشابه برای تبدیل یک مسألهٔ هندسی پیچیده به یک مسألهٔ هندسی مقدماتی استفاده کردیم.

مسألهٔ ۶.۱.۲ فرض کنید P چندضلعی منتظمی با k ضلع باشد. اندازهٔ هر یک از k زاویهٔ P چقدر است؟

راه‌حل. دربارهٔ زاویه‌های چندضلعی چه می‌دانیم؟ نتیجه‌ای مهم که همه می‌دانیم این است که مجموع زاویه‌های مثلث °۱۸۰ (یا π در مقیاس رادیان) است. آیا می‌توانیم مسألهٔ فعلی را به این نتیجه ربط دهیم؟
می‌کوشیم چندضلعی P را به چند مثلث تقسیم کنیم. شکل ۴۶ یک راه را برای این کار نشان می‌دهد؛ راه دیگری را در شکل ۴۷ می‌بینید. هریک از اینها را جداگانه بررسی می‌کنیم.



شکل۴۶



شکل۴۷

توجه کنید که شکل ۴۶ چندضلعی P را به‌صورت اجتماعی از k مثلث متساوی‌الساقین نشان می‌دهد. مجموع زاویه‌های هر یک از این مثلثها ۱۸۰° است. پس مجموع زاویه‌های همه این مثلثها $(۱۸۰k)^\circ$ است. اما مجموع زاویه‌های همهٔ مثلثها برابر مجموع زاویه‌های چندضلعی نیست. درواقع مجموع زاویه‌های مثلثها به اندازهٔ مجموع زاویه‌هایی که در مرکز قرار دارند از مجموع زاویه‌های چندضلعی بیشتر است. از این استدلال نتیجه می‌شود که

$$\text{مجموع زاویه‌های همهٔ مثلثها} = ۳۶۰^\circ + (\text{مجموع زاویه‌های } P)$$
$$= (۱۸۰k)^\circ$$

به بیان دیگر،

$$\text{مجموع زاویه‌های } P = (۱۸۰(k-۲))^\circ$$

احتمالاً بررسی مثلثهای شکل ۴۷ نیز همین نتیجه را به‌دست می‌دهد. ببینیم چه می‌شود. چون P، k ضلع دارد، معلوم می‌شود که، در شکل ۴۷، چندضلعی را به $k-۲$ مثلث تقسیم کرده‌ایم. این بار مجموع زاویه‌های همهٔ مثلثها دقیقاً برابر با مجموع زاویه‌های چندضلعی است. بنابراین

$$\text{مجموع زاویه‌های } P = (۱۸۰(k-۲))^\circ$$

این همان پاسخی است که با بررسی شکل ۴۶ به‌دست آوردیم.

بنابر هر دو این بررسیها، اندازهٔ هر زاویهٔ P برابر است با

$$\alpha = \frac{\text{مجموع زاویه‌های } P}{k} = \frac{(۱۸۰(k-۲))^\circ}{k}$$

□

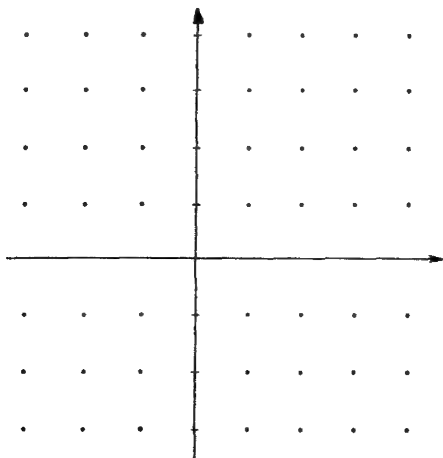
مسألهٔ پیکارجوی ۷.۱.۲ توضیح دهید که چرا مجموع سه زاویهٔ هر مثلث ۱۸۰° است. [توجه: از این نتیجه برای بررسی مسألهٔ ۶.۱.۲ استفاده کردیم. پس اکنون نمی‌توانیم از راه‌حل مسألهٔ ۶.۱.۲ برای حل این مسألهٔ پیکارجو استفاده کنیم.]

راه‌حل مسألهٔ قبل اصل مهمی را نشان داد: وقتی مسألهٔ جدیدی را حل می‌کنید، از خود بپرسید چه چیزی که ممکن است به این مسأله مربوط باشد می‌دانید. بکوشید چیزی پیدا کنید که در آغاز به‌کار آید. مسألهٔ بعد عملاً نمونهٔ دیگری از این فلسفه است.

مسألهٔ ۸.۱.۲ نقطهٔ مشبکه‌ای نقطه‌ای از صفحه است که هر دو مختص دکارتی آن عددهایی صحیح باشند. در شکل ۴۸ چند نقطهٔ مشبکه‌ای را می‌بینید. C_R را دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع مثبت R می‌گیریم. تعداد نقاط مشبکه‌ای را که درون دایرهٔ C_R (نه روی آن) قرار دارند با $M(R)$ نشان دهید. فرمولی مجانبی برای $M(R)$ وقتی که $R \to +\infty$ به‌دست آورید.

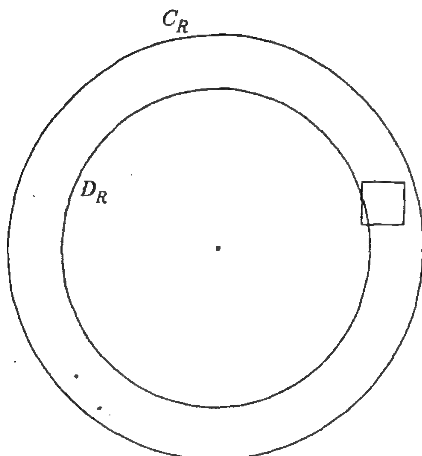
راه‌حل. به‌دست آوردن فرمولی دقیق برای $M(R)$ اساساً ناممکن است. درعوض، می‌خواهیم مقداری قابل محاسبه مانند $\mu(R)$ بیابیم به‌طوری که وقتی $R \to +\infty$، $\frac{\mu(R)}{M(R)} \to ۱$.

ابزاری توانمند در مسائل شمارشی از این نوع استفاده از مساحت است. توجه کنید که هر مربع بسته با ضلعهایی موازی محورهای مختصات، به طول ۱، حاوی دست‌کم یک نقطهٔ مشبکه‌ای است. برای راحتی کار توجه خود را به مربعهایی از این نوع معطوف می‌کنیم که مرکز آنها در نقطه‌هایی به‌شکل (m,n) باشد، که در آنها m و n عددهایی صحیح‌اند. اینها را «مربعهای خوب» می‌نامیم. هر چنین مربعی یک نقطهٔ مشبکه‌ای در مرکز دارد و حاوی هیچ نقطهٔ مشبکه‌ای دیگری نیست.

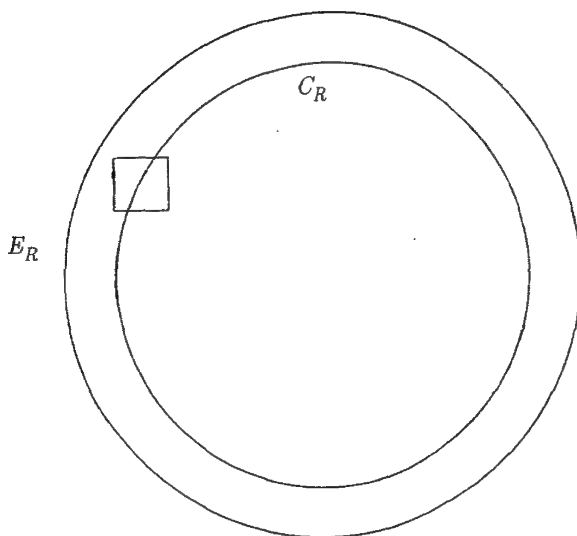


شکل۴۸

اکنون درون دایرهٔ C_R به مرکز ۰ و شعاع R، دایرهٔ D_R به مرکز ۰ و شعاع $R - \sqrt{۲}$ را قرار می‌دهیم؛ شکل ۴۹ را ببینید.



شکل۴۹



شکل ۵۰

هر مربع خوب که D_R را قطع کند، کاملاً درون C_R است. به همین ترتیب، E_R را دایرهٔ به مرکز ۰ و شعاع $R+\sqrt{۲}$ بگیرید. هر مربع خوب که C_R را قطع کند درون E_R است. شکل ۵۰ را ببینید.

اکنون می‌توانیم این‌طور بررسی کنیم:

$\pi \times (R-\sqrt{۲})^{۲} =$ مساحت درون D_R

$\leqslant$ مجموع مساحتهای مربعهای خوب درون C_R

$\leqslant$ مجموع مساحتهای مربعهای خوبی که حاوی نقاط مشبکه‌ای درون C_R هستند

$=$ تعداد نقاط مشبکه‌ای درون C_R

$\leqslant$ تعداد مربعهای خوبی که یا درون C_R هستند یا C_R را قطع می‌کنند

$\leqslant$ مجموع مساحتهای همهٔ مربعهای خوب درون E_R

$\leqslant$ مساحت درون E_R

$=$ $\pi \times (R+\sqrt{۲})^{۲}$

پس می‌بینیم که

$\pi \times (R-\sqrt{۲})^{۲} \leqslant$ تعداد نقاط مشبکه‌ای درون C_R $\leqslant \pi \times (R+\sqrt{۲})^{۲}$

می‌توانیم این‌طور نتیجه‌گیری کنیم: ابتدا نابرابریهای بالا را به $\pi R^{۲}$ تقسیم کنید. می‌بینیم که

$$\frac{\pi \times (R-\sqrt{۲})^{۲}}{\pi R^{۲}} \leqslant \frac{\text{تعداد نقاط مشبکه‌ای درون } C_R}{\pi R^{۲}} \leqslant \frac{\pi \times (R+\sqrt{۲})^{۲}}{\pi R^{۲}}$$

اگر فرض کنیم $R \to +\infty$، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{C_R \text{ تعداد نقاط مشبکه‌ای درون }}{\pi R^{۲}} \to ۱$$

این نتیجه پاسخ پرسش اولیه است، تعداد مجانبی نقاط مشبکه‌ای درون دایرهٔ به مرکز صفر و شعاع R برابر $\pi R^{۲}$ است. اما به روشی جالب می‌توانیم پاسخ ظریفتری به این پرسش بدهیم. زیرا

$$\pi \times (R - \sqrt{۲})^{۲} = \pi[R^{۲} - ۲\sqrt{۲}R + ۲] = \pi R^{۲}\left[۱ - \frac{۲\sqrt{۲}}{R} + \frac{۲}{R^{۲}}\right]$$

و

$$\pi \times (R + \sqrt{۲})^{۲} = \pi[R^{۲} + ۲\sqrt{۲}R + ۲] = \pi R^{۲}\left[۱ + \frac{۲\sqrt{۲}}{R} + \frac{۲}{R^{۲}}\right]$$

پس

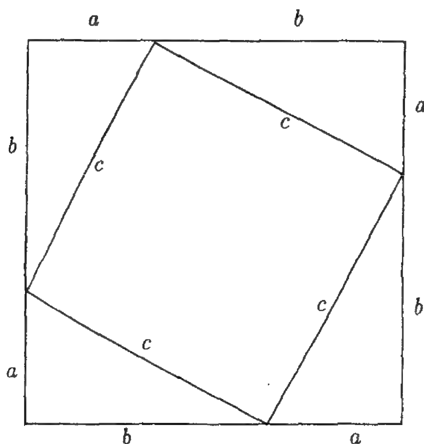
$$C_R \text{ تعداد نقاط مشبکه‌ای درون } = \pi R^{۲}[۱ + \varepsilon(R)]$$

که در آن، جملهٔ خطا، یعنی $\varepsilon(R)$، از $\frac{C}{R}$ بزرگتر نیست. □

مسألهٔ ۹.۱.۲ قضیهٔ فیثاغورس را ثابت کنید.

راه‌حل. بد نیست بدانید که این قضیه در ریاضیات بیشترین تعداد برهانها را داشته است (بیش از ۳۰۰ تا؛ [GUI] را ببینید). یکی از برهانهای این قضیه منسوب به جیمز گارفیلد، رئیس‌جمهوری امریکاست. در اینجا دو برهان برای قضیهٔ فیثاغورس می‌آوریم.

طول ساقهای مثلث قائم‌الزاویه را a و b و طول وتر آن را c بگیرید. شکل ۵۱ را ببینید. توجه کنید که طول ضلع مربع بزرگ بیرونی $a + b$ است. پس مساحت این مربع $(a+b)^{۲}$ است



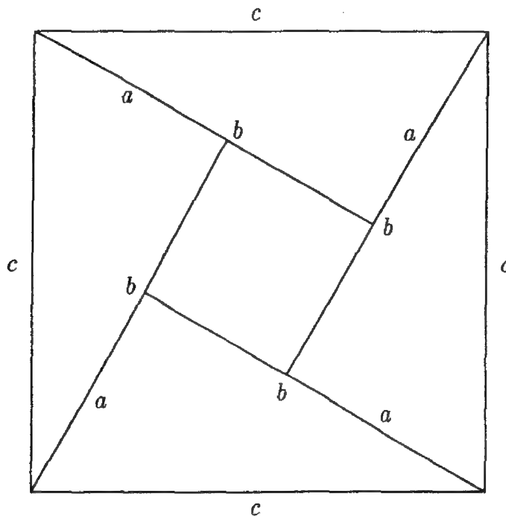
شکل۵۱

از طرف دیگر، مربع بزرگ از چهار مثلث و مربع دیگری به طول ضلع c تشکیل شده است. مساحت هر مثلث $\frac{ab}{۲}$ و مساحت مربع کوچکتر $c^۲$ است. پس با برابر قرار دادن مساحتها معلوم می‌شود که

$$(a+b)^۲ = ۴ \times \frac{ab}{۲} + c^۲$$

پس از ساده کردن این رابطه به‌دست می‌آید $a^۲ + b^۲ = c^۲$، که همان قضیهٔ فیثاغورس است.

در مورد برهانی دیگر شکل ۵۲ را ببینید. [برای راحتی کار در این شکل فرض کرده‌ایم $b > a$.] اکنون طول ضلع مربع بیرونی c است. پس مساحت آن $c^۲$ است.



شکل۵۲

از طرف دیگر، مربع بزرگ از چهار مثلث و یک مربع کوچکتر تشکیل شده است. مساحت هر مثلث $\frac{ab}{۲}$ است؛ طول ضلع مربع کوچک $b - a$ (با فرض اینکه $b > a$)، و بنابراین مساحت این مربع $(b-a)^۲$ است. با برابر قرار دادن مساحتها معلوم می‌شود که

$$c^۲ = ۴ \times \frac{ab}{۲} + (b-a)^۲$$

پس از ساده کردن این رابطه به‌دست می‌آید $c^۲ = b^۲ + a^۲$، که همان قضیهٔ فیثاغورس است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۱۰.۱.۲ قانون سینوسها را ثابت کنید: اگر ABC مثلثی دلخواه باشد، و α، β و γ به ترتیب زاویه‌های رأسهای A، B و C در این مثلث باشند، آنگاه

$$\frac{\sin\alpha}{\overline{BC}} = \frac{\sin\beta}{\overline{AC}} = \frac{\sin\gamma}{\overline{AB}}$$

[راهنمایی: طول ارتفاع مثلث را از دو راه مختلف به‌دست آورید.]

مسألهٔ پیکارجوی ۱۱.۱.۲ قانون کسینوسها را ثابت کنید: مثلث ABC مفروض است؛ اگر α زاویهٔ بین ضلعهای AB و AC باشد، آنگاه

$$|BC|^{۲} = |AB|^{۲} + |AC|^{۲} - ۲|AB||AC| \cos \alpha$$

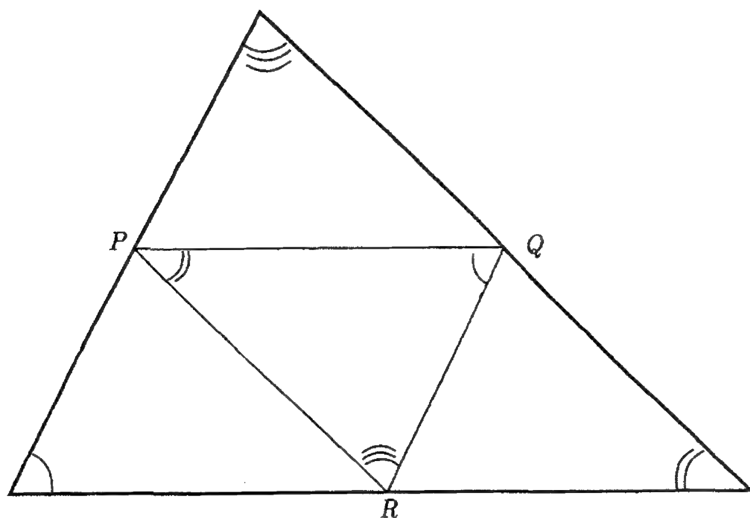
۲.۲ هندسهٔ تحلیلی

در بخش قبل اساساً با آنچه هندسهٔ ترکیبی نام دارد، به شیوهٔ اقلیدس و یونانیان باستان سروکار داشتیم. در این بخش توجه خود را به هندسهٔ مختصاتی دکارت معطوف می‌کنیم. بسیاری از مسأله‌ها را با هر یک از این دو روش می‌توان حل کرد، و شما می‌توانید به‌عنوان زورآزمایی، برای هر مسأله‌ای که در کتاب با یکی از این دو هندسه حل می‌شود راه‌حلهایی در هندسهٔ دیگر بیابید.

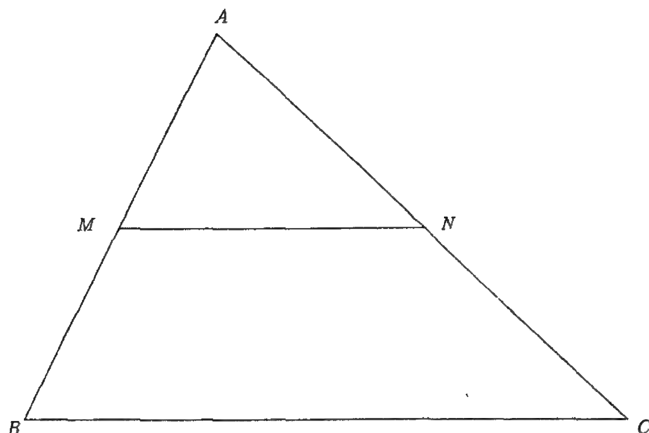
مسألهٔ ۱.۲.۲ فرض کنید T مثلثی در صفحه باشد. P، Q و R را وسط ضلعهای مثلث می‌گیریم. ثابت کنید که مثلث PQR با مثلث T متشابه است.

راه‌حل. دو مثلث متشابه‌اند، اگر زاویه‌های آنها برابر باشد، یا به بیان هم‌ارز، اگر طول ضلعهای آنها متناسب باشد. در هر دو حالت، یکی از مثلثها بزرگنمایی مثلث دیگر است.

توجه خود را به زاویه‌ها معطوف می‌کنیم. اگر بتوانیم ثابت کنیم که اضلاع مثلث PQR با اضلاع مثلث T موازی‌اند، لزوماً زاویه‌های دو مثلث برابر خواهند بود (شکل ۵۳ چنان نشان‌گذاری شده است که به آسانی متوجه این نکته شوید).



شکل۵۳

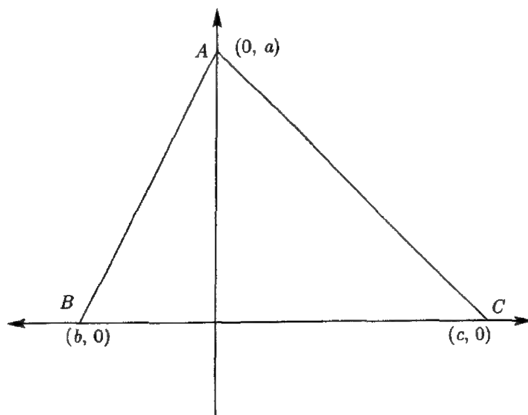


شکل۵۴

تا اینجا مسألهٔ خود را به حکم ساده‌تر زیر تبدیل کرده‌ایم:

> اگر $T = \triangle ABC$ یک مثلث و M وسط ضلع AB و N وسط ضلع AC باشد، آنگاه پاره‌خط MN با ضلع BC موازی است (شکل ۵۴).

برای تحقیق حکم اخیر از هندسهٔ دکارتی استفاده می‌کنیم. هنگام استفاده از مختصات باید مختصات را طوری انتخاب کنیم که مناسبِ مسأله، و یاریگر باشد نه سد راه. با انجام یک دوران و انتقالی قائم، می‌توانیم فرض کنیم که رأسهای B و C در راستای افقی روی محور x واقع‌اند و رأس A بالای محور x است. با انتقالی افقی، می‌توانیم فرض کنیم که رأس A روی قسمت مثبت محور y قرار دارد. شکل ۵۵ را ببینید. فرض می‌کنیم $A = (۰, a)$، $B = (b, ۰)$ و $C = (c, ۰)$.



شکل۵۵

اکنون به آسانی می‌توان حساب کرد که وسط ضلع AB نقطهٔ $M = \left(\frac{b}{۲}, \frac{a}{۲}\right)$ است. وسط ضلع AC نقطهٔ $N = \left(\frac{c}{۲}, \frac{a}{۲}\right)$ است. توجه کنید که شیب MN برابر است با

$$\frac{a/۲ - a/۲}{c/۲ - b/۲} = ۰$$

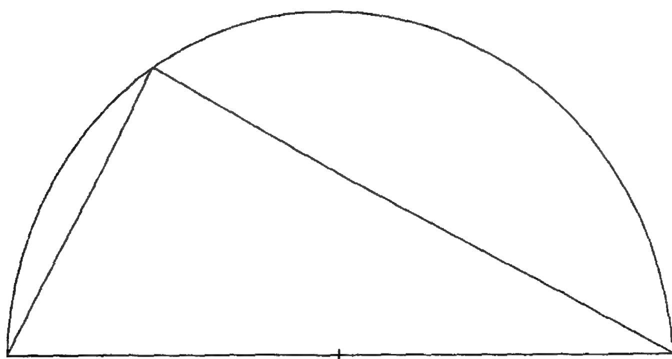
به بیان دیگر، MN افقی است. اما قاعدهٔ BC در مثلث ABC نیز افقی است. نتیجه می‌گیریم که MN با BC موازی است. این همان نتیجهٔ مطلوب است. □

باز هم توجه کنید که در راه‌حل مسألهٔ قبل از روش ساده‌سازی استفاده کرده‌ایم: مسألهٔ اولیه را مرحله به‌مرحله به پرسشهایی ساده‌تر تبدیل کردیم.

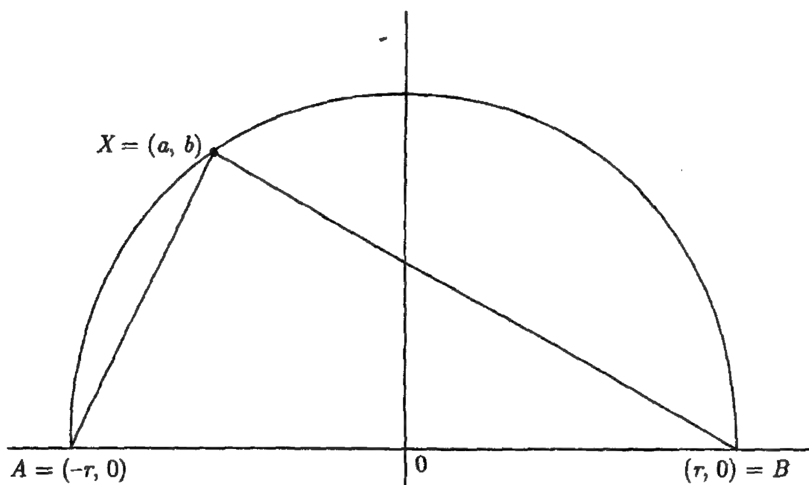
مسألهٔ ۲.۲.۲ ثابت کنید هر زاویهٔ روبه‌رو به نیمدایره زاویه‌ای قائمه است.

راه‌حل. شکل ۵۶ را ببینید. این شکل یادآوری می‌کند که منظور از اینکه زاویه‌ای روبه‌رو به کمانی از دایره است چیست. در حل مسأله نیز از این شکل استفاده می‌کنیم.

باید مختصاتی را معرفی کنیم. فرض می‌کنیم مرکز نیمدایره مبدأ، شعاع آن r، و رأس زاویهٔ موردبحث $X = (a, b)$ باشد (شکل ۵۷).



شکل۵۶



شکل۵۷

شیب پاره‌خط AX برابر $\frac{b-0}{a-(-r)}$ است. شیب پاره‌خط XB برابر $\frac{b-0}{a-r}$ است. حاصل‌ضرب این دو شیب برابر است با

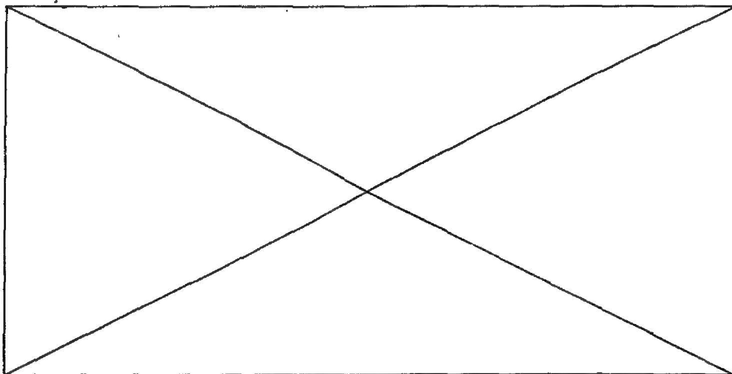
$$\frac{b^2}{a^2-r^2} \qquad (*)$$

اما چون نقطهٔ (a,b) روی دایره واقع است، می‌دانیم که $a^2+b^2=r^2$ یا $b^2=r^2-a^2$. استفاده از این اتحاد در $(*)$ نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب دو شیب ۱− است. نتیجه می‌گیریم که دو ضلع زاویه بر هم عمودند. به بیان دیگر، زاویهٔ قائمه است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۳.۲.۲ فرض کنید B و C دو نقطهٔ ثابت متمایز در صفحه باشند. حرف α زاویه‌ای از $0°$ تا $90°$ را نشان می‌دهد. مکان هندسی همهٔ نقطه‌هایی مانند P را که اندازهٔ $\angle BPC$ برابر α باشد درنظر بگیرید. ثابت کنید که این مکان هندسی از دو مکان دایره تشکیل شده است.

مسألهٔ ۴.۲.۲ این گزاره درست است یا نادرست: «اگر قطرهای متوازی‌الاضلاعی بر هم عمود باشند، این متوازی‌الاضلاع مستطیل است.»

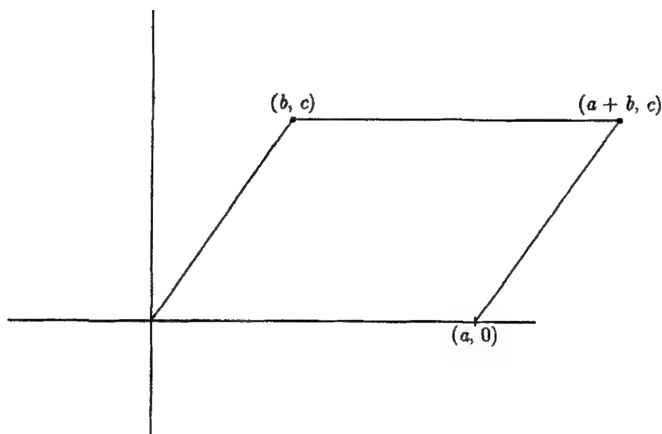
حکم بیان‌شده را کمی موشکافی می‌کنیم. در شکل ۵۸ مستطیلی می‌بینید که قطرهایش آشکارا بر هم عمود نیستند. اما حکم این نیست که قطرهای هر مستطیل بر هم عمودند. حکم این است که اگر قطرهای متوازی‌الاضلاعی بر هم عمود باشند، این متوازی‌الاضلاع مستطیل است.



شکل۵۸

راه‌حل. مختصات را مانند شکل ۵۹ اختیار می‌کنیم. توجه کنید که دو رأس متوازی‌الاضلاع $(a,0)$ و (b,c) هستند. دراین‌صورت، از آنجا که با متوازی‌الاضلاع سروکار داریم، عرض رأس بالا و سمت راست c، و طول این رأس $a+b$ است. (البته رأس پایین و سمت چپ $(0,0)$ است.)

شیب قطر اصلی $\frac{c}{a+b}$ است. شیب قطر کوچکتر $\frac{c}{b-a}$ است. این فرض که قطرها برهم عمودند



شکل۵۹

به معنی این است که حاصل‌ضرب این دو شیب ۱− است. پس

$$\frac{c}{b-a} \times \frac{c}{b+a} = -۱$$

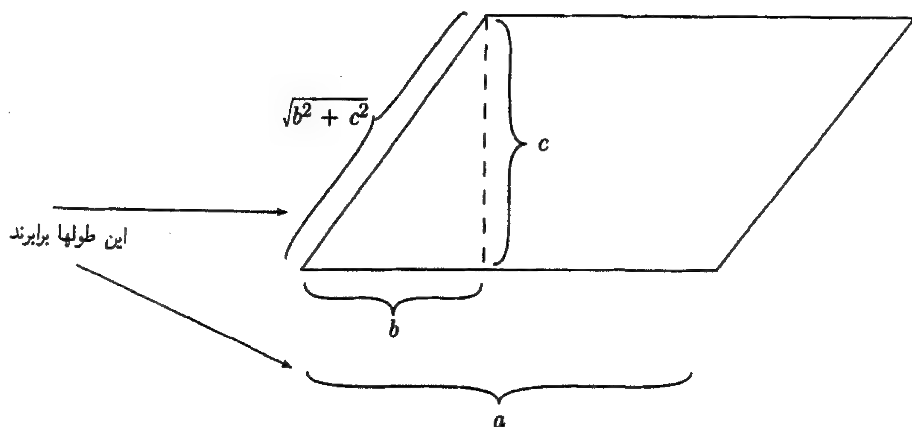
یا

$$c^۲ = -(b^۲ - a^۲)$$

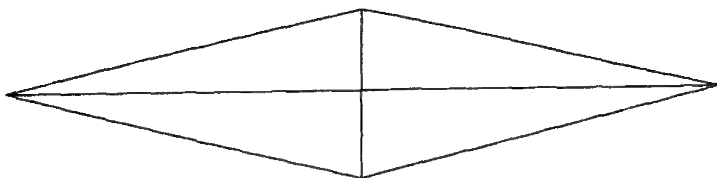
این رابطه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$b^۲ + c^۲ = a^۲ \qquad (**)$$

برابری که به‌دست آورده‌ایم بسیار نویدبخش است، چون شکل قضیهٔ فیثاغورس را دارد. این برابری یعنی اینکه طول ضلعی از متوازی‌الاضلاع که دو سرش نقطه‌های $(۰, ۰)$ و $(a, ۰)$ هستند برابر است با طول ضلعی که دو سرش نقطه‌های $(۰, ۰)$ و (b, c) هستند. شکل ۶۰ را ببینید. پس متوازی‌الاضلاع بی‌شک لوزی است.



شکل۶۰



شکل۶۱

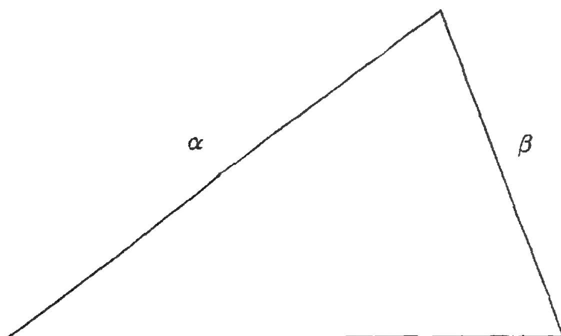
اما از همهٔ اطلاعات مسأله استفاده کرده‌ایم. چنین پیشامدی هشدار می‌دهد که ممکن است هدف نادرستی را تعقیب می‌کنیم. چند متوازی‌الاضلاع رسم می‌کنیم تا درستی حکم مسأله را بیازماییم.

قطرهای متوازی‌الاضلاع شکل ۶۱ بر هم عمودند. اما این متوازی‌الاضلاع آشکارا مستطیل نیست (اما لوزی است). پاسخ مسأله: **نادرست.** □

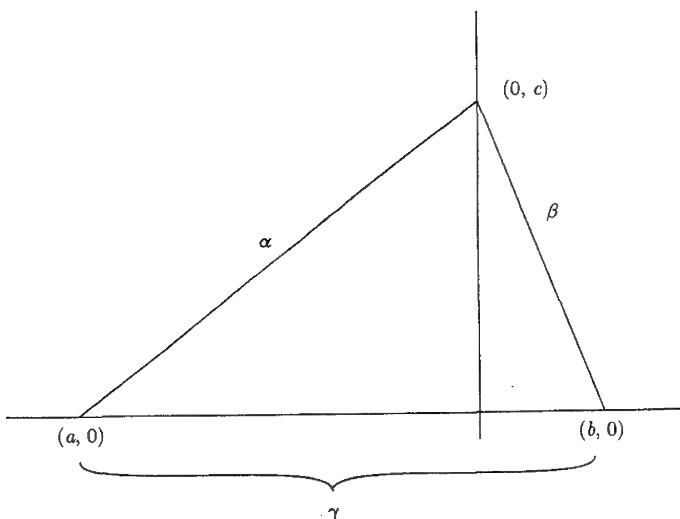
در مسألهٔ قبل درسی ساده ولی مهم نهفته است: تنها بیان خوب مسأله دلیل بر درستی مسأله یا فرمولبندی درست آن نیست. مسأله‌هایی که در زندگی روزمره با آنها روبه‌روییم این ویژگی را دارند؛ هیچ‌گاه مطمئن نیستیم سؤالی که می‌کنیم درست است، یا پاسخ سؤال مثبت است (یا، اغلب، اصلاً پاسخی دارد). اگرچه ممکن است این تذکرها تکراری یا شعارگونه به‌نظر آیند، بیانگر واقعیتی‌اند که عنوان کردن آن درکتاب درسی یا سرکلاس درس عملاً ناممکن است.

مسألهٔ ۵.۲.۲ مساحت مثلث را با فرمولی که در آن تنها طول سه ضلع مثلث به‌کار رفته است بیان کنید.

راه‌حل. طول ضلعهای مثلث را همان‌طورکه در شکل ۶۲ می‌بینید α، β و γ می‌گیریم. مثلث را مانند شکل ۶۳ در یک دستگاه مختصات قرار می‌دهیم. به این ترتیب $\alpha = \sqrt{a^2 + c^2}$، $\beta = \sqrt{b^2 + c^2}$ و $\gamma = b - a$. نقشهٔ ما این است که مساحت را برحسب a، b، c بیان و سپس این رابطه را به رابطه‌ای شامل α، β و γ تبدیل کنیم.



شکل۶۲



شکل۶۳

روشن است که مساحت مثلث برابر است با

$$A = \text{مساحت} = \frac{۱}{۲} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$
$$= \frac{۱}{۲} \times (b-a) \times c$$

اکنون چون می‌دانیم $b - a = \gamma$، مساحت را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$A = \frac{۱}{۲} \times \gamma \times c$$

اگر بتوانیم c را برحسب α، β و γ بیان کنیم، مسأله حل شده است.

درحقیقت، از دستگاه معادله‌های

$$\alpha^۲ = a^۲ + c^۲$$
$$\beta^۲ = b^۲ + c^۲$$
$$\gamma = b - a$$

متغیر c را برحسب α، β و γ پیدا می‌کنیم. البته این معادله‌ها خطی نیستند، و بنابراین با روشهای متعارف نمی‌توان مسأله را حل و فصل کرد. به ترفند متوسل می‌شویم (این روش را نباید دست‌کم گرفت).

با توجه به شکل، می‌بینیم که نقش α و β در مسأله متقارن است. پس انتظار داریم که عبارت نهایی برای c نسبت به α و β متقارن باشد. پس طبیعی است که عبارت $\alpha^۲ + \beta^۲$ را درنظر بگیریم. $\gamma^۲$ را از این عبارت کم می‌کنیم تا بعضی از جمله‌ها حذف شوند. به این ترتیب

$$\alpha^۲ + \beta^۲ - \gamma^۲ = ۲c^۲ + ۲ab \qquad (*)$$

$\alpha \times \beta$ عبارت متقارن دیگری از α و β است. اما ریشه‌های دوم در این عبارت چندان خوشایند نیستند. در عوض، عبارت $\alpha^2 \times \beta^2$ را درنظر می‌گیریم. به این ترتیب

$$\alpha^2 \times \beta^2 = (a^2 + c^2) \times (b^2 + c^2) = a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 + c^4 \qquad (**)$$

اگر بخواهیم (*) را با (**) ترکیب کنیم تطابقی بین جمله‌ها نمی‌بینیم. جمله‌های (*) همه از درجهٔ دو، و جمله‌های (**) همه از درجهٔ چهار هستند. پس عبارت زیر را درنظر می‌گیریم:

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 = (2c^2 + 2ab)^2 = 4c^4 + 4a^2b^2 + 8abc^2 \qquad (***)$$

به‌روشنی می‌بینید که تعدادی از جمله‌های (***) در (**) نیز وجود دارند. برای اینکه جمله‌هایی حذف شوند، سرانجام عبارت زیر را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 4[\alpha^2 \times \beta^2] - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 &= 4[a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 + c^4] \\ &\quad - [4c^4 + 4a^2b^2 + 8abc^2] \\ &= 4a^2c^2 + 4b^2c^2 - 8abc^2 \\ &= 4c^2[b-a]^2 \\ &= 4c^2\gamma^2 \end{aligned}$$

سرانجام اینکه

$$c = \frac{\sqrt{4[\alpha^2 \times \beta^2] - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2}}{2\gamma}$$

توجه کنید که تا اینجا فقط موفق شده‌ایم c را برحسب α، β و γ بیان کنیم.

اکنون مساحت مثلث برابر است با

$$A = \frac{1}{2}\gamma \times c = \frac{1}{4}\sqrt{2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\alpha^2\beta^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}$$

توجه کنید که فرمول بالا نسبت به α، β و γ متقارن است؛ یعنی اگر نقش α، β و γ را با هم عوض کنیم، فرمول تغییر نمی‌کند. به‌دقت فکر کنید که چرا چنین است. در برخی از کتابهای فرمول ([CRC] را ببینید) مساحت مثلث را به شکل سنتی‌تر زیر بیان می‌کنند:

$$A = \sqrt{s(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}$$

که در آن، $s = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$؛ یعنی s نصف محیط مثلث است. □

به‌عنوان مسأله‌ای (کمی) پیکارجو ثابت کنید فرمولی که به‌دست آوردیم واقعاً با فرمولی که از [CRC] بیان کردیم هم‌ارز است.

۳.۲ مسأله‌های هندسی گوناگون و نامتعارف

این بخش حاوی تعدادی مسألهٔ هندسی گوناگون، اکثراً در هندسهٔ مسطحه، است که در هیچ تقسیم‌بندی متعارفی نمی‌گنجند. درس نهفته در این مسأله‌ها این است که دانش بشری، و به‌خصوص روشهای مسأله حل کردن، هیچ مسیر خاص یا مرز مشخصی ندارد. اگرچه برای سازماندهی این کتاب بخشها و مباحث مشخصی را درنظر گرفته‌ایم، نباید فکر کنید که مسأله حل کردن قابل بخش‌بندی است. اگر مسأله‌ای را ببینید و امیدوار باشید که بتوانید مثلاً بگویید «این مسأله‌ای از هندسه است و بنابراین باید از این روشها استفاده‌کنم»، خود را گول زده‌اید. هیچ‌وقت پیشاپیش نمی‌دانید که چه روشهایی ممکن است به‌کار آید، و باید ذهن خود را آمادهٔ همهٔ امکانات کنید.

به هرحال، می‌توان گفت که مسأله‌های این بخش هندسی‌اند. اما روشهای گوناگونی برای حل این مسأله‌ها به‌کار می‌رود.

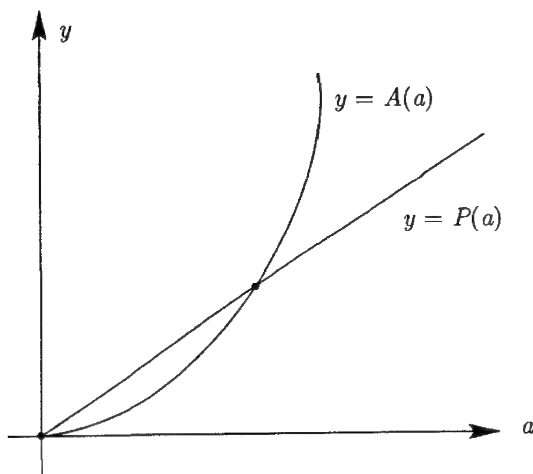
مسألهٔ ۱.۳.۲ فرض کنید T مثلثی در صفحه باشد. ثابت کنید مثلثی متشابه با T وجود دارد که مساحت و محیط آن برابرند.

راه‌حل. P را محیط مثلث T و A را مساحت آن بگیرید. به‌ازای $a > 0$ فرض کنید aT مثلث T باشد که ضلعهایش با ضریب a بزرگ (یا کوچک) شده‌اند. مثلاً اگر $a = 2$، طول هریک از ضلعهای $2T$ دو برابر طول ضلع متناظرش در مثلث T است؛ اگر $a = \frac{1}{2}$، طول هر یک از ضلعهای $\frac{1}{2}T$ نصف طول ضلع متناظرش در مثلث T است؛ اگر $a = 1$، $1T$ همان مثلث T است.

نمودارهای محیط، $P(a)$، و مساحت، $A(a)$، مثلث aT را که در یک دستگاه محورهای مختصات رسم شده‌اند درنظر بگیرید. محور افقی باید محور a، و محور قائم باید یا $y = P(a)$ باشد یا $y = A(a)$.

محیط مثلث تابعی خطی از a است: وقتی مثلث با ضریب a منبسط یا منقبض می‌شود، هر ضلع با ضریب a منبسط یا منقبض می‌شود، و بنابراین محیط مثلث در a ضرب می‌شود. پس نمودار $P(a)$ خطی است که از مبدأ می‌گذرد و شیبش مثبت است. درواقع، $P(a) = Pa$. اما $A(a)$ تابعی درجهٔ دوم از a است: وقتی مثلث با ضریب a منبسط یا منقبض می‌شود، قاعده و ارتفاع هریک با ضریب a منبسط یا منقبض می‌شود، و در نتیجه مساحت با ضریب a^2 زیاد و یا کم می‌شود. پس نمودار $A(a)$ یک سهمی است که روبه بالا باز می‌شود و رأس آن مبدأ است؛ درواقع $A(a) = Aa^2$.

در شکل ۶۴ می‌بینید که نمودار $y = P(a)$ و $y = A(a)$ در ربع اول (بسته) یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. اولین نقطهٔ تقاطع در مبدأ است؛ این نتیجه جذابیت چندانی برای ما ندارد. نقطهٔ تقاطع دیگر، یعنی $a = \frac{P}{A}$، در مسألهٔ ما اهمیت بیشتری دارد. زیرا مقداری نابدیهی برای a است که به‌ازای آن محیط و مساحت aT برابرند. چون aT با T متشابه است، مسأله را حل کرده‌ایم. $\square$

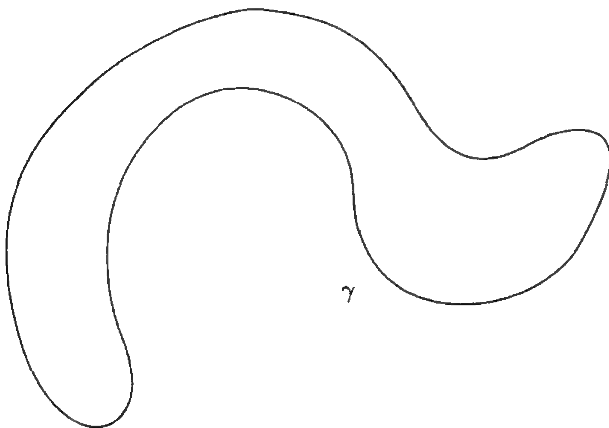


شکل۶۴

مسألهٔ ۲.۳.۲ (پیشرفته) خم بسته‌ای را که خود را قطع نمی‌کند با $\gamma : [\circ, \text{۱}] \to \mathbb{R}^\text{۲}$ نشان می‌دهیم. این نمادگذاری به‌معنی این است که γ تابع، دامنهٔ آن فاصلهٔ

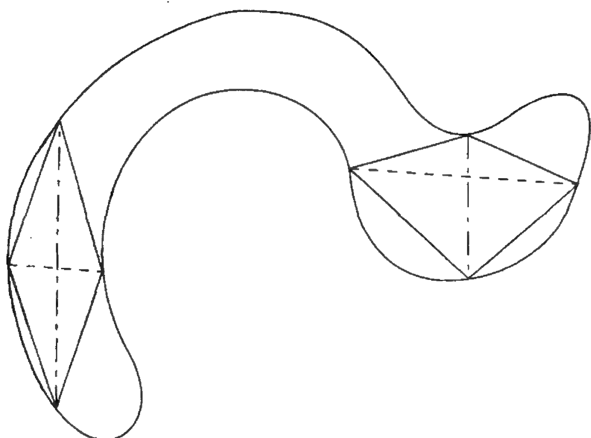
$$[\circ, \text{۱}] \equiv \{x \in \mathbb{R} : \circ \leqslant x \leqslant \text{۱}\}$$

و برد آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ همهٔ جفتهای مرتب از عددهای حقیقی است. فرض می‌کنیم $\gamma(\text{۱}) = \gamma(\circ)$، و درغیراین صورت $\gamma(s) \neq \gamma(t)$. شکل ۶۵ را ببینید. ثابت کنید چهار نقطه مانند A ، B، C و D روی خم وجود دارند که رأسهای یک مستطیل‌اند.



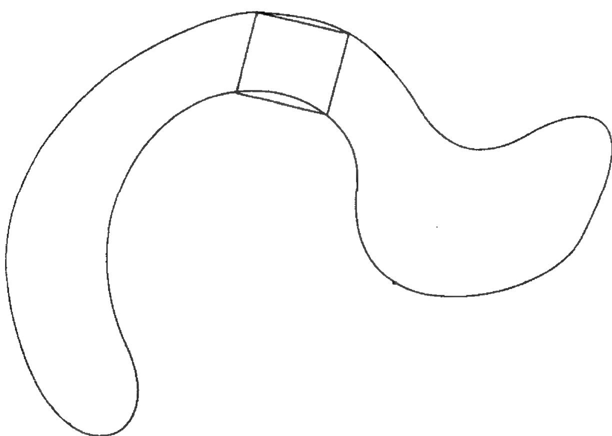
شکل۶۵

راه‌حل. شکل ۶۶ را ببینید. در طرف چپ شکل، یک چهارضلعی قرار دارد که رأسهایش روی خم مفروض‌اند. در طرف راست نیز یک چهارضلعی قرار دارد که رأسهایش روی خم مفروض‌اند. در هریک از این چهارضلعیها دو قطر را با دو نوع خط‌چین متمایز نشان داده‌ایم.



شکل۶۶

اکنون تصورکنید که چهارضلعی سمت چپ را با حرکت دادن رأسهای آن روی خم به‌طور پیوسته تغییر شکل دهیم تا به چهارضلعی سمت راست تبدیل شود. در چهارضلعی سمت چپ، قطری که خط‌چین کوتاه دارد کوتاهتر از قطری است که خط‌چین بلند دارد. در چهارضلعی سمت راست، قطری که خط‌چین کوتاه دارد بلندتر از قطری است که خط‌چین بلند دارد. بنابراین، برابر شدن طول دو قطر در موضعی میانی امکانپذیر است (شکل ۶۷). اگر بتوانیم ترتیبی دهیم که نقطهٔ تقاطع این دو قطر برابر وسط هرکدام باشد، چهارضلعی مستطیل می‌شود.

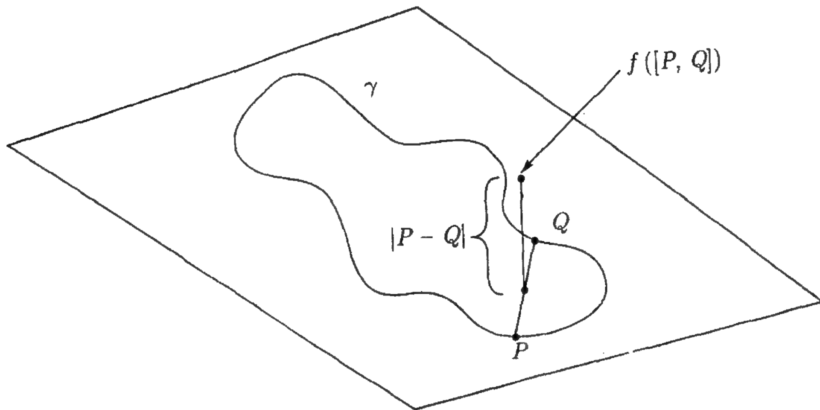


شکل۶۷

آنچه شرح دادیم شکل ساده‌ای است از چیزی که «روش پیوستگی» نام دارد. درواقع، این استدلال به‌تنهایی برای مشخص کردن مستطیل مطلوب کافی نیست. به روش پیوستگی پیچیده‌تری نیاز داریم که حساب طول قطرها و نقطهٔ وسط آنها را با هم نگاه دارد. به خواننده هشدار می‌دهیم که از چند ایدهٔ پیچیده استفاده خواهیم کرد. انتظار نداشته باشید که استدلال را در اولین مطالعه کاملاً درک کنید. این کار را مسبب آشنایی با چند ایدهٔ هندسی جدید بدانید.

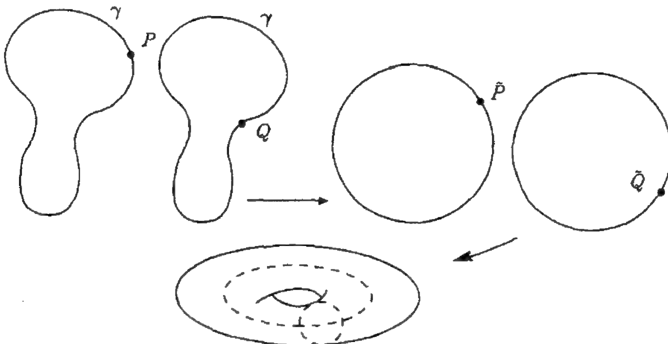
جفتهای متشکل از نقاط خم γ را درنظر بگیرید، ولی بین جفت (P, Q) و جفت (Q, P) تمایز قائل نشوید. به بیان دیگر، جفتهای نامرتب از نقاط γ را درنظر بگیرید (به‌زودی به این ایده برمی‌گردیم و روشن می‌کنیم که این شیءِ هندسی واقعاً چیست). مجموعهٔ این جفتهای نامرتب را با S نشان دهید. هر عضو S را، که جفت نامرتبی از نقاط خم γ است، با $[P, Q]$ نمایش دهید.

اکنون فرض کنید خم γ در صفحهٔ x-y در فضای سه‌بعدی قرار داشته باشد. به‌ازای هر $[P, Q] \in S$، وسط پاره‌خط PQ را پیدا می‌کنیم، و $f([P, Q])$ را نقطه‌ای در فضا و به فاصلهٔ $|P - Q|$ بالای نقطهٔ وسط PQ می‌گیریم. شکل ۶۸ را ببینید. تابع f تابعی پیوسته از S به فضای اقلیدسی سه‌بعدی است.

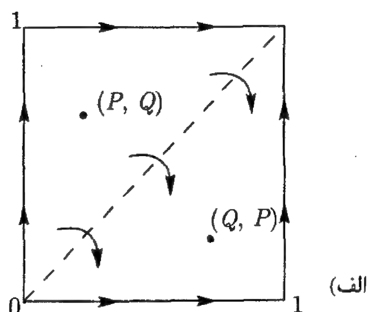


شکل۶۸

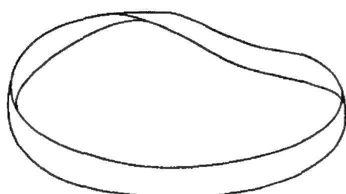
اکنون، S از نظر هندسی چه شیئی است؟ مجموعهٔ جفتهای مرتب از نقاط γ به‌طور طبیعی با یک چنبره در تناظر است؛ شکل ۶۹ را ببینید. اما وضعیت را با یکی گرفتن (P, Q) و (Q, P) پیچیده‌تر کرده‌ایم. نشانه‌گذاریهای شکل ۷۰ (الف) نشان می‌دهند که این‌کار چگونه انجام می‌شود. شیءِ هندسی حاصل چیزی است که سطح «سوناپذیر» نام دارد؛ و درواقع نوار موبیوس است (شکل ۷۰ (ب) را ببینید).



شکل۶۹



نوار موبیوس



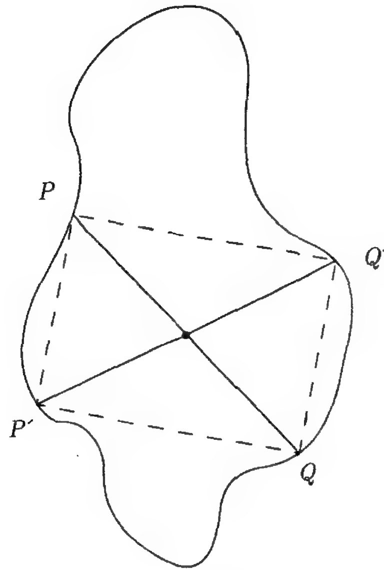
شکل ۷۰

اما تابع f تابعی پیوسته از S به فضای سه‌بعدی است. اگر f یک‌به‌یک باشد، تصویر آن تجسم S به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای سه‌بعدی خواهد بود. هنوز تناقضی در میان نیست، چون چنبره با یکی سازیهای دیگری که مشخص کردیم هم‌ارز با نوار موبیوس است. اما اکنون بنابر آنچه در زیر آورده‌ایم به تناقض می‌رسیم. لبهٔ مرزی سطحی که در فضای سه‌بعدی نشانده‌ایم یک خم بستهٔ ساده است. اگر یک «قرص» توپولوژیکی به این خم بچسبانیم، سطحی بسته ایجاد می‌شود. نتیجه یک «شب‌کلاه» است؛ به بیان دیگر، این کار تجسم صفحهٔ تصویری به‌عنوان سطحی نشانده‌شده در فضای سه‌بعدی است. اما معلوم شده است که چنین چیزی ممکن نیست. [شاید لازم باشد برای درک این مفاهیم کمک بگیرید.] بنابراین f یک‌به‌یک نیست. یعنی چه؟

این به‌معنی آن است که دو جفت (نامرتب) $[P, Q]$ و $[P', Q']$ وجود دارد که تصویر آنها تحت f یکی است. یعنی اینکه وسط پاره‌خطهای PQ و $P'Q'$ یکی است؛ گذشته از این، طول پاره‌خطهای PQ و $P'Q'$ یکی است، چون ارتفاع نقطه‌های $f([P, Q])$ و $f([P', Q'])$ بالای صفحهٔ x-y یکی است.

اما اکنون شکل ۷۱ را ببینید. اینکه پاره‌خطهای PQ و $P'Q'$ طول و نقطهٔ وسط یکسان دارند مستلزم این است که این دو پاره‌خط قطرهای یک مستطیل باشند. به بیان دیگر، نقطه‌های P، Q، P' و Q' چهار نقطه روی خم γ و رأسهای یک مستطیل‌اند. □

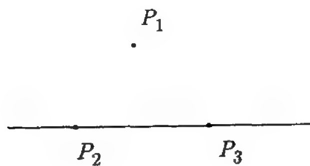
در زمان نگارش این کتاب، تعیین اینکه آیا روی هر خم γ مانند مسألهٔ ۲.۳.۲ چهارنقطه وجود دارد که رأسهای یک مربع باشند یا نه، مسأله‌ای حل‌نشده است.

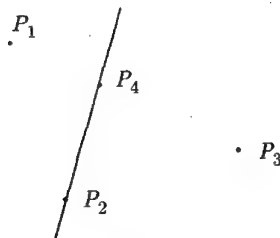


شکل۷۱

مسألهٔ ۳.۳.۲ فرض کنید P_1، P_2، P_3، ... و P_k تعدادی متناهی از نقاط صفحه باشند که همگی همخط نباشند. ثابت کنید خطی در صفحه وجود دارد که تنها از دوتا از این نقطه‌ها می‌گذرد.

راه‌حل. شکل ۷۲ ایده‌های این مسأله را نشان می‌دهد. در بخش اول شکل، سه‌نقطه می‌بینید که همخط نیستند. در این بخش خطی نیز می‌بینید که تنها از دونقطه گذشته است. در بخش دوم شکل ۷۲ چهار نقطه می‌بینید که همگی همخط نیستند. در این بخش نیز خطی می‌بینید که تنها از دو نقطه گذشته است.





شکل۷۲

اگر گردایه‌ای بزرگ اما متناهی از نقاط در صفحه داشته باشیم که به شیوه‌ای دلخواه آرایش یافته‌اند، چگونه می‌توانیم دو نقطه بیابیم که خط گذرنده از آنها از هیچ‌یک از دیگر P_jها نگذرد؟ این مسأله را با یکی از توانمندترین فنون ریاضیات حل می‌کنیم: یعنی، مسأله‌ای اکسترمال را حل می‌کنیم.

مجموعهٔ T از همهٔ جفتهای مرتب مانند (ℓ, P_m) را درنظر بگیرید، به‌طوری‌که ℓ خطی گذرنده از دست‌کم دوتا از P_jها و P_m نقطه‌ای باشد که روی خط ℓ نیست (چنین نقطهٔ P_mای وجود دارد، چون فرض کرده‌ایم که همهٔ نقطه‌ها همخط نیستند). تابع

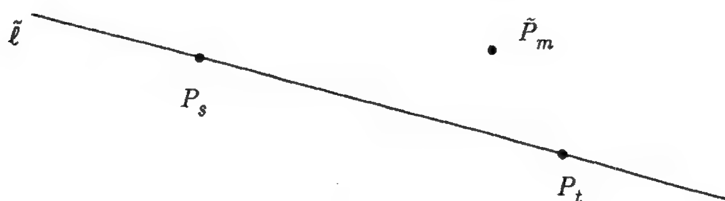
$$f : T \to \mathbb{R}$$

را این‌طور تعریف کنید

$$f((\ell, P_m)) = \text{فاصلهٔ } \ell \text{ از } P_m$$

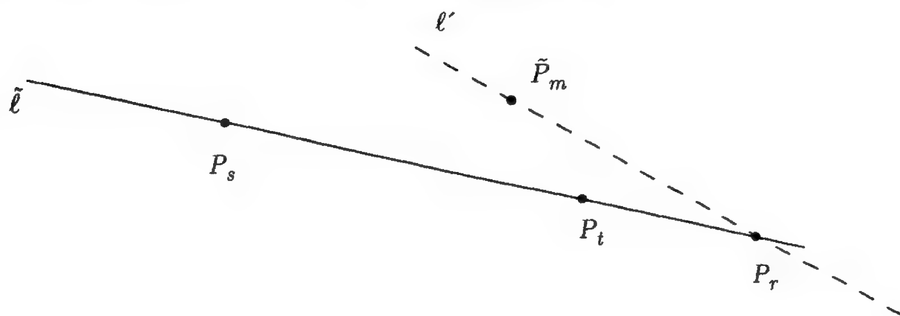
توجه کنید که مقادیر f همیشه مثبت‌اند. همچنین، دامنهٔ f مجموعه‌ای متناهی است (چون همیشه تعدادی متناهی خط مانند ℓ و تعداد متناهی نقطه مانند P_m داریم). بنابراین جفتی مانند $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ وجود دارد که f به‌ازای آن مینیمم است. ادعا می‌کنیم که خط $\tilde{\ell}$ همان خط مطلوب است.

شکل ۷۳ را بررسی کنید. در این شکل آرایشی ممکن برای خط $\tilde{\ell}$ و نقطهٔ $\tilde{P}_m$ را می‌بینید. به‌خاطر آورید که بنابر تعریف، $\tilde{\ell}$ خطی است که (دست‌کم) از دوتا از P_jها می‌گذرد. آرایشی ممکن برای این دو نقطه را در شکل ۷۳ می‌بینید. ادعا می‌کنیم که $\tilde{\ell}$ شامل نقطهٔ سومی مانند P_r نیست.



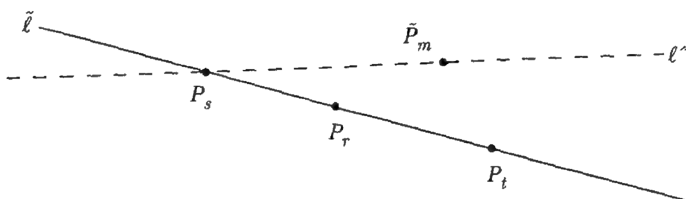
شکل ۷۳

اگر P_r مانند شکل ۷۴ قرار گرفته باشد، فاصلهٔ خط ℓ' که از $\tilde{P}_m$ و P_r می‌گذرد از P_t کمتر از فاصلهٔ $\tilde{P}_m$ از $\tilde{\ell}$ است. این نتیجه با مینیمم بودن تابع f در جفت $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ تناقض دارد. اگر P_r مانند

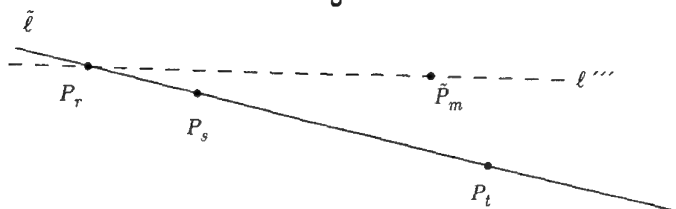


شکل ۷۴

شکل ۷۵ قرار گرفته باشد، فاصلهٔ خط ℓ'' که از $\tilde{P}_m$ و P_s می‌گذرد از P_r کمتر از فاصلهٔ $\tilde{P}_m$ از $\tilde{\ell}$ است. این نتیجه نیز با مینیمم بودن تابع f در جفت $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ تناقض دارد. اگر P_r مانند شکل ۷۶ قرار گرفته باشد، فاصلهٔ خط ℓ''' که از $\tilde{P}_m$ و P_r می‌گذرد از P_s کمتر از فاصلهٔ $\tilde{P}_m$ از $\tilde{\ell}$ است. این نتیجه نیز با مینیمم بودن تابع f در $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ تناقض دارد.



شکل۷۵



شکل۷۶

تا اینجا، با ذکر همهٔ جزئیات، فقط استدلال کرده‌ایم که اگر آرایش جفت مینیمال $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ مانند شکل ۷۳ باشد، تنها دوتا از P_jها روی $\tilde{\ell}$ هستند. از شما می‌خواهیم که آرایشهای ممکن دیگر $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ را درنظر بگیرید و استدلال کنید که نقطهٔ سومی مانند P_r روی $\tilde{\ell}$ نیست، زیرا درغیراین صورت تناقضی با مینیمم بودن تابع f در جفت $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ پیش می‌آید.

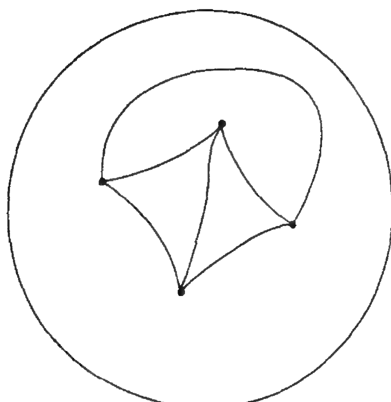
در نتیجه، خط $\tilde{\ell}$ از جفت $(\tilde{\ell}, \tilde{P}_m)$ که f را مینیمم می‌کند، خطی است که تنها از دو نقطه از نقطه‌های P_1، P_2، P_3، ... و P_k می‌گذرد. □

مسألهٔ پیکارجوی ۴.۳.۲ ثابت کنید حکم مسألهٔ قبل درصورتی‌که تعداد اعضای گردایهٔ نقاط مفروض متناهی نباشد ممکن است نادرست باشد.

راهنمایی: به مشبکهٔ عددهای صحیح فکر کنید.

مسألهٔ پیکارجوی ۵.۳.۲ برای مسألهٔ قبل راه‌حلی پیدا کنید که متکی به مسأله‌ای اکسترمالی نباشد، بلکه براساس تقسیم مسألهٔ موردبحث به چند حالت باشد.

در مسألهٔ ۳.۴.۱، بخش ۴.۱، در مورد گرافهای روی کره و فرمول اویلر بحث کردیم. گراف کامل با k رأس P_1، P_2، ... و P_k، بنابر تعریف، گراف متشکل از همهٔ کمانهایی است که همهٔ جفت نقطه‌های ممکن را به هم وصل می‌کنند. تلاقی کمانها مجاز نیست، چون تلاقی کمانها رأس اضافی ایجاد می‌کند.



شکل ۷۷

در شکل ۷۷ گراف کامل چهار رأسی را می‌بینید. این گراف را می‌توانیم زیرمجموعه‌ای از کره، بدون تلاقیهای ناضروری، مجسم کنیم. خودتان تحقیق کنید که هر یک از ۶ جفت نقطهٔ ممکن را می‌توان با یک کمان یا یال به هم وصل کرد.

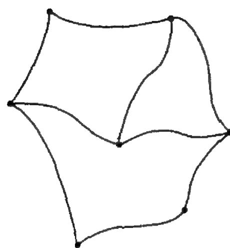
مسألهٔ ۶.۳.۲ تحقیق کنید که تجسم گراف کامل پنج رأسی به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از کره ناممکن است.

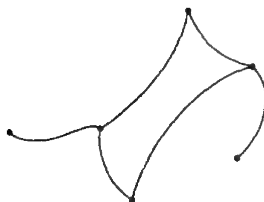
راه‌حل. برای انجام این کار از فرمول اویلر استفاده می‌کنیم. فرض کنید برخلاف حکم مسأله، بتوانیم گراف کامل را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از کره مجسم کنیم. روشن است که پنج‌رأس داریم، چون گراف کامل پنج رأسی را بررسی می‌کنیم. پس $V = ۵$. همچنین ده یال داریم، چون تعداد یالها همان تعداد جفت رأسهای ممکن، و بنابراین برابر با $\binom{۵}{۲} = ۱۰$ است. پس $E = ۱۰$. چند وجه داریم؟ به شکل ۷۸ توجه کنید. در این شکل چند گراف را می‌بینید. توجه کنید تنها درصورتی ممکن است وجهی با بیش از سه یال داشته باشیم که جفتی از رأسها به هم وصل نشده باشند. اگر همهٔ جفت رأسهای ممکن به هم وصل شده باشند (و هر جفت تنها یک‌بار به هم وصل شده باشند)، همهٔ وجه‌ها باید مثلث باشند.

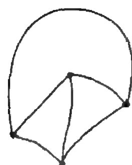
روشن است که در این مسأله با وضعیت اخیر سروکار داریم. چند مثلث وجود دارد؟ تعداد مثلثها آشکارا $\binom{۵}{۳}$ یا ۱۰ است. پس $F = ۱۰$. بنابر فرمول اویلر، می‌توان نوشت

$$۲ = V - E + F = ۵ - ۱۰ + ۱۰ = ۵$$

این رابطه آشکارا تناقض است. تنها نتیجه‌گیری ممکن این است که گراف کامل پنج رأسی را نمی‌توان به‌صورت زیرمجموعه‌ای از کره مجسم کرد (اصطلاح فنی این است که گراف کامل پنج‌رأسی را نمی‌توان در کره نشاند). به این ترتیب مسأله حل شده است. □





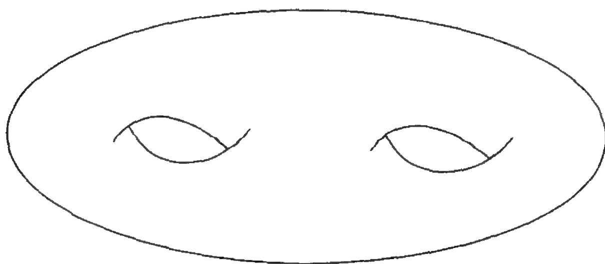


شکل۷۸

مسألهٔ پیکارجوی ۷.۳.۲ ثابت کنید که گراف کامل پنج‌رأسی را **می‌توان** در چنبره نشاند.

مسألهٔ پیکارجوی ۸.۳.۲ بزرگترین مقدار k به‌طوری‌که گراف کامل k رأسی را بتوان در چنبره نشاند چیست؟

مسألهٔ پیکارجوی ۹.۳.۲ بزرگترین مقدار k به‌طوری‌که گراف کامل k رأسی را بتوان در چنبرهٔ دوحفره‌ای (شکل ۷۹) نشاند چیست؟



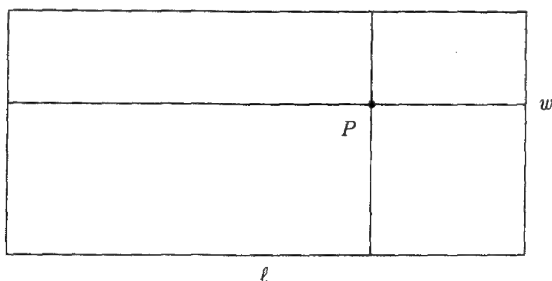
شکل۷۹

پاره‌خط AB را وتر ناحیهٔ مسطح U می‌نامیم درصورتی‌که A و B نقاط مرزی U باشند. در بحث زیر، فقط ناحیه‌های محدب و بسته را درنظر می‌گیریم. [ناحیهٔ U را درصورتی محدب می‌نامیم

که اگر P و Q دو نقطه درون U باشند، پاره‌خط PQ نیز کاملاً درون U باشد.] پس هر وتری درون ناحیه است. نقطهٔ P را که درون ناحیه باشد نقطهٔ هم‌وتری می‌نامیم درصورتی‌که همهٔ وترهایی که از P می‌گذرند طول یکسان داشته باشند.

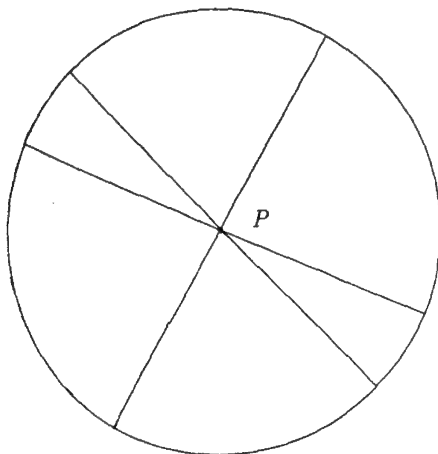
مسألهٔ ۱۰.۳.۲ آیا هر ناحیهٔ محدب بسته نقطهٔ هم‌وتری دارد؟ آیا هیچ ناحیهٔ محدب بسته‌ای وجود ندارد که نقطهٔ هم‌وتری داشته باشد؟

راه‌حل. مستطیل شکل ۸۰ هیچ نقطهٔ هم‌وتری ندارد. برای پی بردن به این موضوع توجه کنید هر نقطه مانند P که درون مستطیل انتخاب کنیم، همیشه وتری افقی به طول ℓ و وتری قائم به طول w وجود دارد که هر دو از P می‌گذرند. چون $\ell \neq w$، P نقطهٔ هم‌وتری نیست.



شکل ۸۰

مرکز قرص شکل ۸۱، نقطهٔ P، نقطه‌ای هم‌وتری است. هر وتری که از P بگذرد قطر دایرهٔ مرزی قرص است، و طول همهٔ قطرها یکسان است. □



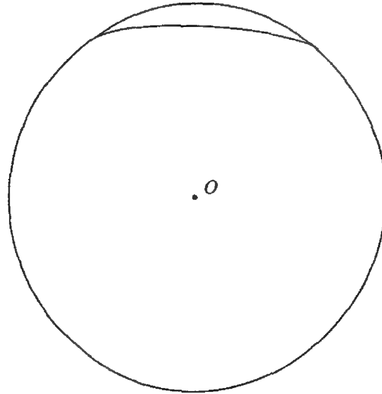
شکل ۸۱

مسألهٔ ۱۱.۳.۲ آیا شکل مسطح محدب بسته‌ای، غیر از قرص، وجود دارد که نقطهٔ هم‌وتری داشته باشد؟

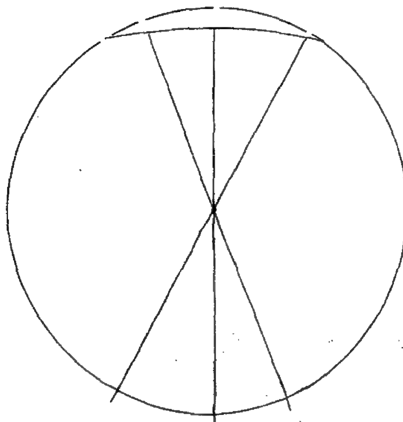
راه‌حل. پیش از اینکه«راه‌حل صوری» این مسأله را بخوانید، کمی با مداد و کاغذ تجربه کنید (یا اگر سخت‌افزار و نرم‌افزار کامپیوتر مناسب در اختیار دارید، از گرافیک کامپیوتری استفاده کنید). حدس می‌زنید پاسخ چیست؟

درواقع بی‌نهایت شکل مسطح محدب بسته وجود دارد که نقطهٔ هم‌وتری دارند. فنّی را برای ساختن چنین ناحیه‌هایی شرح می‌دهیم. کار را با ناحیه‌ای که هم‌اکنون می‌دانیم نقطهٔ هم‌وتری دارد، یعنی با قرص شکل ۸۱، شروع می‌کنیم. این ناحیه را اجتماع وترهایی درنظر می‌گیریم که از مرکز قرص می‌گذرند؛ این اجتماع تقریباً اجتماع اجزای جدا از هم است، چون وترها تنها یک نقطهٔ مشترک دارند، که همان مرکز قرص است.اکنون این وترها را کمی جابه‌جا می‌کنیم.

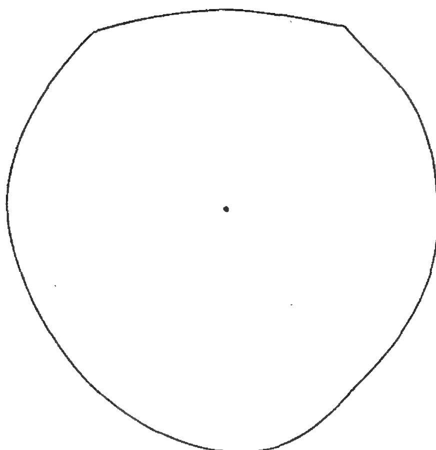
شکل ۸۲ را ببینید. خم نسبتاً تختی در بخش بالایی قرص رسم شده است. اکنون همهٔ وترهای گذرنده از مرکز را که این خم را قطع می‌کنند درنظر می‌گیریم، و هر یک از آنها را در امتداد خود رو به پایین منتقل می‌کنیم تا نقطهٔ بالایی آن به خم تخت برسد. در شکل ۸۳ چند وتر می‌بینید که این عمل



شکل۸۲



شکل۸۳



شکل۸۴

روی آنها انجام شده است. نتیجهٔ انتقال همهٔ این (بی‌نهایت) پاره‌خط ناحیهٔ جدیدی است که در شکل ۸۴ می‌بینید. توجه کنید که این ناحیه محدب و بسته است و نقطهٔ هم‌وتری دارد. وترهای این ناحیه همان وترهای قرص هستند، و فقط برخی از آنها روبه پایین منتقل شده‌اند. توجه کنید که ناحیهٔ حاصل قرص نیست. به این ترتیب موفق شده‌ایم ناحیهٔ جدیدی بسازیم که نقطهٔ هم‌وتری داشته باشد. □

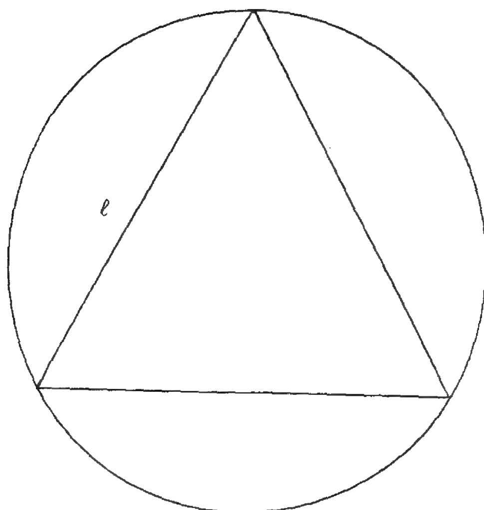
مسألهٔ پیکارجوی ۱۲.۳.۲ ناحیهٔ محدب بستهٔ جدیدی که نقطهٔ هم‌وتری داشته باشد به این ترتیب بسازید: وتری با طول ثابت درنظر بگیرید (مثلاً سوزنی که قبلاً در مرکب غوطه‌ور کرده باشید) و آن را درحالی‌که همواره از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد °۳۶۰ حرکت دهید. ناحیه‌ای که باید بتوانید به این شیوه بسازید یک «مثلث گرد شده» است.

مسألهٔ تعیین اینکه ناحیهٔ مسطح محدب بسته‌ای با دو نقطهٔ هم‌وتری وجود دارد یا نه هنوز مسأله‌ای حل‌نشده است.

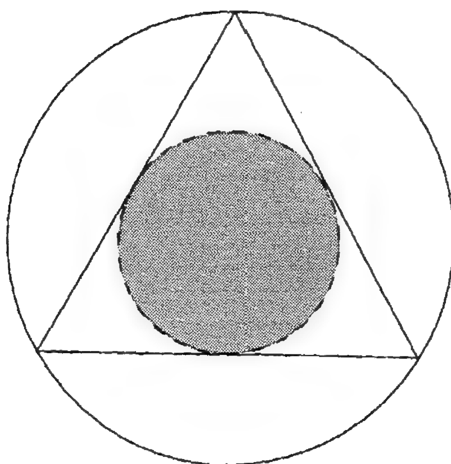
مسألهٔ ۱۳.۳.۲ (پارادوکس برتران) دایرهٔ ثابتی به شعاع ۱ درنظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در این دایره را مانند شکل ۸۵ درنظر بگیرید. طول ضلع این مثلث را ℓ می‌گیریم. فرض کنید وتر d (به طول m) در دایره به‌طور «تصادفی» انتخاب شده باشد. احتمال اینکه طول وتر، m، از طول ضلع مثلث محاط در دایره، ℓ، بیشتر باشد چقدر است؟

راه‌حل. «پارادوکس» این است که این مسأله سه راه‌حل با پاسخهای متفاوت دارد که هر سه به یک اندازه معتبرند. این سه راه‌حل به ظاهر متناقض را به‌ترتیب عرضه می‌کنیم. در انتها شرح خواهیم داد که چطور ممکن است چنین مسأله‌ای سه پاسخ متمایز داشته باشد.

راه‌حل ۱. به شکل ۸۶ توجه کنید. در این شکل قرص باز سایه‌خورده‌ای را می‌بینید که دایرهٔ مرزی آن از داخل بر مثلث محاط در دایره مماس است. اگر وسط وتر تصادفی d درون قرص سایه‌خورده باشد،



شکل۸۵

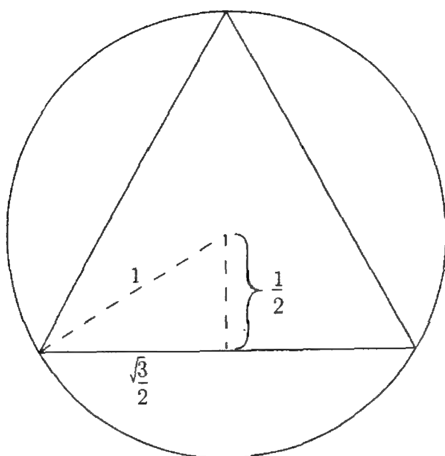


شکل۸۶

آنگاه $\ell < m$. اگر وسط وتر تصادفی d بیرون از قرص سایه‌خورده باشد، آنگاه $\ell \leqslant m$. پس احتمال اینکه طول d بزرگتر از طول ℓ باشد،

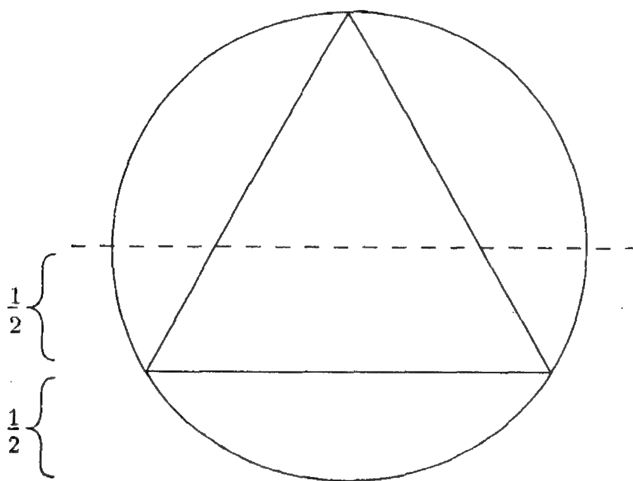
$$\frac{\text{مساحت قرص سایه‌خورده}}{\text{مساحت قرص واحد}}$$

است. اما بررسی مثلث متساوی‌الاضلاع (شکل ۸۷) نشان می‌دهد که شعاع قرص سایه‌خورده $\frac{۱}{۲}$، و بنابراین مساحت آن $\frac{\pi}{۴}$ است. مساحت قرص بزرگتر π است. نسبت این دو مساحت $\frac{۱}{۴}$ است. نتیجه می‌گیریم احتمال اینکه طول وتر به تصادف انتخاب‌شده از ℓ بیشتر باشد $\frac{۱}{۴}$ است.



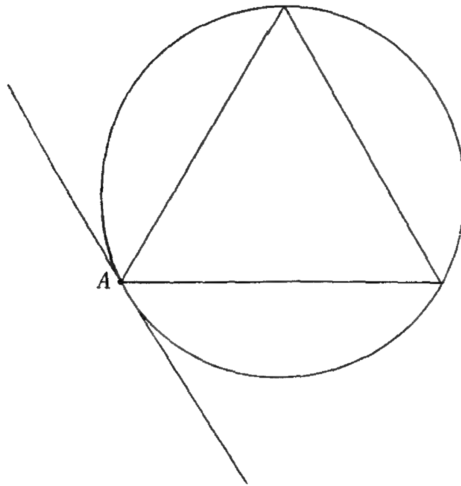
شکل۸۷

راه‌حل ۲. به شکل ۸۸ توجه کنید. می‌توانیم فرض کنیم که وتر به تصادف انتخاب‌شده افقی باشد (وضعیتهای دیگر وتر را به شیوهٔ مشابهی می‌توان بررسی کرد). توجه کنید که اگر فاصلهٔ وتر d از قاعدهٔ مثلث کوچکتر از یا برابر با $\frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه $m \leqslant \ell$، ولی اگر این فاصله بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ باشد (و بزرگتر از ۱ نباشد)، $m > \ell$. پس می‌بینیم که به احتمال $\frac{۱}{۲}$ طول وتر d بزرگتر از طول ضلع مثلث است.

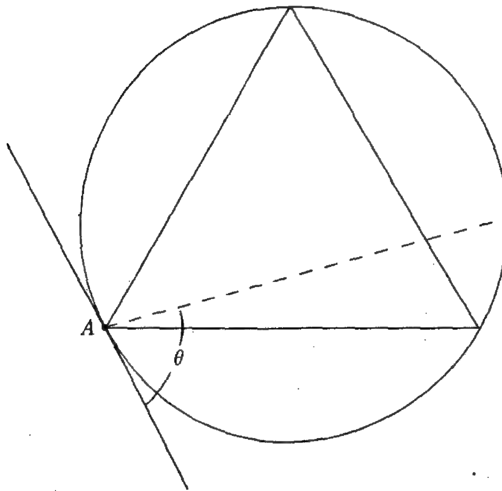


شکل۸۸

راه‌حل ۳. به شکل ۸۹ توجه کنید. می‌توانیم فرض کنیم که یک سر وتر به تصادف انتخاب‌شده رأس A از مثلث محاط در دایره باشد (رأس سمت چپ در پایین). زاویهٔ بین وتر و خط مماس بر دایره در رأس A را θ می‌نامیم (شکل ۹۰ را ببینید). اگر این زاویه بین °۰ و °۶۰، یا خود این دو مقدار، باشد، طول وتر کوچکتر از یا برابر با ℓ است. اگر این زاویه اکیداً بین °۶۰ و °۱۲۰ باشد، طول وتر بزرگتر از ℓ است.



شکل۸۹



شکل۹۰

سرانجام اگر این زاویه بین ۱۲۰° و ۱۸۰°، یا خود این دو مقدار، باشد، طول وتر کمتر از ℓ است. پس می‌بینیم احتمال اینکه طول وتر بزرگتر از ℓ باشد $\frac{۱}{۳} = \frac{۶۰}{۱۸۰}$ است. □

چگونه ممکن است مسأله‌ای کاملاً معقول سه پاسخ متمایز داشته باشد، و در عین حال مطمئن باشیم که هر یک از این سه پاسخ درست است؟ جواب این است که وقتی با فضای احتمالی سروکار داریم که بی‌نهایت عضو دارد (یعنی با مسأله‌ای سروکار داریم که در آن بی‌نهایت پیشامد وجود دارد ـ مثلاً در این مسأله بی‌نهایت وضعیت برای وتر به تصادف انتخاب‌شده وجود دارد)، بی‌نهایت راه برای

تخصیص یکنواخت احتمالها به پیشامدها وجود دارد.

سالها به دلیل وجود پارادوکسهایی مانند این پارادوکس، موضوع نظریهٔ احتمال چندان مورد توجه نبود. ابزار لازم برای متکی کردن نظریهٔ احتمال به پایه‌ای دقیق با ابداع شاخه‌ای از ریاضیات به نام «نظریهٔ اندازه» (هانری لبگ، ۱۹۰۶) به‌دست آمد. مسأله‌هایی از این دست در درسهای پیشرفتهٔ احتمالات بررسی می‌شوند.

۴.۲ هندسهٔ فضایی

در حال حاضر هندسهٔ فضایی دیگر یکی از بخشهای اساسی برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستانی یا کالجها نیست. مثلثات کروی نیز مبحث دیگری است که کنار گذاشته شده است. اما به هر حال، همهٔ ما در درس حسابان یا متغیرهای حقیقی قدری با هندسهٔ فضایی آشنا شده‌ایم. برای حل مسأله‌های این بخش هیچ پیش‌زمینهٔ خاصی از آشنایی با هندسهٔ فضایی لازم نیست. در بعضی از راه‌حلها از ایده‌هایی که قبلاً در این کتاب معرفی کرده‌ایم استفاده شده است. برای حل کردن مسأله‌های دیگر فقط عزم جزم و بینش لازم است.

مسألهٔ ۱.۴.۲ چندوجهی شکلی فضایی است که سطح مرزی آن اجتماع تعدادی متناهی چندضلعی مسطح است. اجسام افلاطونی، مانند مکعب، چهاروجهی، یا دوازده‌وجهی مثالهایی از این شکلهای فضایی هستند. توجه خود را تنها به چندوجهیهایی معطوف می‌کنیم که از نظر «توپولوژیکی بدیهی»اند، یعنی حفره ندارند. مثلاً چندوجهیهایی به شکل چنبره یا استوانه را درنظر نمی‌گیریم.

ثابت کنید که اگر در یک چندوجهی هر رأس دقیقاً بین سه وجه مثلثی مشترک باشد، این چندوجهی کلاً چهار وجه دارد.

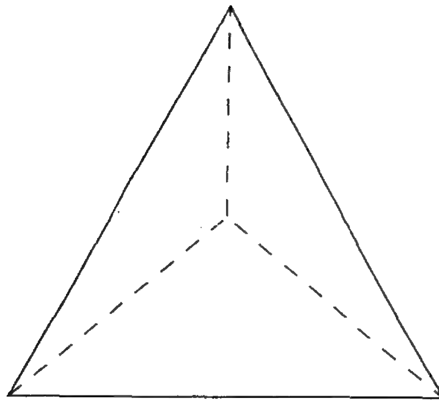
راه‌حل. با استفاده از فرمول اویلر که در بخش ۴.۱ کشف کردیم استدلال می‌کنیم:

$$V - E + F = ۲$$

این فرمول را برای گرافهای روی کره ثابت کردیم، ولی پی بردن به اینکه هر چندوجهی را می‌توان به‌طور پیوسته طوری تغییر شکل داد که مرز آن روی کره قرار گیرد چندان دشوار نیست. پس فرمول اویلر را می‌توان برای چندوجهیهای موردنظر ما در این مسأله به‌کار گرفت.

تعداد رأسهای چندوجهی را V می‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که در هر رأس سه وجه مثلثی تلاقی می‌کنند. پس در هر رأس سه یال تلاقی می‌کنند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که $E = ۳V$؟ نه کاملاً، چون با این حساب هر یال را دوبار شمرده‌ایم؛ توجه کنید که هر یال دو رأس دارد. درواقع باید $E = \frac{۳V}{۲}$.

به همین ترتیب، چون در هر رأس سه وجه مثلثی تلاقی می‌کنند، ممکن است تمایل داشته باشیم که بگوییم $F = ۳V$. اما در این رابطه هر وجه را سه بار شمرده‌ایم، یک بار در هر رأس. پس درواقع



شکل۹۱

$V = \frac{۳V}{۳} = F$. اکنون فرمول اویلر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$۲ = V - E + F = V - \frac{۳V}{۲} + V$$

یا

$$V = ۴$$

نتیجه می‌گیریم که چندوجهی موردنظر ۴ رأس دارد. پس تعداد یالهای آن $۶ = \frac{۳V}{۲}$ و تعداد وجه‌های آن $۴ = V = F$ است. این چندوجهی همان چهاروجهی کلاسیک است (شکل ۹۱ را ببینید).
□

مسألهٔ پیکارجوی ۲.۴.۲ ثابت کنید که اگر همهٔ وجه‌های یک چندوجهی مربع باشند و در هر رأس سه وجه تلاقی کنند، چندوجهی باید مکعب باشد.

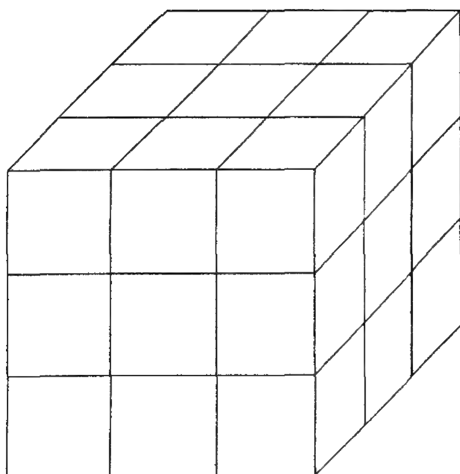
مسألهٔ پیکارجوی ۳.۴.۲ یک چندوجهی را که در هر رأس آن سه وجه پنج‌ضلعی تلاقی کنند درنظر بگیرید. چه نتیجه‌ای در مورد تعداد وجه‌ها می‌گیرید؟

مسألهٔ پیکارجوی ۴.۴.۲ توضیح دهید چرا ممکن نیست یک چندوجهی داشته باشیم که در هر رأس آن ۶ وجه مثلثی تلاقی کنند.

مسألهٔ پیکارجوی ۵.۴.۲ یک چندوجهی را درنظر بگیرید که در هر رأس آن ۵ وجه مثلثی تلاقی کنند. این چندوجهی چند وجه دارد؟

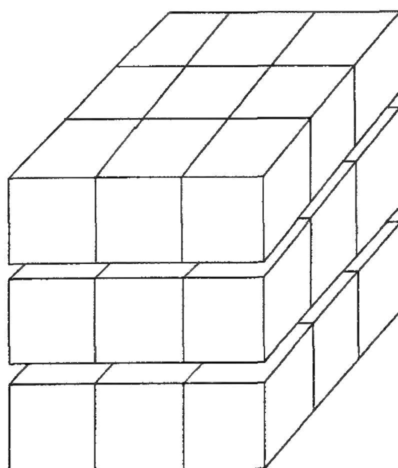
مسألهٔ ۶.۴.۲ مکعبی چوبی به طول ضلع ۳ اینچ درنظر بگیرید که مانند شکل ۹۲ روی هر وجه آن چهار خط متوازی رسم شده باشد.

با چند برش مستقیم با ارّه می‌توان همهٔ ۲۷ مکعبی را که این خطها مشخص می‌کنند برید؟ کمترین تعداد برشهای لازم چندتاست؟



شکل۹۲

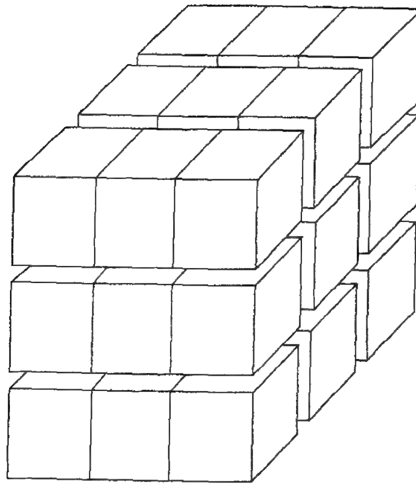
راه‌حل. توجه کنید که می‌توانیم با دو برش در امتداد دو خط متوازی روی یک وجه، مکعب را به سه قطعه هرکدام به ضخامت یک مکعب تقسیم کنیم (شکل ۹۳ را ببینید).



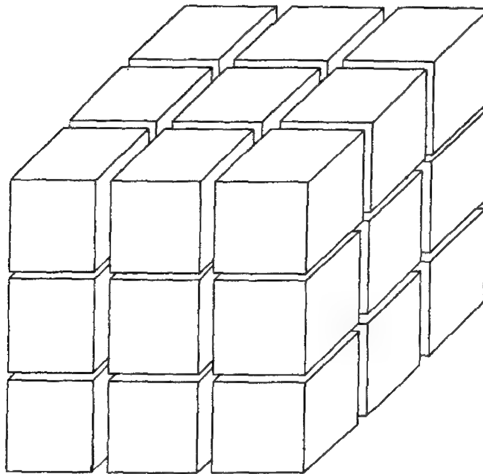
شکل۹۳

سه قطعهٔ به‌دست آمده را کنار هم نگاه می‌داریم و با دو برش دیگر در امتداد دو خط متوازی روی وجه بالایی، مکعب چوبی را به ۹ قطعه هریک شامل سه مکعب تقسیم می‌کنیم (شکل ۹۴). سپس درحالی‌که این ۹ قطعه را کنار هم نگاه داشته‌ایم، با دو برش دیگر (مانند شکل ۹۵) همهٔ ۲۷ مکعب را از هم جدا می‌کنیم. کلاً با شش برش همهٔ ۲۷ مکعب کوچک را از هم جدا کرده‌ایم. پرسش این است که آیا می‌توان این کار را با کمتر از شش برش انجام داد یا نه.

پاسخ منفی است. توجه کنید که مکعب مرکزی شش‌وجه دارد. برای جدا کردن هریک از این



شکل۹۴

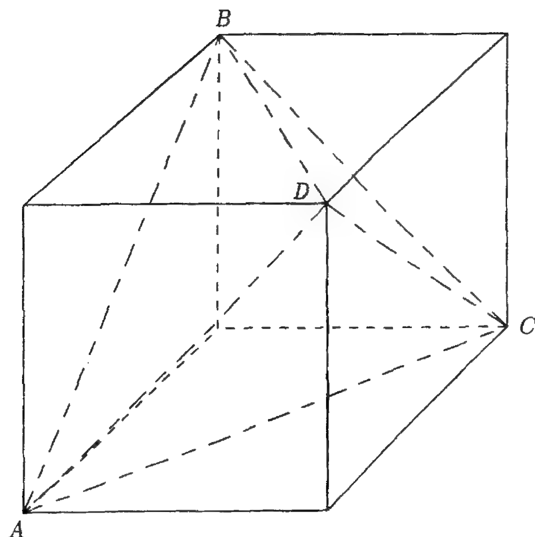


شکل۹۵

وجه‌ها از مکعب مجاورش برش مجزایی لازم داریم. پس هر قدر هم در جابه‌جایی قطعه‌ها پیش از هر برش زیرکی به خرج دهیم، نمی‌توانیم با کمتر از شش برش این کار را انجام دهیم. □

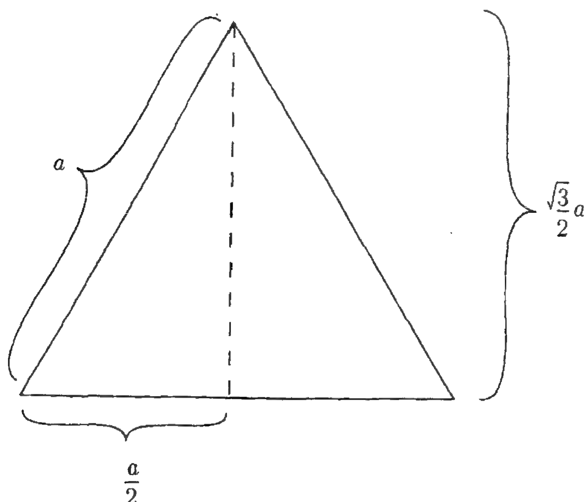
مسألهٔ ۷.۴.۲ مکعبی به طول ضلع واحد درنظر بگیرید. با وصل کردن چهار رأس از هشت رأس این مکعب به یکدیگر، چهاروجهی منتظمی با رأسهای A، B، C و D تشکیل می‌دهیم (شکل ۹۶). نسبت مساحت سطح مکعب به مساحت سطح چهاروجهی چیست؟

راه‌حل. روشن است که مکعب شش وجه دارد که مساحت سطح هرکدام ۱ است. پس مساحت سطح مکعب ۶ است.



شکل۹۶

چهاروجهی موردنظر چهار وجه دارد که هریک از آنها مثلثی متساوی‌الاضلاع است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس معلوم می‌شود که طول ضلع هریک از این مثلثها $\sqrt{۲}$ است. اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی a باشد، ارتفاع آن $\frac{\sqrt{۳}a}{۲}$ است (شکل ۹۷ را ببینید). پس مساحت چنین مثلثی $\frac{\sqrt{۳}a^۲}{۴}$ است. در این مسأله $a = \sqrt{۲}$. پس مساحت هر وجه چهاروجهی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. [می‌توانستیم از فرمولی که در مسألهٔ ۵.۲.۲ برای مساحت مثلث برحسب طول ضلعهای آن به‌دست آوردیم نیز استفاده کنیم.] چون چهاروجهی چهار وجه دارد، مساحت سطح آن $۲\sqrt{۳}$ است.



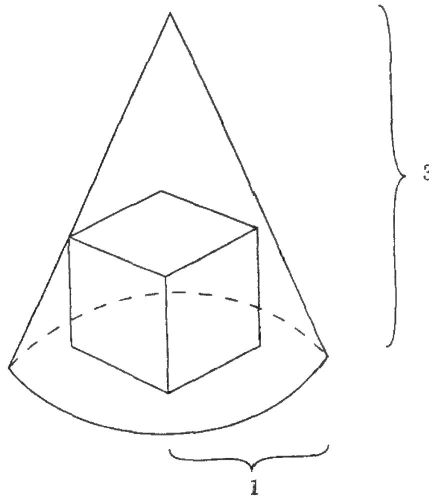
شکل۹۷

سرانجام، نسبت مساحت سطح مکعب به مساحت سطح چهاروجهی برابر است با

$$\frac{۶}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$ □

مسألهٔ پیکارجوی ۸.۴.۲ در مسألهٔ قبل، نسبت حجم مکعب به حجم چهاروجهی را پیدا کنید. [راهنمایی: محاسبه نکنید!]

مسألهٔ ۹.۴.۲ درون مخروط مستدیر قائمی مانند شکل ۹۸ مکعبی محاط شده است. اگر شعاع مخروط ۱، و ارتفاع آن ۳ باشد، حجم مکعب چقدر است؟



شکل۹۸

راه‌حل. طبیعتاً می‌کوشیم که طول ضلع مکعب را پیدا کنیم. شکل ۹۹ را که در آن دو مثلث با خطوط پررنگ مشخص شده‌اند بررسی کنید. این دو مثلث متشابه‌اند، چون ضلعهای متناظر آنها متوازی‌اند. توجه کنید که α نصف طول قطر قاعدهٔ مکعب است (فاصلهٔ یک رأس قاعده تا مرکز قاعده).

اکنون به مثلث کوچکتر توجه کنید. چند رابطهٔ سودمند وجود دارد. مطمئناً $\alpha + \beta = ۱$. همچنین $h^۲ = \alpha^۲ + \alpha^۲$؛ و بنابر تشابه مثلثها $h = ۳\beta$.

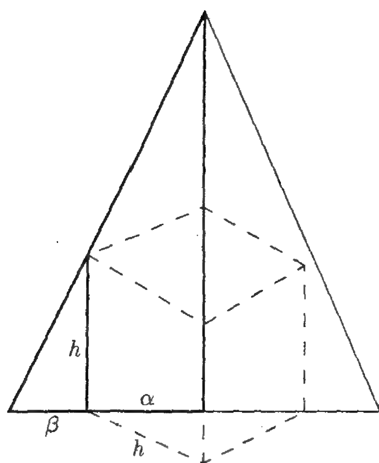
سه معادلهٔ سه‌مجهولی به‌دست آورده‌ایم و می‌کوشیم این معادله‌ها را حل کنیم.

آخرین معادله را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم:

$$۲\alpha^۲ = ۹\beta^۲$$

یا

$$\alpha = \frac{۳}{\sqrt{۲}}\beta$$



شکل۹۹

این نتیجه را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$\frac{۳}{\sqrt{۲}}\beta + \beta = ۱$$

پس $\beta = \frac{\sqrt{۲}}{۳ + \sqrt{۲}}$. فوراً نتیجه می‌شود که

$$h = ۳\beta = \frac{۳\sqrt{۲}}{۳ + \sqrt{۲}} = \frac{۶}{۳\sqrt{۲} + ۲}$$

حجم مکعب محاط در مخروط برابر است با

$$V = h^{۳} = \left[\frac{۶}{۳\sqrt{۲} + ۲}\right]^{۳} = \frac{۱۰۸}{۴۵\sqrt{۲} + ۵۸}$$ □

مسألهٔ ۱۰.۴.۲ زیرمجموعهٔ U از فضای سه‌بعدی را محدب می‌نامیم به‌شرطی که اگر A و B نقطه‌هایی در U باشند آنگاه پاره‌خطی که A را به B وصل می‌کند در U واقع باشد. مجموعه‌ای محدب را بسته می‌نامیم اگر شامل همهٔ نقاط مرزی خود باشد.

نقطهٔ P را در مجموعهٔ محدب بستهٔ U انتهایی می‌نامیم اگر P نقطهٔ درونی هیچ پاره‌خط غیربدیهی واقع در U نباشد.

مثلاً مجموعه V شامل کرهٔ واحد و همهٔ نقاط درون آن را درنظر بگیرید. این مجموعه درواقع یک گوی بستهٔ توپر است. از نظر شهودی روشن است که این مجموعه محدب و بسته است. هیچ نقطهٔ درونی نقطهٔ انتهایی نیست، چون هر نقطهٔ درونی روی پاره‌خط کوتاهی قرار دارد که خود درون کره واقع است. هر نقطهٔ مرزی نقطه‌ای انتهایی است، چون انحنای مرز مثبت است: اگر P نقطه‌ای انتهایی

و ℓ پاره‌خطی در V و شامل P باشد، آنگاه ℓ باید روی مرز V واقع باشد. اما دراین صورت طول ℓ باید صفر باشد.

توضیح دهید که چرا هر مجموعهٔ بستهٔ کراندار محدب مانند W باید دست‌کم یک نقطهٔ انتهایی داشته باشد.

راه‌حل. این مسأله تمرین خوبی در استدلال غیرساختنی است. نمی‌دانید W چه شکلی دارد، پس چگونه می‌توانید نقطه‌ای انتهایی را مشخص کنید (با فرض اینکه چنین نقطه‌ای وجود داشته باشد)؟ مطمئناً نمی‌توانید.

پس باید به‌گونه‌ای دیگر استدلال کنیم. گردایهٔ همهٔ گویهای بسته (کره‌هایی همراه با درون آنها) به مرکز مبدأ را که حاوی W باشند درنظر بگیرید. چون W کراندار است، چنین گویهایی باید وجود داشته باشند. درواقع، اگر $P \in W$ و اگر d قطر W باشد، آنگاه گوی بسته به مرکز مبدأ و شعاع $\|P\| + d$ مطمئناً حاوی W است. اکنون E را اشتراک همهٔ این گویهای بسته بگیرید.

ابتدا توجه کنید که E نیز شامل W است، چون E اشتراک گویهایی است که هریک از آنها شامل W است. همچنین توجه کنید که E نیز گوی بسته‌ای به مرکز مبدأ است. باید نقطه‌ای مانند Q وجود داشته باشد که هم در مرز E و هم در مرز W واقع باشد (درغیراین‌صورت می‌توانستیم E را کوچکتر کنیم، و این تناقض است). از بحث قبلی نتیجه می‌شود که نقطهٔ Q نقطه‌ای انتهایی برای E است. بنابراین، Q باید نقطه‌ای انتهایی برای W باشد. □

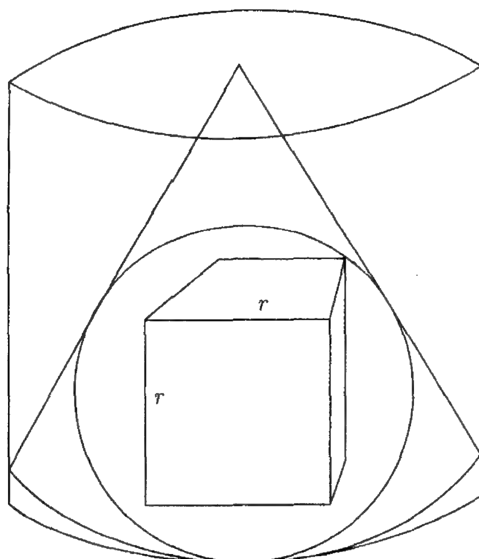
مسألهٔ ۱۱.۴.۲ مکعبی به ضلع r در کره‌ای محاط شده است. کره در مخروطی که طول مولدش برابر با قطر قاعدهٔ آن است محاط شده است. مخروط در استوانهٔ مستدیر قائمی محاط شده است. مساحت سطح استوانه (با احتساب بالا و پایین آن) چقدر است؟

راه‌حل. شکل ۱۰۰ را ببینید. قطر کره، یعنی همان قطر اصلی مکعب، $\sqrt{۳}r$ است؛ پس شعاع کره $\frac{\sqrt{۳}}{۲}r$ است. نمودار ساده‌ای (مانند شکل ۱۰۱) نشان می‌دهد که قطر قاعدهٔ مخروط باید $۳r$ باشد؛ پس طول مولدش $۳r$ است. بنابراین شعاع استوانهٔ قائم $\frac{۳}{۲}r$ و ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}r$ است.

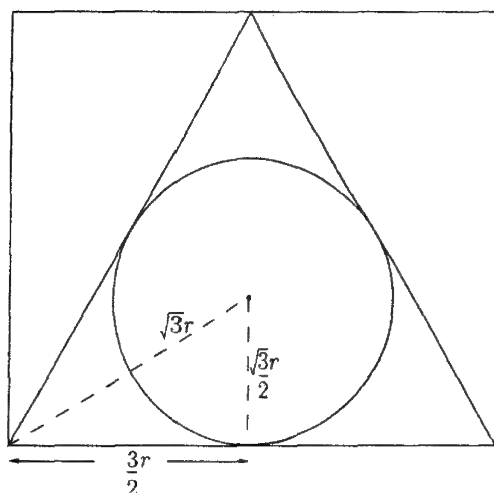
در نتیجه، مساحت سطح استوانه برابر است با

$$
\begin{aligned}
۲\pi(\text{شعاع})^{۲} + \pi(\text{شعاع})(\text{ارتفاع}) &= ۲\pi\left(\frac{۳r}{۲}\right)^{۲} + ۲\pi\frac{۳r}{۲}\cdot\frac{۳\sqrt{۳}r}{۲} \\
&= \frac{۹}{۲}\pi r^{۲}\cdot(۱ + \sqrt{۳})
\end{aligned}
$$

به این ترتیب حل مسأله کامل شده است. □



شکل ۱۰۰



شکل ۱۰۱

مسألهٔ ۱۲.۴.۲ (اجسام افلاطونی) اصطلاح کلاسیک «جسم افلاطونی» برای چندوجهی‌هایی در فضای سه‌بعدی به‌کار می‌رود که این ویژگیها را دارند: (۱) همهٔ وجه‌ها چندضلعیهای منتظم همنهشت‌اند؛ و (۲) در هر رأس، تعداد وجه‌هایی که با هم تلاقی می‌کنند یکسان است. یک مثال مکعب است. مکعب شش‌وجه دارد که همه مربع‌اند. در هر رأس مکعب سه وجه با هم تلاقی می‌کنند.

همهٔ اجسام افلاطونی را پیدا کنید.

راه‌حل. نکتهٔ جالب این است که فقط پنج جسم افلاطونی وجود دارد، و همهٔ آنها را می‌توانیم پیدا کنیم.

برای این‌کار، از فرمول اویلر که در بخش ۴.۱ مطالعه کردیم استفاده می‌کنیم:

$$V - E + F = ۲$$

به‌خاطر آورید که V تعداد رأسها، E تعداد یالها و F تعداد وجه‌هاست. رأسها و یالهای جسم افلاطونی را رأسها و یالهای گرافی پذیرفتنی روی سطح جسم افلاطونی (که از نظر توپولوژیکی مانند سطح کره است) بپندارید.

چون با چندوجهی منتظم سروکار داریم، رابطه‌های خاصی میان V، E و F برقرار است. m را تعداد یالهای هر وجه، و k را تعداد یالهایی که در هر رأس تلاقی می‌کنند می‌گیریم.

پیش از هر چیز، چون هر وجه m یال دارد، $m \cdot F$ را ممکن است تعداد کلِّ یالها بپنداریم. اما این درست نیست، چون هر یال به دو وجه تعلق دارد (که هریک از آنها در یک طرف یال است)، پس هر یال را دوبار شمرده‌ایم. بنابراین

$$E = \frac{m \cdot F}{۲} \qquad (*)$$

سپس توجه می‌کنیم که هر وجه m رأس دارد (چون m یال دارد). اما در $m \cdot F$ هر رأس k بار شمرده شده است، چون هر رأس نقطهٔ تلاقی k یال، و بنابراین نقطهٔ تلاقی k وجه است، پس

$$V = \frac{m \cdot F}{k} \qquad (**)$$

اگر (*) و (**) را در فرمول اویلر قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{m \cdot F}{k} - \frac{m \cdot F}{۲} + F = ۲$$

اگر دو طرف این برابری را در $۲k$ ضرب کنیم و در طرف چپ از F فاکتور بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$F \cdot (۲m + ۲k - mk) = ۴k \qquad (\dagger)$$

خواهیم دید که $(\dagger)$ فرمولی بس غنی است و هر آنچه می‌خواهیم بدانیم به ما می‌گوید. با گامهای شماره‌گذاری شدهٔ زیر پیش می‌رویم:

(۱) ممکن نیست که هم $m \geqslant ۴$ و هم $k \geqslant ۴$. اگر هر دو نابرابری برقرار باشند و $m \geqslant k$، آنگاه

$$mk \geqslant ۴m$$

و

$$mk \geqslant ۴k$$

اگر هر دو نابرابری را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب و آنها را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آوریم

$$mk \geqslant ۲m + ۲k$$

بنابراین طرف چپ $(\dagger)$ کوچکتر از یا برابر با صفر می‌شود که نامکن است (چون طرف راست مثبت است). اگر $k \geqslant m$، باز هم تناقض مشابهی حاصل می‌شود. بنابراین، از این پس می‌توانیم فرض کنیم که یا $m < ۴$ یا $k < ۴$.

(۲) ممکن نیست $k > ۵$ و $m > ۵$. ابتدا حالت $k > ۵$ را درنظر بگیرید. دراین صورت، بنابر گام قبل، $m \leqslant ۳$. اما $m = ۱$ یا $m = ۲$ بی‌معنی است (چون نمی‌شود وجهی که چندضلعی است فقط یک یال یا فقط دو یال داشته باشد). پس اگر $k > ۵$، $m = ۳$. اگر از این اطلاعات در طرف چپ (†) استفاده کنیم به‌دست می‌آوریم

$$F \cdot (۲ \times ۳ + ۲k - ۳k) = ۴k$$

یا

$$F \cdot (۶ - k) = ۴k$$

اما اگر $k > ۵$، طرف چپ این برابری کوچکتر از یا برابر با صفر می‌شود، که باز هم ناممکن است. استدلال مشابهی، که در اینجا بیان نمی‌کنیم، نشان می‌دهد که ممکن نیست $m > ۵$.

(۳) تا اینجا آموختیم که m و k هر دو باید کوچکتر از یا برابر با ۵ باشند و ممکن نیست که هر دو بزرگتر از یا برابر با ۴ باشند. پس تنها حالتهای زیر ممکن است پیش آیند:

$$m = ۳, \qquad k = ۳, ۴, ۵$$
$$m = ۴, \qquad k = ۳$$
$$m = ۵, \qquad k = ۳$$

توجه‌کنید که $m = ۱$ و $m = ۲$ از نظر هندسی بی‌معنی است؛ همچنین $k = ۱$ و $k = ۲$ معنی ندارد.

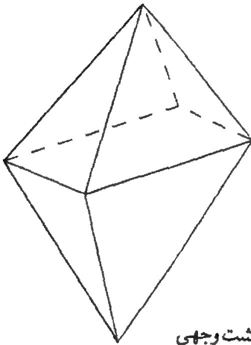
(۴) معلوم شد که تنها پنج حالت را باید بررسی کنیم، و هریک از این حالتها یک جسم افلاطونی را به‌دست می‌دهد:

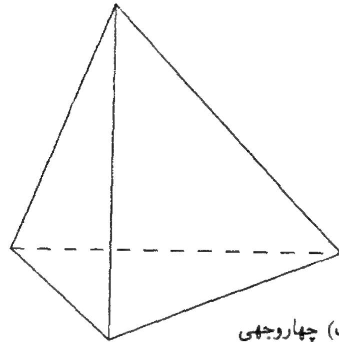
الف) اگر $m = ۳$ و $k = ۳$، از معادلهٔ (†) نتیجه می‌شود که $F = ۴$. یعنی چندوجهی موردنظر یک چهاروجهی و هر وجه آن مثلث است؛ و در هر رأس سه مثلث تلاقی می‌کنند. این همان چهاروجهی است (شکل ۱۰۲ (الف)).

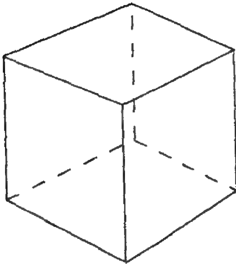
ب) اگر $m = ۳$ و $k = ۴$، از معادلهٔ (†) نتیجه می‌شود که $F = ۸$. یعنی چندوجهی موردنظر ۸ وجه دارد و هر وجه آن مثلث است؛ و در هر رأس چهار مثلث تلاقی می‌کنند. این همان هشت‌وجهی است (شکل ۱۰۲ (ب)).

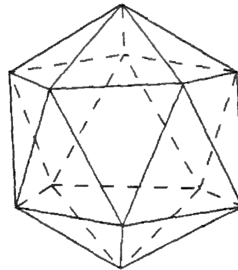
ج) اگر $m = ۳$ و $k = ۵$، از معادلهٔ (†) نتیجه می‌شود که $F = ۲۰$. یعنی چندوجهی موردنظر بیست‌وجه دارد و هر وجه آن مثلث است؛ و در هر رأس پنج مثلث تلاقی می‌کنند. این همان بیست‌وجهی است (شکل ۱۰۲ (ج)).

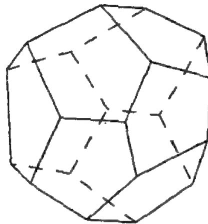
د) اگر $m = ۴$ و $k = ۳$، از معادلهٔ (†) نتیجه می‌شود که $F = ۶$. یعنی چندوجهی موردنظر ۶ وجه دارد و هر وجه آن مربع است؛ و در هر رأس چهار مربع تلاقی می‌کنند. این همان مکعب است (شکل ۱۰۲ (د)).











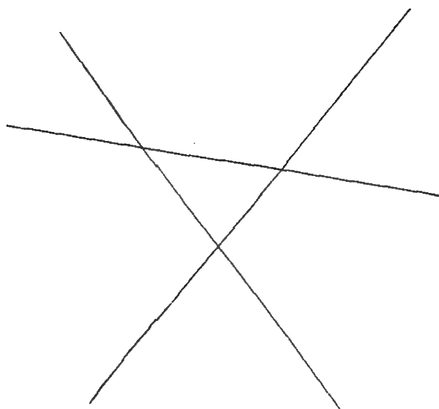
شکل ۱۰۲ الف) چهاروجهی ب) هشت‌وجهی ج) بیست‌وجهی د) مکعب ه) دوازده‌وجهی

ه) اگر $m = 5$ و $k = 3$، از معادلهٔ (†) نتیجه می‌شود که $F = 12$. یعنی چندوجهی موردنظر دوازده وجه دارد و هر وجه آن پنج‌ضلعی است؛ و در هر رأس سه پنج‌ضلعی تلاقی می‌کنند. این همان دوازده‌وجهی است (شکل ۱۰۲ (ه)).

به این ترتیب، همهٔ اجسام افلاطونی را توصیف کرده‌ایم. □

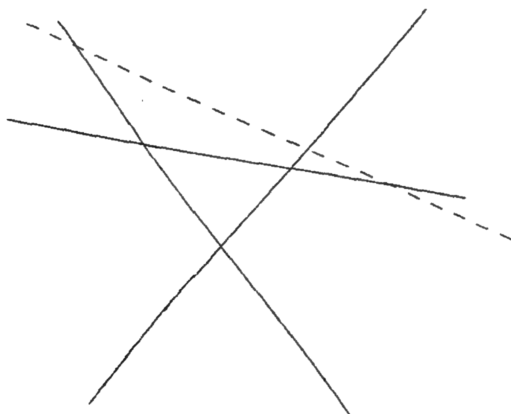
اکنون مسأله‌ای را که در انتهای بخش ۲.۱ عنوان کردیم بیان و حل می‌کنیم.

مسألهٔ ۱۳.۴.۲ پنج صفحه را در فضای سه‌بعدی در «وضعیت عمومی» درنظر بگیرید (برای مطالعهٔ بحثی در مورد مفهوم وضعیت عمومی به بخش ۲.۱ مراجعه کنید). این صفحه‌ها فضا را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟



شکل۱۰۳

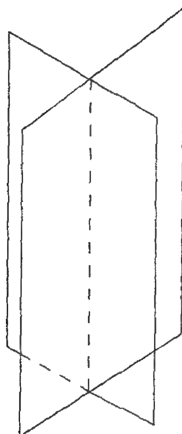
راه‌حل. شکلی از استقرا را به‌کار می‌گیریم. نتیجه‌ای که برای شروع کار در اختیار داریم همان است که در انتهای بخش ۲.۱ به‌دست آوردیم: سه خط در صفحه در وضعیت عمومی، صفحه را به ۷ ناحیه تقسیم می‌کنند (شکل ۱۰۳). اکنون فرض کنید که خط چهارمی در وضعیت عمومی در این صفحه اضافه کنیم (شکل ۱۰۴). توجه کنید که این خط هریک از سه خط اول را تنها یک‌بار قطع می‌کند. پس سه نقطهٔ تقاطع روی خط جدید وجود دارد. این سه نقطه خط جدید را به ۴ قسمت تقسیم می‌کنند. هریک از این چهار قسمت یکی از ناحیه‌های مسطح موجود را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. پس اکنون چهار ناحیهٔ جدید داریم. پس تعداد کل ناحیه‌های صفحه ۱۱ = ۴ + ۷ است. این تعداد ناحیه‌هایی است که چهار خط در وضعیت عمومی در صفحه ایجاد می‌کنند.



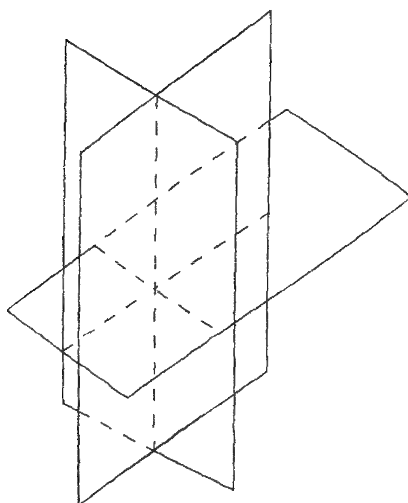
شکل۱۰۴

اکنون چیزی را که در بند قبل آموختیم در مورد مسألهٔ اصلی به‌کار می‌گیریم. روشن است که دو صفحه در وضعیت عمومی (یعنی درصورتی‌که با هم موازی نباشند) صفحه را به چهار ناحیه تقسیم

می‌کنند (شکل ۱۰۵). اکنون صفحهٔ دیگری را اضافه می‌کنیم. این صفحه هریک از دو صفحهٔ اول را در امتداد یک خط قطع می‌کند. در نتیجه در صفحهٔ سوم دو خط در وضعیت عمومی ایجاد می‌شود. دو خط در صفحه در وضعیت عمومی، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند (به بخش ۲.۱ مراجعه کنید). هریک از این چهار ناحیهٔ مسطح، یکی از ناحیه‌های فضایی حاصل از تقاطع دو صفحهٔ اول را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. به این ترتیب، چهار ناحیهٔ جدید ایجاد می‌شود. پس سه صفحه در وضعیت عمومی، فضا را کلاً به ۸ = ۴ + ۴ ناحیه تقسیم می‌کنند. برای تأیید این محاسبات شکل ۱۰۶ را بررسی کنید. این آخرین شکلی است که می‌بینید، چون پس از این رسم شکلهای خوب بسیار دشوار است. در عوض باید به‌استدلال متکی باشیم.



شکل ۱۰۵



شکل ۱۰۶

سه صفحه را در وضعیت عمومی در فضا، مانند بند قبل، درنظر بگیرید. آموختیم که این سه صفحه فضا را به هشت ناحیه تقسیم می‌کنند. اکنون صفحهٔ چهارم را اضافه می‌کنیم. این صفحه هریک از سه صفحهٔ اول را در امتداد یک خط قطع می‌کند. پس سه خط در وضعیت عمومی در صفحهٔ جدید ایجاد شده است. این سه خط صفحهٔ جدید را به ۷ ناحیهٔ مسطح تقسیم می‌کنند. هریک از این ناحیه‌های مسطح یکی از هشت ناحیهٔ فضایی را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. پس تعداد کلِّ ناحیه‌های فضایی هفت تا اضافه شده است. کلاً ۱۵ = ۷ + ۸ ناحیهٔ فضایی داریم.

اکنون گام بعدی که تجسم آن تقریباً ناممکن است ساده است. اکنون صفحهٔ پنجم را در وضعیت عمومی اضافه می‌کنیم. این صفحه هریک از چهار صفحهٔ موجود را در امتداد یک خط قطع می‌کند. نتیجه چهار خط در وضعیت عمومی در صفحهٔ جدید است. خطهای مذکور، همان‌طورکه در بند اول دیدیم، صفحهٔ جدید را به ۱۱ ناحیهٔ مسطح تقسیم می‌کنند. هریک از این ناحیه‌های مسطح یکی از ناحیه‌های فضایی موجود را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. به این ترتیب، ۱۱ ناحیهٔ فضایی جدید ایجاد می‌شود. پس تعداد کلِّ ناحیه‌های فضایی ۲۶ = ۱۱ + ۱۵ است.

پاسخ مسأله این است که ۵ صفحه در وضعیت عمومی در فضای سه‌بعدی، فضا را به ۲۶ ناحیه تقسیم می‌کنند.
□

مسألهٔ پیکارجوی ۱۴.۴.۲ فرمولی برای تعداد ناحیه‌هایی که k صفحه در وضعیت عمومی در فضای سه‌بعدی ایجاد می‌کنند پیدا کنید.

مسألهٔ پیکارجوی ۱۵.۴.۲ [اگر به اندیشیدن دربارهٔ فضاهای چهاربعدی یا با بعد بیشتر عادت دارید می‌توانید به این مسأله فکر کنید. شاید بخواهید برای اندیشیدن دربارهٔ این مسأله از دیگران کمک بگیرید.] فرمولی برای تعداد ناحیه‌هایی که k زیرفضای ۱ $- \ n$ بعدی در فضای n بعدی ایجاد می‌کنند پیدا کنید.

تمرین فصل ۲

۱. قضیه‌ای منسوب به اِیپل و هِیکن این است که هر گراف رسم شده روی کره را می‌توان با حداکثر ۴ رنگ رنگ‌آمیزی کرد. در اینجا منظور از رنگ‌آمیزی رنگ کردن رأسهای گراف است: قاعده این است که هر دو رأسی که با یالی به هم وصل می‌شوند باید رنگهای متفاوت داشته باشند. عدد ۴ را عدد رنگی کره می‌نامیم، چون (۱) رنگ‌آمیزی هیچ گرافی روی کره به بیش از ۴ رنگ نیاز ندارد؛ و (۲) گرافی روی کره هست که به ۴ رنگ نیاز دارد.

الف) گرافی روی کره نشان دهید که واقعاً به ۴ رنگ نیاز داشته باشد و شرح دهید که چرا ۴ رنگ لازم است.

ب) گرافی روی چنبره نشان دهید که به ۷ رنگ نیاز داشته باشد.
ج) عدد رنگی چنبرهٔ دوحفره‌ای را حدس بزنید.

۲. فرض کنید که صفحه با رسم تعدادی متناهی دایره به ناحیه‌هایی تقسیم شده باشد. دایره‌ها ممکن است متقاطع باشند یا نباشند، و ممکن است شعاعهای متفاوت و مرکزهای متمایز داشته باشند. چند رنگ لازم است تا همیشه بتوان چنین گردایه‌ای از ناحیه‌ها را طوری رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیهٔ مجاوری همرنگ نباشند؟ [به‌خاطر داشته باشید برای اینکه دو ناحیه مجاور باشند باید بخشی از یک یال بین آنها مشترک باشد و فقط اشتراک یک رأس کافی نیست.]

۳. دایره‌ای به شعاع ۱ در مثلث متساوی‌الاضلاعی با اندازهٔ مناسب محاط شده است. سه دایرهٔ دیگر هریک بین دایرهٔ اول و دو ضلع مثلث محاط شده‌اند. این فرایند همچنان بدون توقف ادامه می‌یابد و در هر مرحله دایره‌هایی کوچکتر از دایره‌های مرحلهٔ قبل رسم می‌شوند. مجموع شعاعهای همهٔ دایره‌ها چیست؟

۴. Q را مربع واحد (یعنی به طول ضلع ۱) بسته‌ای همراه با درون آن بگیرید. پنج نقطهٔ متمایز در Q به‌طور تصادفی انتخاب کنید. ثابت کنید بین این نقاط دو نقطه هست که فاصلهٔ آنها بیشتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ واحد نیست.

۵. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. همهٔ مثلثهایی را که طول هر سه ضلعشان عددی صحیح است درنظر بگیرید. در چند تا از این مثلثها طول بلندترین ضلع n است؟

۶. محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶۰ اینچ است. ارتفاع وارد بر وتر ۱۲ اینچ است. طول سه ضلع این مثلث را پیدا کنید.

۷. میز مستطیلی بسیار بزرگی را درنظر بگیرید. دو راه جالب برای پوشاندن سطح میز با سکه‌های کوچک وجود دارد.

۱. یک راه این است که سکه‌ها را به‌صورت سطری و ستونی کنار هم قرار دهیم. هر سکه با چهار سکهٔ دیگر مجاور است: دو سکه در سمت چپ و راست و دو سکه در بالا و پایین. خطهایی که از مرکز هر سکه به مرکزهای چهار سکهٔ مجاور آن رسم می‌شوند با هم زاویه‌های ۹۰° می‌سازند. این شیوهٔ پوشاندن میز را پوشش راستخط می‌نامیم.

۲. یک راه دیگر این است که هر سکه با شش سکهٔ دیگر مجاور باشد. خطهایی که از مرکز هر سکه به مرکزهای شش سکهٔ مجاور آن رسم می‌شوند با هم زاویه‌های ۶۰° می‌سازند. این شیوهٔ پوشاندن میز را پوشش شش‌ضلعی می‌نامیم.

ویژگیهای این دو پوشش را با هم مقایسه کنید. کدام‌یک از این دو شیوه برای پوشاندن سطح میز مؤثرتر است (یعنی در آن درصد کمتری از سطح میز بدون پوشش باقی می‌ماند)؟ درصد سطح پوشانده شدهٔ صفحه با هریک از این دو پوشش را به‌طور مجانبی حساب کنید.

۸. صفحه را می‌توان با کنار هم گذاردن شش‌ضلعیهای منتظمی به طول ضلع ۱ اینچ به‌طور کامل پوشاند، به‌طوری‌که هیچ‌کدام از شش‌ضلعیها روی هم قرار نگیرند. شکلی رسم کنید که نشان دهد چگونه می‌توان این‌کار را انجام داد. توضیح دهید که چرا صفحه را نمی‌توان با پنج‌ضلعیهای منتظمی به طول ضلع ۱ اینچ به‌طور کامل پوشاند.

۹. مثلث دلخواه T را درنظر بگیرید. آیا صفحه را می‌توان با موزاییکهایی که همگی همنهشت با T باشند به‌طور کامل پوشاند؟ [تعریف اصطلاحها را در تمرین ۸ ببینید.]

۱۰. فرض کنید R مستطیلی باشد که طول ضلعهای آن گویا هستند. ثابت کنید که می‌توان با موزاییکهایی همنهشت با R صفحه را به بی‌نهایت راه مختلف پوشاند. [تعریف اصطلاحها را در تمرین ۸ ببینید.]

۱۱. U را مجموعه‌ای کراندار و بسته در صفحه بگیرید. قطر U بیشترین فاصلهٔ بین نقطه‌های U است. این گزاره درست است یا نادرست: «اگر قطر U برابر با d باشد، آنگاه قرص بسته‌ای به قطر d وجود دارد که حاوی U است.»

۱۲. عددهای حقیقی α و β، $\alpha < \beta$، را درنظر بگیرید. تعریف کنید

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$$

مجموعهٔ S را نواری به پهنای $\beta - \alpha$ می‌نامیم. هر مجموعه‌ای هم که از دوران S حاصل شود نوار می‌نامیم. می‌گوییم پهنای مجموعهٔ بستهٔ X برابر با d است اگر نواری به پهنای d حاوی این مجموعه وجود داشته باشد. چه ارتباطی بین مفهوم پهنا و قطر وجود دارد؟ آیا مجموعه‌ای به پهنای d قطری حداکثر برابر با d دارد؟ یا عکس این گزاره درست است؟ مثالهایی بیاورید.

۱۳. X و Y را مجموعه‌هایی در صفحه می‌گیریم. تعریف می‌کنیم

$$X + Y = \{x + y \ : \ x \in X \ , \ y \in Y\}$$

$X + Y$ را مجموع X و Y می‌نامیم. اگر X و Y مجموعه‌هایی محدب باشند، آیا $X + Y$ نیز محدب است؟ اگر قطر هر یک از X و Y حداکثر d باشد، در مورد قطر $X + Y$ چه می‌توانید بگویید؟ اگر پهنای هریک از X و Y حداکثر d باشد، در مورد پهنای $X + Y$ چه می‌توانید بگویید؟ [تعریف این اصطلاحها را در تمرینهای ۱۱ و ۱۲ ببینید.]

۱۴. مساحت $X + Y$ [که در تمرین ۱۳ تعریف شد] چه ارتباطی با مساحت X و مساحت Y دارد؟

۱۵. فرض‌کنید A مجموعه‌ای کراندار و بسته در صفحه باشد. $۲S$ را مجموعهٔ $\{(۲x, ۲y) : (x, y) \in S\}$ تعریف کنید. مساحت $۲S$ چه ارتباطی با مساحت S دارد؟ آیا جواب شما به جای S در صفحه بستگی دارد؟

۱۶. فرض کنید S مجموعه‌ای بسته و کراندار در صفحه باشد و شامل مبدأ نباشد. تعریف کنید

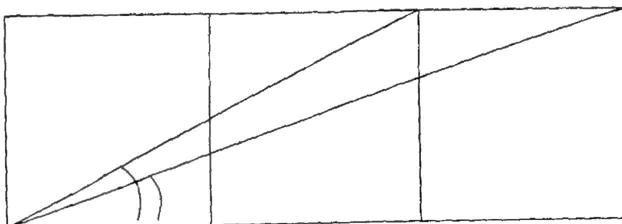
$$S' = \{s/||s||^۲ \ : \ s \in S\}$$

مساحت S' چه ارتباطی با مساحت S دارد؟

۱۷. مسألهٔ ۱۳ را برای زیرمجموعه‌های خط حل کنید.

۱۸. یک سوزن خیاطی به طول ۱ اینچ بردارید. آن را در مرکب غوطه‌ور کنید. سپس سوزن را روی یک قطعه کاغذ قرار دهید. سوزن را روی صفحهٔ کاغذ حرکت دهید تا جای دو سر آن با هم عوض شود. چگونه می‌توانید این کار را انجام دهید به‌طوری که مساحت لکهٔ مرکب باقی‌مانده روی کاغذ کمترین مقدار ممکن باشد؟ این فرمولبندی کلاسیک مسألهٔ معروف سوزن کاکیاست. پاسخ شگفت‌انگیز این مسأله این است که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$، راهی برای حرکت دادن سوزن به اندازهٔ ۱۸۰° وجود دارد، به‌طوری‌که مساحت لکهٔ مرکب باقی‌مانده کمتر از ε باشد. با چند آزمایش ببینید که لکهٔ مرکب را چقدر می‌توانید کوچک کنید. [CUN] را ببینید.

۱۹. به دو زاویه‌ای که در شکل ۱۰۷ مشخص شده‌اند توجه کنید. ثابت کنید که مجموع این دو زاویه ۴۵° است. [راهنمایی: یک راه استفاده از مثلثات است؛ راه دیگر استفاده از انعکاس است.]



شکل۱۰۷

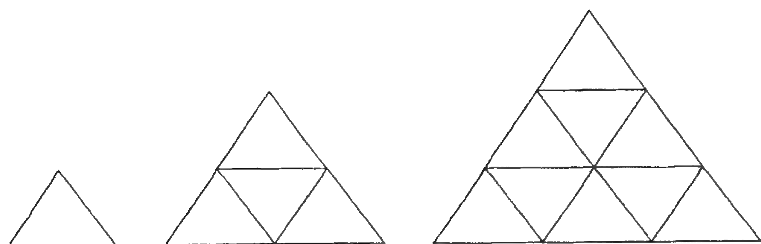
۲۰. ثابت کنید که در یک چهارضلعی دو قطر بر هم عمودند اگر و فقط اگر مجموع مربعهای دو ضلع روبه‌رو برابر با مجموع مربعهای دو ضلع روبه‌روی دیگر باشد.

۲۱. اگر مثلث T درون چندضلعی P باشد، توضیح دهید که چرا محیط مثلث بیشتر از محیط چندضلعی نیست.

۲۲. طول ضلعهای مثلثی دنباله‌ای از عددهای طبیعی است: n، $n+۱$، $n+۲$. مساحت مثلث ۶ است. ضلعها و زاویه‌های مثلث را بیابید.

۲۳. فرض کنید $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه باشد. توضیح دهید که چرا باید نقطه‌ای مانند N درون این مثلث وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\angle NAB$ ، $\angle NBC$ و $\angle NCA$ با هم برابر باشند.

۲۴. به شکلهای مثلثی در شکل ۱۰۸ که به مثلثهای کوچکتر تقسیم شده‌اند نگاه کنید. توجه کنید که در شکل اول یک «سطر» از مثلثهای کوچکتر، و روی هم ۱ مثلث کوچک وجود دارد. در



شکل۱۰۸

شکل دوم دو سطر (اول) روی هم شامل ۴ = ۲^۲ مثلث کوچک هستند. در شکل بعد، سه سطر (اول) شامل ۹ = ۳^۲ مثلث کوچک هستند. این الگو را می‌توان ادامه داد: n سطر اول روی هم شامل $n^۲$ مثلث کوچک هستند. دلیل این موضوع را بیان کنید.

۲۵. فرض کنید T مثلثی متساوی‌الاضلاع و P نقطه‌ای درون T باشد. فاصلهٔ P از سه ضلع T را با a، b و c نشان می‌دهیم. اگر h ارتفاع T باشد، ثابت کنید که $a+b+c=h$.

۲۶. $T_{x,y}$ را مثلثی با ضلعهایی به طول x، y و ۱ می‌گیریم به‌طوری‌که $x \leqslant y \leqslant ۱$. تناظر بین این مثلث و نقطهٔ (x,y) در صفحه را درنظر بگیرید.

۱. همهٔ نقطه‌های (x,y) را که با مثلثهایی غیربدیهی متناظرند مشخص کنید.

۲. همهٔ نقطه‌های (x,y) را که با مثلثهای متساوی‌الساقین متناظرند مشخص کنید.

۳. همهٔ نقطه‌های (x,y) را که با مثلثهای متساوی‌الاضلاع متناظرند مشخص کنید.

۴. همهٔ نقطه‌های (x,y) را که با مثلثهای قائم‌الزاویه متناظرند مشخص کنید.

۲۷. طول ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای ℓ، m و ۱۰ است. طول وتر مثلث ۱۰ نیست و ℓ و m هر دو عددهایی صحیح‌اند. ℓ و m را بیابید.

۲۸. ثابت کنید که اگر دو میانهٔ مثلثی با هم برابر باشند، این مثلث متساوی‌الساقین است. [راهنمایی: فرض کنید دو میانهٔ برابر میانه‌های خارج‌شده از رأسهای A و B باشند. این دو میانه را AP و BQ بنامید. نقطهٔ تقاطع این دو میانه را X بنامید. دراین صورت، $AX = \left(\frac{۲}{۳}\right)AP$ و $BX = \left(\frac{۲}{۳}\right)BQ$. از هندسهٔ دکارتی نیز می‌توانید استفاده کنید.]

۲۹. ثابت کنید که اگر شکلی مسطح دقیقاً دو محور تقارن داشته باشد، این دو محور بر هم عمودند.

۳۰. قضیهٔ سیلوستر را ثابت کنید: تعدادی متناهی نقطه در صفحه مفروض‌اند؛ اگر هر خطی که از دوتا از این نقطه‌ها بگذرد از نقطهٔ سومی هم بگذرد، آنگاه همهٔ نقطه‌ها همخط‌اند.

۳۱. درگوی مدور توپری یک حفره که از مرکز گوی می‌گذرد از یک طرف به‌طرف دیگر گوی ایجاد شده است. طول این حفره ۶ اینچ است. حجم بخش باقی‌ماندهٔ گوی چقدر است؟ [راهنمایی: توجه کنید که به‌طور ضمنی استنباط می‌شود که پاسخ مستقل از شعاع حفره و شعاع گوی است.]

۳۲. مربعی به طول ضلع ۱ درنظر بگیرید. بیشترین مساحت مثلثی که کاملاً درون این مربع قرار داشته باشد چقدر است؟ اگر به‌جای «مربع به طول ضلع ۱»، «مستطیل با مساحت ۱» را درنظر بگیریم، پاسخ چیست؟ اگر به‌جای «مربع به طول ضلع ۱»، «دایره به قطر ۱» را درنظر بگیریم، پاسخ چیست؟

۳۳. نقطهٔ P را در ربع اول دستگاه مختصات دکارتی انتخاب کنید. از P خطی رسم کنید که قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور y را قطع کند، و به این ترتیب مثلثی در ربع اول ایجاد شود. این خط را چگونه باید (برحسب مختصات P) رسم کرد که مثلث حاصل کمترین مساحت را بین این‌گونه مثلثها داشته باشد؟

۳۴. ثابت کنید که عددی ثابت و مثبت مانند C با ویژگی زیر وجود دارد:
اگر گردایه‌ای متناهی از عددهای مختلط مانند $\{a_j\}_{j=۱}^{m}$ مفروض باشد، زیرگردایهٔ $a_{j۱}$، $a_{j۲}$، $\cdots$، a_{jk} وجود دارد به‌طوری‌که

$$|a_{j۱} + a_{j۲} + \cdots + a_{jk}| \geqslant C[|a_۱| + |a_۲| + \cdots + |a_m|]$$

۳۵. فرض کنید S سطح بسته‌ای در فضای سه‌بعدی، مانند کره، چنبره، چنبرهٔ دوحفره‌ای، و غیره باشد. می‌گوییم گونای S برابر با g است اگر S، g تونل داشته باشد؛ مثلاً گونای کره ۰ است، گونای چنبرهٔ استاندارد ۱ است، گونای چنبرهٔ دوحفره‌ای ۲ است، و غیره. فرمولی از هیوود، که بعداً رینگل و یونگز [RIN] درستی آن را وقتی $g > ۰$ تأیید کردند این است که عدد رنگی سطح بستهٔ S با گونای g برابر است با

$$\chi(S) = \left[\frac{۱}{۲}(۷ + \sqrt{۱ + ۴۸g})\right]$$

در اینجا [ ] تابع «بزرگترین عدد صحیح» است. همچنین، «عدد رنگی» یک سطح کمترین تعداد رنگهایی است که برای رنگ‌آمیزی هر نقشهٔ دلخواه روی این سطح لازم می‌شود. توجه کنید که برای چنبره $g = ۱$ و بنابر فرمول هیوود $\chi = ۷$. بنابر این فرمول، عدد رنگی چنبرهٔ دوحفره‌ای چیست؟ عدد رنگی چنبرهٔ سه‌حفره‌ای چیست؟ آیا می‌توانید مثالهایی از نقشه‌هایی بیاورید که نشان دهند این عددها دقیق‌اند؟ [راهنمایی: تمرین ۱ توصیه‌هایی برای اینکه چگونه پیش بروید دربردارد.]

۳۶. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... بی‌نهایت نقطهٔ متمایز در صفحه باشند. فرض کنید فاصلهٔ بین هر دو تا از این نقطه‌ها عددی صحیح باشد (فاصله‌های جفتهای متمایز از این نقاط عددهای صحیح متمایزند). ثابت کنید که همهٔ a_jها باید همخط باشند.

۳۷. Q را چهارضلعی محدبی در صفحه می‌گیریم. اکنون صفحه را در فضا درنظر بگیرید. ثابت کنید که Q «تصویر منظری» مربعی در فضاست. [منظور از «تصویر منظری» این است: نقطهٔ ثابت Z را در فضا درنظر بگیرید؛ این نقطه کانون منظر است. مجموعهٔ ثابت S را درنظر بگیرید. سرانجام، صفحهٔ ثابتی را درنظر بگیرید به‌طوری‌که S بین Z و آن صفحه باشد. ناظری را تصور کنید که در Z قرار دارد و نقاط

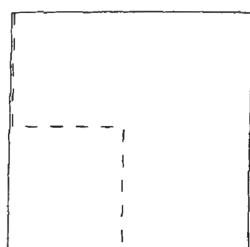
S را یک به‌یک نگاه می‌کند و هریک از این نقطه‌ها را به صورت زیر، روی صفحه تصویر می‌کند. اگر $s \in S$، s و Z خط یکتایی را مشخص می‌کنند. نقطهٔ تقاطع این خط با صفحه، تصویر منظری نقطهٔ s است. تصویر منظری S اجتماع همهٔ نقاطی است که به این ترتیب روی صفحه مشخص می‌شوند.]

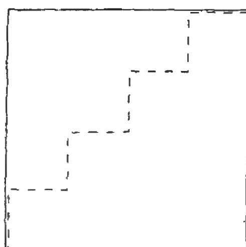
۳۸. هرم یک چندوجهی است که پنج وجه دارد. قاعدهٔ هرم مربع است. وجه‌های جانبی مثلثهایی هستند که همهٔ در رأس بالایی هرم تلاقی می‌کنند. حجم هرم یک سوم مساحت قاعده ضرب در ارتفاع است. بدون استفاده از حسابان، و با استفاده از ایدهٔ «تشابه» توضیح دهید که چرا حجم هرم از این رابطه به‌دست می‌آید.

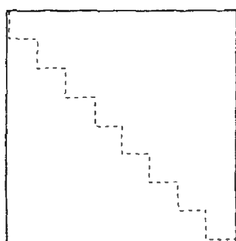
۳۹. چنبره‌ای توپر درنظر بگیرید. با سه برش مستقیم، این جسم را حداکثر به چند قطعه می‌توان تقسیم کرد؟

۴۰. مکعب چوبی توپری به طول ضلع ۴ اینچ درنظر بگیرید. می‌خواهید با مته سوراخی مدور به قطر یک اینچ در امتداد قطر اصلی مکعب، یعنی از گوشهٔ بالا، چپ، و پشت مکعب به گوشهٔ پایین، راست، و جلوی مکعب، در این قطعهٔ چوبی ایجاد کنید. بعد از سوراخ کردن، چه حجمی از مکعب باقی می‌ماند [راهنمایی: ممکن است با ریاضیات نتوانید این مسأله را حل کنید؛ اگر چنین است، روشی دیگر برای تعیین حجم ابداع کنید؛ عملگرا باشید!]

۴۱. مربعی به طول ضلع ۱ درنظر بگیرید. در اینجا طرحی برای اندازه‌گیری طول قطر این مربع پیشنهاد می‌کنیم. در این طرح از دنبالهٔ تقریبها استفاده می‌کنیم. اولین تقریب را در شکل ۱۰۹ (الف) می‌بینید. تقریب دوم را در شکل ۱۰۹ (ب) می‌بینید. تقریب سوم را در شکل ۱۰۹ (ج) می‌بینید. حتماً متوجه الگو شده‌اید و می‌بینید که چگونه خم تکه‌ای۔خطی تقریب‌زننده را مرحله به‌مرحله به قطر مورد مطالعه نزدیک می‌کنیم. طول هریک از این تقریبها چقدر است؟ با این شیوه حدس می‌زنید طول قطر چقدر است؟ قضیهٔ فیثاغورس چه مقداری برای قطر به‌دست می‌دهد؟ این تناقض آشکار را چگونه می‌توان توضیح داد؟


الف)


ب)


ج)

شکل۱۰۹

۴۲. با تقلید روش تمرین ۴۱، جواب اشتباهی برای محیط دایره‌ای به شعاع ۱ به‌دست آورید.

۳

مسأله‌های شمارشی

۱.۳ مسأله‌هایی مقدماتی از احتمالات

فنونی که قبلاً در این کتاب برای شمارش بررسی کردیم، مطمئناً در این فصل به‌کار می‌آیند. اما مسأله‌های احتمالات جنبهٔ دیگری نیز دارند. در هر مسألهٔ احتمالات، تشخیص دادن فضای نمونه‌ای نقشی اساسی دارد. درگوشه و کنار دنیای احتمالات معماها و پارادوکسهای بسیاری پراکنده‌اند که از درک نادرست فضای نمونه‌ای، یا فضای امکانات ناشی شده‌اند. در این بخش مجدانه می‌کوشیم تا این موضوع را به خواننده آموزش دهیم.

مسألهٔ ۱.۱.۳ روی هشت تکه کاغذ حرفهای A، B، C، D، E، F، G و H را نوشته‌ایم و کاغذها را درون ظرفی ریخته‌ایم. این هشت تکه کاغذ را یکی‌یکی از ظرف بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه نخستین چهار کاغذی که از ظرف بیرون می‌آوریم (به ترتیبی) A، C، E و H باشند چقدر است؟

راه‌حل. این مسأله کمتر از آنچه به‌نظر می‌رسد جالب است. پس از انتخاب چهار تکه کاغذی که اول از ظرف بیرون می‌آوریم، دیگر اهمیتی ندارد که بعد چه خواهیم کرد. می‌توانیم کاغذهای دیگر را بسوزانیم، یا برویم چای بنوشیم، یا در آموزشگاه رانندگی نام‌نویسی کنیم. درصورت مسأله بیان شده است که ترتیب بیرون آوردن تکه‌های کاغذ مهم نیست. به بیان ساده‌تر، می‌خواهیم چهار شیء را به تصادف از میان هشت شیء انتخاب کنیم. می‌خواهیم بدانیم که آیا چهار تکه کاغذ خاص، به ترتیبی، همانهایی هستند که ما انتخاب کرده‌ایم یا نه.

تعداد راههای متمایز برای انتخاب کردن چهار شیء از میان هشت شیء برابر است با

$$\binom{۸}{۴} = \frac{۸!}{۴! \times ۴!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۷۰$$

فقط یکی از این تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی متمایز، مجموعهٔ $\{A, C, E, H\}$ است. پس احتمال اینکه چهار تکه کاغذی که اول بیرون می‌آوریم همانهایی باشند که می‌خواهیم $\frac{۱}{۷۰}$ است. □

مسألهٔ ۲.۱.۳ ۳۷ نامه نوشته‌اید و روی ۳۷ پاکت نیز نشانی گیرنده‌های نامه‌ها را نوشته‌اید. چشمان خود را ببندید و درون هر پاکت به تصادف یک نامه بگذارید. احتمال اینکه فقط یک پاکت حاوی نامهٔ اشتباه باشد چقدر است؟

راه‌حل. فرض کنید پاکتها را از ۱ تا ۳۷ و نامه‌ها را نیز از ۱ تا ۳۷ شماره‌گذاری کرده باشید. اگر نامه‌های ۱ تا ۳۶ در پاکتهای ۱ تا ۳۶ قرار گرفته باشند، فقط نامهٔ ۳۷ و پاکت ۳۷ باقی می‌مانند. پس آخرین نامه اجباراً در پاکت درست قرار می‌گیرد.

البته شماره‌گذاری بند قبل هیچ ویژگی خاصی ندارد. این شماره‌گذاری فقط به ما کمک کرد که به نکتهٔ ساده‌ای توجه کنیم: امکان ندارد که فقط یک نامه در پاکت اشتباه قرار گیرد. اگر یک نامه در پاکتِ اشتباه باشد، دراین‌صورت حداقل دو نامه در پاکتِ اشتباه قرار دارند.

پس پاسخ مسأله این است که احتمال موردنظر صفر است. □

مسألهٔ اخیر نکته‌ای ساده ولی مهم را نشان می‌دهد: مسأله همیشه آن چیزی که به‌نظر می‌رسد نیست. ممکن است مسأله‌ای که صورتی ساده و زیبا دارد ناسازگار باشد یا هیچ جوابی نداشته باشد.

مسألهٔ بعدی تا حدی جالبتر است:

مسألهٔ ۳.۱.۳ ۳۷ نامه دارید و روی ۳۷ پاکت نشانی گیرنده‌ها را نوشته‌اید. چشمان خود را می‌بندید و درون هر پاکت به تصادف یک نامه می‌گذارید. احتمال اینکه دقیقاً دو نامه را در پاکتهای اشتباه گذاشته باشید چقدر است؟

راه‌حل. اگر فقط دو نامه را در پاکتهای اشتباه گذاشته باشیم، باید هریک از این دو نامه در پاکت نامهٔ دیگر باشد؛ مثلاً ممکن است نامهٔ ۵ در پاکت ۱۹ و نامهٔ ۱۹ در پاکت ۵ باشد. پس تعداد راههای متمایزی که می‌توانیم نامه‌ها را در پاکتها بگذاریم به‌طوری‌که فقط دو نامه در پاکتهای اشتباه باشند همان تعداد راههای متمایزی است که می‌توانیم دو نامه را از میان ۳۷ نامه انتخاب کنیم. [همهٔ ۳۵ نامهٔ دیگر باید در پاکتهای درست قرار گرفته باشند، پس انتخابی برای این ۳۵ نامه وجود ندارد.] این تعداد برابر است با

$$N = \binom{۳۷}{۲} = \frac{۳۷!}{۲!۳۵!} = \frac{۳۷ \times ۳۶}{۲ \times ۱} = ۶۶۶$$

اکنون اگر تصور کنیم که پاکتها را به ترتیب درست (یعنی عددهای ۱ تا ۳۷) در یک ردیف روی میز چیده‌ایم، توزیع تصادفی نامه‌ها در پاکتها چیزی نیست جز ترتیب تصادفی نامه‌ها. پس تعداد راههای متمایز ممکن برای توزیع ۳۷ نامه در بین ۳۷ پاکت !۳۷ (عددی بسیار بزرگ) است. نتیجه

می‌گیریم احتمال اینکه همهٔ نامه‌ها جز دو تا از آنها را در پاکتهای درست قرار داده باشیم برابر است با

$$P = \frac{۶۶۶}{۳۷!} \approx ۴/۸۶ \times ۱۰^{-۴۱}$$ □

در بخش بعد مسأله‌ای کاملاً پیچیده را بررسی می‌کنیم که باز هم به قرار دادن نامه‌ها در پاکتها مربوط است.

مسألهٔ ۴.۱.۳ خانمی به خانهٔ دوستانی می‌رود که سالهاست آنها را ندیده است. او می‌داند که دوستانش دو فرزند دارند که دوقلو نیستند، ولی جنسیت آنها را نمی‌داند. وقتی که در خانه را می‌زند پسری در را باز می‌کند. احتمال اینکه فرزند دیگر خانواده نیز پسر باشد چقدر است؟

راه‌حل. این مسأله مثال بسیار خوبی برای نشان دادن مفهوم فضای نمونه‌ای است. تحلیلی نادرست از مسأله این است که بگوییم «این خانواده یک فرزند دیگر دارد. این فرزند یا دختر است یا پسر. پس امکان پسر بودن او ۵۰ – ۵۰ یا ۰/۵ است.»

چه اشتباهی در این استدلال وجود دارد؟ خطا این است که از پیش می‌دانیم این خانواده دو فرزند دارد. فضای نمونه‌ای مرکب از همه جفت فرزندان ممکن است. اگر همهٔ جفتهای ممکن را به‌ترتیب (کوچکتر و بزرگتر) درنظر بگیریم، حالتهای ممکن اینهاست:

(دختر، دختر)، (پسر، دختر) ، (دختر، پسر)، (پسر، پسر)

چهار جفت مرتب از فرزندان داریم. نمی‌دانیم کودکی که در را باز کرده است فرزند بزرگتر خانواده است یا فرزند کوچکتر. پس نمی‌دانیم که این کودک عضو اول یکی از جفتهای بالاست یا عضو دوم. پس هریک از سه جفت مرتب اول ممکن است توصیف فرزندان خانواده باشند.

از این سه جفت مرتب، در دو تا فرزند دوم دختر و در یکی فرزند دوم پسر است. پس در این مسأله احتمال اینکه فرزند دوم پسر باشد $\frac{۱}{۳}$ است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۵.۱.۳ تحلیل مسألهٔ قبل را چنین تغییر می‌دهیم: همهٔ جفتهای ممکن از فرزندان خانواده را با ترتیب

(کودک دیگر، کودکی که در را باز کرد)

در نظر می‌گیریم. کودک اول کودکی است که در را باز کرده است. و دومی فرزند دیگر خانواده است. دراین صورت امکانات زیر وجود دارد:

(دختر، دختر)، (پسر، دختر)، (دختر، پسر)، (پسر، پسر)

این واقعیت که یک پسر در را باز کرده است دو امکان آخر را کنار می‌گذارد. جفتهای دیگر (پسر، پسر) و (دختر، پسر) هستند. نتیجه می‌گیریم احتمال اینکه فرزند دوم خانواده پسر باشد ۰/۵ است. اشتباه

این تحلیل چیست؟ به این پرسش پیش از مطالعهٔ ادامهٔ متن پاسخ دهید.

مسألهٔ پیکارجوی ۶.۱.۳ برای اینکه بیشتر سردرگم شوید تحلیل خود را چنین تغییر می‌دهیم؛ همهٔ جفتهای ممکن فرزندان را با ترتیب

(کودک دیگر، کودکی که در را باز کرد)

درنظر می‌گیریم. دراین صورت امکانات زیر وجود دارد:

(پسر، دختر)، (دختر، پسر)، (پسر اول ، پسر دوم)، (پسر دوم، پسر اول)
(دختر اول، دختر دوم)، (دختر دوم، دختر اول)

در تغییری که داده‌ایم این نکته را درنظر داشته‌ایم: اگر خانواده دو پسر داشته باشد، هریک از آنها ممکن است کودکی باشد که در را باز کرده است. پس باید دو امکان متمایز قائل شویم. همین استدلال را در حالتی که خانواده دو دختر داشته باشد نیز می‌توان به‌کار گرفت. باز هم توجه می‌کنیم که چون کودکی که در را باز کرده پسر بوده است، باید سه جفت مرتب آخر را کنار بگذاریم.

جفتهای مرتب (پسر دوم، پسر اول)، (پسر اول، پسر دوم)، (دختر، پسر) باقی می‌مانند. نتیجه می‌گیریم احتمال اینکه کودک دوم پسر باشد $\frac{۲}{۳}$ است. اشتباه این تحلیل چیست؟ **به این پرسش پیش از مطالعهٔ ادامهٔ متن پاسخ دهید.**

اگر به نتیجهٔ این مسأله‌های «در باز کردن» شک دارید، تشویقتان می‌کنیم که آزمایشی انجام دهید. درصورت مسأله به جای «پسر» و «دختر»، به ترتیب «شیر» و «خط» بگذارید. اکنون سکه‌ای را دوبار پرتاب کنید و نتیجه‌ها را در یک ردیف بنویسید. این کار را ۵۰ بار انجام دهید تا تعدادی دادهٔ تجربی به‌دست آورید. این نتیجه‌ها ۵۰ خانواده را نشان می‌دهند که هریک از آنها دو فرزند دارد؛ دو شیر متناظر با دو پسر است، دو خط متناظر با دو دختر است، و غیره.

اکنون داده‌های تجربی را بررسی می‌کنیم. به این پرسش توجه کنید: «اگر بدانیم که یک عضو جفتی شیر است، احتمال اینکه عضو دیگر شیر باشد چقدر است؟» برای مثال مؤلف ۵۰ جفت پرتاب را به‌صورت بیان شده در بند قبل انجام داده است. نتایجی که او به‌دست آورده در جدول صفحهٔ بعد ثبت شده است.

توجه کنید که ۴۳ جفت دست‌کم یک شیر دارند. از اینها، ۱۵ جفت دو شیر دارند. براساس این نمونه، احتمال اینکه هر دو پرتاب شیر بنشینند، به فرض اینکه یکی از دو پرتاب شیر نشسته باشد، $\frac{۱۵}{۴۳} \approx ۰٫۳۴۸۸$ است. این مقدار بسیار به $\frac{۱}{۳}$ نزدیک است، یعنی همان مقداری که تحلیل قبلی ما پیشگویی کرده بود.

برای اینکه مسألهٔ اول و آزمایش را بیشتر روشن کنیم، کمی پارامترها را تغییر می‌دهیم.

ش	خ		ش	ش		خ	ش		ش	خ		ش	خ
خ	خ		ش	خ		خ	ش		ش	خ		ش	ش
خ	خ		ش	ش		ش	ش		خ	ش		ش	خ
ش	ش		ش	ش		خ	ش		ش	خ		خ	ش
ش	ش		خ	خ		ش	ش		خ	ش		ش	ش
خ	خ		ش	خ		خ	ش		ش	خ		خ	ش
خ	ش		ش	ش		خ	ش		ش	ش		ش	ش
خ	ش		خ	خ		ش	خ		ش	خ		خ	ش
ش	ش		خ	خ		ش	ش		ش	خ		خ	ش
خ	خ		خ	ش		خ	ش		ش	ش		خ	ش

مسألهٔ ۷.۱.۳ خانمی به ملاقات دوستانی می‌رود که سالهاست آنها را ندیده است. او می‌داند که دوستانش دو فرزند دارند که دوقلو نیستند، ولی جنسیت آنها را نمی‌داند. وقتی که در می‌زند پسری در را باز می‌کند. پسرک می‌گوید «من فرزند بزرگ خانواده‌ام. فرزند کوچک خانواده ما خواب است.» احتمال اینکه فرزند دیگر خانواده نیز پسر باشد چقدر است؟

راه‌حل. این مسأله با مسألهٔ قبل فرق دارد. به‌خاطر بیاورید که همهٔ جفتهای ممکن فرزندان خانواده، به‌ترتیب (کوچکتر، بزرگتر)، عبارت‌اند از

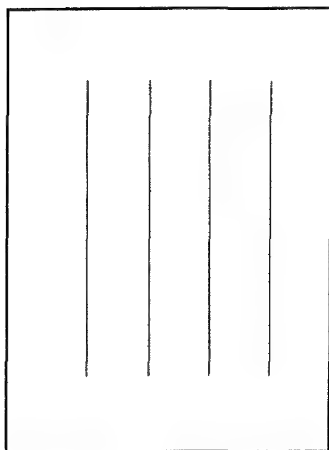
(دختر، دختر)، (پسر، دختر)، (دختر، پسر)، (پسر، پسر)

در اینجا می‌دانیم که فرزند بزرگتر پسر است؛ پس فقط جفتهای اول و دوم به‌کار می‌آیند. از اینها در یکی فرزند دوم پسر و در دیگری فرزند دوم دختر است. پس احتمال اینکه فرزند دوم پسر باشد با احتمال اینکه فرزند دوم دختر باشد برابر است. پس جواب این مسأله ۰٫۵ است. □

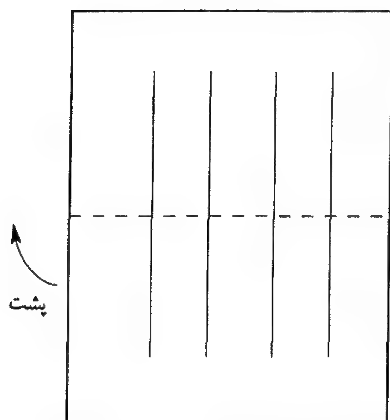
باز هم توجه به داده‌های آزمایشی، یعنی پنجاه جفت پرتاب سکه، سودمند است. به‌خاطر بیاورید که «شیر» متناظر با پسر و «خط» متناظر با دختر است. توجه کنید که در ۳۱ جفت «شیر» (پسر) عضو اول، یا بزرگتر، است. از اینها در ۱۵ جفت عضو دوم «شیر» و در ۱۶ جفت عضو دوم «خط» است. پس بنابر داده‌های آزمایشی (با خطایی قابل قبول) احتمال اینکه فرزند دوم پسر باشد ۰٫۴۸۳۹ و احتمال اینکه فرزند دوم دختر باشد ۰٫۵۱۶۱ است.

مسألهٔ ۸.۱.۳ چهار خط موازی روی تکه کاغذی رسم کنید (شکل ۱۱۰). کاغذ را در امتداد خط نقطه‌چین نشان داده شده در شکل ۱۱۱ خم کنید.

برای دوستی توضیح می‌دهید که در یک نیمهٔ کاغذ خطها را در دو جفت به هم وصل کرده‌اید. [سه راه مختلف برای این کار وجود دارد؛ شکل ۱۱۲ این سه راه را نشان می‌دهد.] شما به دوست خود



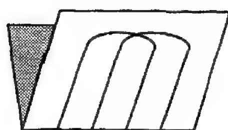
شکل۱۱۰



شکل۱۱۱







شکل۱۱۲

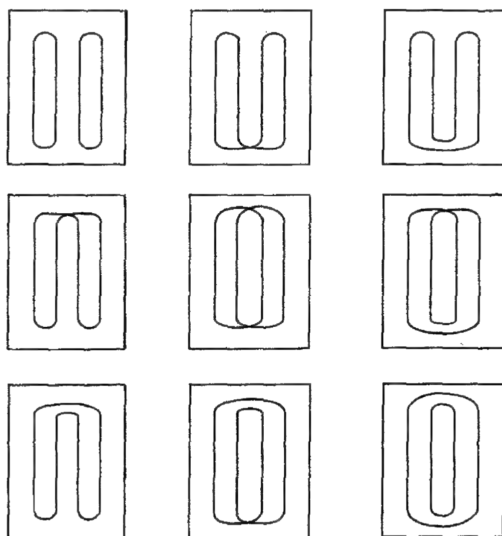
نشان نمی‌دهید که چه‌کار کرده‌اید. نیمهٔ دیگر کاغذ را به دوست خود نشان می‌دهید و از او می‌خواهید که با چهار سر آزاد خطها همان کاری را بکند که شما کرده‌اید.

با دوست خود شرط می‌بندید که اگر وقتی کاغذ را باز می‌کنید یک حلقهٔ پیوسته دیده شود شما می‌برید و اگر دو حلقهٔ جدا از هم دیده شود دوستتان می‌برد. آیا این شرط‌بندی منصفانه است؟

راه‌حل. این هم از آن شرایطی است که ابتدا منصفانه به‌نظر می‌رسد؛ ولی منصفانه نیست.

شکل ۱۱۳ را بررسی کنید. این شکل نشان می‌دهد که وقتی تای کاغذ را باز می‌کنیم چه حالتهای مختلفی ممکن است دیده شود (در همهٔ شکلها کار شما در بالاست.)

توجه کنید که در شش تا از نُه آرایش ممکن نتیجه حلقه‌ای پیوسته است، درحالی‌که در سه تا از نُه آرایش نتیجه از دو حلقهٔ جدا از هم تشکیل شده است. شانس شما برای بردن $\frac{۲}{۳}$ است.



شکل۱۱۳

دوست شما با پذیرفتن این شرط‌بندی کار عاقلانه‌ای نمی‌کند. □

نکتهٔ جالب این است که شما برای این فریبکاری حتی نیازی به دانستن شیوهٔ خاصی برای بردن ندارید. مستقل از اینکه چگونه خطها را به هم وصل کنید، شانس دو از سه برای ایجاد یک حلقهٔ پیوسته و بردن دارید. شکل ۱۱۳ این نکته را نشان می‌دهد.

مثال بعدی نیز توصیفی از یک «شرط‌بندی نامنصفانه» است.

مسألهٔ ۹.۱.۳ ۱۳ کارت سفید، ۱۳ کارت قرمز، ۱۳ کارت آبی و ۱۳ کارت سیاه در اختیار دارید. عددهای ۱ تا۱۳ را روی کارتهای هر دسته می‌نویسید. این ۵۲ کارت را در اختیار دوستی می‌گذارید و از او می‌خواهید که آنها را به سه دسته تقسیم کند و طوری روی میز قرار دهد که عددهای نوشته شده

روی کارت بالای هر دسته دیده نشود. سپس شرط می‌بندید که یکی از سه کارت بالایی ۱۱، ۱۲ یا ۱۳ است. آیا دوست شما کار عاقلانه‌ای می‌کند که این شرط را می‌پذیرد؟

راه‌حل. دوست شما ممکن است فکر کند که بین ۵۲ کارت فقط ۱۲ کارت ۱۱، ۱۲ یا ۱۳ هستند و شانس انتخاب یکی از آنها $\frac{۱۲}{۵۲} \approx ۰/۲۳۰۸$ است. روشن است که این شرط‌بندی به نفع دوست شماست و باید آن را بپذیرد.

متأسفانه دوست شما (اگر این‌طور استدلال کرده باشد) مفهوم فضای نمونه‌ای و درست شمردن را درنیافته است. استدلال درست به‌صورت زیر است.

اگر اطلاعات اضافی را کنار بگذارید، کاری که شما و دوستتان می‌کنید درواقع چیزی نیست جز انتخاب سه کارت به تصادف از میان ۵۲ کارت. سؤال این است: احتمال اینکه یکی از سه کارت ۱۱، ۱۲ یا ۱۳ باشد چقدر است. توجه کنید $\binom{۵۲}{۳}$ راه برای انتخاب ۳ کارت از میان ۵۲ کارت وجود دارد. در اینجا، مانند بسیاری از مسأله‌های احتمالات، مناسبتر است که تعداد راههای انتخاب کارتی غیر از کارتهای مطلوب را حساب کنیم. به بیان دیگر، به‌جای احتمال موفقیت، احتمال شکست را حساب می‌کنیم.

اگر بخواهیم سه کارت انتخاب کنیم که هیچ‌یک از آنها ۱۱، ۱۲ یا ۱۳ نباشد، باید سه کارت از میان ۴۰، یعنی ۱۲ − ۵۲، کارت که هیچ‌کدام ۱۱، ۱۲ یا ۱۳ نیستند انتخاب کنیم. تعداد راههای انجام این کار $\binom{۴۰}{۳}$ است. پس احتمال شکست در انتخاب یک کارت ۱۱، ۱۲ یا ۱۳ برابر است با

$$\begin{aligned}\frac{\binom{۴۰}{۳}}{\binom{۵۲}{۳}} &= \frac{۴۰!/(۳! \times ۳۷!)}{۵۲!/(۳! \times ۴۹!)} \\ &= \frac{۴۹ \times ۴۸ \times ۴۷ \times ۴۶ \times ۴۵ \times ۴۴ \times ۴۳ \times ۴۲ \times ۴۱ \times ۴۰ \times ۳۹ \times ۳۸}{۵۲ \times ۵۱ \times ۵۰ \times ۴۹ \times ۴۸ \times ۴۷ \times ۴۶ \times ۴۵ \times ۴۴ \times ۴۳ \times ۴۲ \times ۴۱} \\ &= \frac{۴۰ \times ۳۹ \times ۳۸}{۵۲ \times ۵۱ \times ۵۰} \\ &\approx ۰/۴۴۷۰۶\end{aligned}$$

پس احتمال اینکه یکی از سه کارت انتخاب شده کارت مطلوب باشد برابر است با

$$P = ۱ - ۰/۴۴۷۰۶ = ۰/۵۵۲۹۴$$

توجه کنید که احتمال انتخاب یک کارت ۱۱، ۱۲ یا ۱۳ بیشتر از احتمال انتخاب نشدن هیچ‌یک از این کارتهاست. پس احتمال بردن شما بیشتر از احتمال بردن دوستتان است. □

توجه کنید که در مسألهٔ قبل، فضای نمونه‌ای مجموعهٔ ۵۲ کارت نیست. اگر چنین بود، احتمال انتخاب یک کارت ۱۱، ۱۲ یا ۱۳ برابر $\frac{۱۲}{۵۲}$ می‌شد. فضای نمونه‌ای مجموعهٔ همهٔ سه‌تاییهای ممکن از کارتهاست و مسأله این است که احتمال اینکه یکی از سه کارت ۱۱، ۱۲ یا ۱۳ باشد چقدر است.

۲.۳ مسأله‌هایی پیچیده‌تر از احتمالات

در این بخش مسأله‌هایی ظریفتر را در مورد احتمالات، شرط‌بندی و شمارش بررسی می‌کنیم.

در اینجا و بخشهای بعدی این کتاب استفاده از نماد مجموعیابی کارمان را ساده‌تر می‌کند. این نماد به شکل

$$\sum_{j=۱}^{k} a_j = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k$$

است که در آن عبارت سمت چپ خلاصه‌نویسی مجموع سمت راست است. به دو مثال دیگر توجه کنید:

$$\sum_{j=۱}^{۵}[j^۲ + ۱] = [۱^۲ + ۱] + [۲^۲ + ۱] + [۳^۲ + ۱] + [۴^۲ + ۱] + [۵^۲ + ۱] = ۶۰$$

و

$$\sum_{j=۱}^{۴}\frac{۱}{j} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}$$

نماد مجموعیابی را برای نشان دادن مجموعی که با اندیسی غیر از ۱ شروع می‌شود نیز می‌توان به‌کار برد:

$$\sum_{k=۳}^{۷}[j - ۲] = [۳ - ۲] + [۴ - ۲] + [۵ - ۲] + [۶ - ۲] + [۷ - ۲]$$

و

$$\sum_{\ell=-۲}^{۳}\ell^۳ = (-۲)^۳ + (-۱)^۳ + (۰)^۳ + (۱)^۳ + (۲)^۳ + (۳)^۳$$

با مطالعهٔ این کتاب به سرعت به استفاده از نماد مجموعیابی عادت خواهید کرد.

مسألهٔ ۱.۲.۳ درون کیسه‌ای تعدادی مهرهٔ قرمز و تعدادی مهرهٔ آبی هست. تعداد مهره‌های هر رنگ، یا مثبت است یا صفر. چشم بسته مهره‌ای از کیسه بیرون می‌کشیم و می‌بینیم که قرمز است. اگر مهرهٔ دیگری بیرون آوریم، احتمال اینکه این مهره هم قرمز باشد چقدر است؟

راه‌حل. چیزی که در اینجا تازگی دارد این است که نه می‌دانیم چند مهره در کیسه هست و نه می‌دانیم که از هر رنگ چند تا مهره هست. ولی می‌دانیم که دست‌کم یک مهرهٔ قرمز در کیسه هست. اما ممکن است همهٔ مهره‌های دیگر کیسه نیز قرمز باشند یا هیچ مهرهٔ قرمز دیگری در کیسه نباشد. این اطلاعات (یا بی‌اطلاعی) را چگونه به‌کار گیریم؟

فرض کنیم تعداد کلِّ مهره‌ها N باشد. بسته به اینکه چند تا از مهره‌ها قرمز باشند (تعداد مهره‌های قرمز را با k نشان می‌دهیم) N تحلیل مختلف انجام می‌دهیم. وضعیتی را که k مهرهٔ قرمز در کیسه باشد با S_k نشان می‌دهیم ($۱ \leqslant k \leqslant N$).

تصور کنید که N کیسه پیشِ رو داریم: $B_۱$ کیسه‌ای در وضعیت $S_۱$ (یک مهرهٔ قرمز) است، $B_۲$ کیسه‌ای در وضعیت $S_۲$ (دو مهرهٔ قرمز) است، و غیره. اگر همهٔ این کیسه‌ها را با هم درنظر بگیریم، تعداد مهره‌های قرمز درون کیسه‌ها برابر است با

$$۱ + ۲ + ۳ \cdots + (N - ۱) + N = \frac{N(N + ۱)}{۲}$$

احتمال انتخاب یک مهرهٔ قرمز از میان این تعداد مهرهٔ قرمز برابر است با

$$\frac{۱}{N(N + ۱)/۲} = \frac{۲}{N(N + ۱)}$$

احتمال اینکه اولین مهرهٔ قرمز انتخاب‌شده در $B_۱$ باشد $\frac{۱ \times ۲}{N(N + ۱)}$ است، چون $B_۱$ فقط یک مهرهٔ قرمز دارد؛ احتمال اینکه اولین مهرهٔ قرمز انتخاب‌شده در $B_۲$ باشد $\frac{۲ \times ۲}{N(N + ۱)}$ است، چون $B_۲$ فقط دو مهرهٔ قرمز دارد؛ احتمال اینکه اولین مهرهٔ قرمز انتخاب‌شده در $B_۳$ باشد $\frac{۳ \times ۲}{N(N + ۱)}$ است؛ و غیره. احتمال اینکه اولین مهرهٔ قرمز انتخاب‌شده در B_k باشد $\frac{k \times ۲}{N(N + ۱)}$ است.

پس از اینکه اولین مهرهٔ قرمز از کیسهٔ B_k انتخاب شد، در کیسهٔ B_k کلاً $N - ۱$ مهره باقی می‌ماند که $k - ۱$ تا از آنها قرمزند. پس احتمال اینکه دومین مهرهٔ انتخاب‌شده قرمز باشد $\frac{k - ۱}{N - ۱}$ است. احتمال روی دادن پیشامد اول و به دنبال آن پیشامد دوم برابر است با حاصل‌ضرب احتمالهای این دو پیشامد:

$$P_k = \frac{k \times ۲}{N(N + ۱)} \times \frac{k - ۱}{N - ۱}$$

چون امکان انتخاب شدن هر یک از N کیسه یکی است (یعنی امکان وقوع هریک از توزیعهای مهره‌ها یکی است) احتمال قرمز بودن دومین مهره برابر است با

$$P = \sum_{k=۱}^{N} P_k = \sum_{k=۱}^{N} \frac{k \times ۲}{N(N + ۱)} \times \frac{k - ۱}{N - ۱}$$

این مقدار را می‌توانیم حساب کنیم. توجه کنید که

$$P = \frac{۲}{(N - ۱) \times N \times (N + ۱)} \sum_{k=۱}^{N} k(k - ۱)$$

$$= \frac{۲}{(N - ۱) \times N \times (N + ۱)} \cdot \left[\sum_{k=۱}^{N} k^۲ - \sum_{k=۱}^{N} k\right]$$

قبلاً با محاسبه به دست آوردیم $\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$ و

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{(2N^3 + 3N^2 + N)}{6}$$

(بخش ۲.۱ را ببینید). در نتیجه

$$P = \frac{2}{(N-1) \times N \times (N+1)} \cdot \left[\frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6} - \frac{N(N+1)}{2}\right] = \frac{2}{3}$$

پس احتمال قرمز بودن مهرهٔ دوم $\frac{2}{3}$ است. □

اگرچه استدلال مثال قبل محکم و بی‌نقص است، نتیجهٔ حاصل ممکن است مطابق شهود نباشد. خواننده را تشویق می‌کنیم آزمایشهایی انجام دهد تا این نتیجه را کاملاً بپذیرد.

مسألهٔ ۲.۲.۳ میله‌ای به طول ۱۰ فوت در یک ماشین برش قرار داده می‌شود و با برشهایی تصادفی به سه میلهٔ کوچکتر تبدیل می‌شود. احتمال اینکه این سه میلهٔ کوچکتر مثلثی تشکیل دهند چقدر است؟

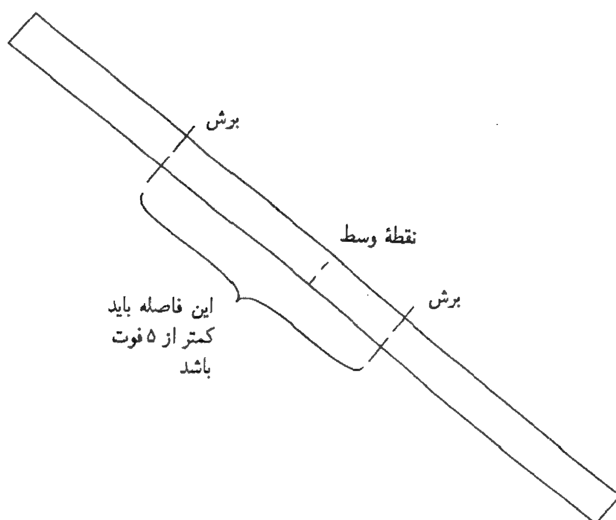
راه‌حل. ویژگی مشخصهٔ سه طول، به نامهای A، B و C، که مثلثی تشکیل می‌دهند چیست؟ این است که در نابرابریهای مثلثی صدق کنند: مجموع هر دو تای آنها دست‌کم به اندازهٔ سومی باشد. مثلاً طولهای ۱، ۲ و ۴ نمی‌توانند مثلثی تشکیل دهند.

اگر طول یکی از سه میله ۵ فوت باشد، مجموع طولهای دو میلهٔ دیگر هم ۵ فوت است و این سه طول می‌توانند یک مثلث تخت و بدیهی تشکیل دهند؛ پس این حالت را کنار می‌گذاریم (احتمال اینکه طول یکی از سه میله ۵ فوت، یا هر مقدار مشخص از پیش تعیین‌شده، باشد صفر است). پس فرض می‌کنیم که طول هریک از سه میله یا بیشتر از ۵ فوت است یا کمتر از ۵ فوت.

اما اگر طول یکی از سه میله، مثلاً A، بیشتر از ۵ فوت باشد نابرابری مثلثی $A \leqslant B + C$ برقرار نخواهد بود. پس برای اینکه مثلثی تشکیل شود، طول هر سه میله باید کمتر از ۵ فوت باشد. اما در این حالت، هر سه نابرابری مثلثی برقرارند (چون مجموع طولهای هر دو میله بیشتر از ۵ فوت است)، و بنابراین واقعاً می‌توان مثلثی تشکیل داد.

پس مسألهٔ مطرح شده هم‌ارز است با این سؤال که: «احتمال اینکه طول هریک از سه قطعه کمتر از ۵ فوت باشد چقدر است؟»

برای محاسبهٔ احتمالها بهتر است شرطی را که به‌دست آوردیم به‌شرطی در مورد محل برشها تبدیل کنیم، ابتدا توجه کنیم که محلهای برش میلهٔ ۱۰ فوتی باید در دو طرف نقطهٔ وسط میله باشند (درغیراین‌صورت طول قطعهٔ بزرگتر بیشتر از ۵ فوت خواهد بود). همچنین، فاصلهٔ بین دو محل برش نباید بزرگتر از یا برابر با ۵ فوت باشد (درغیراین‌صورت طول قطعهٔ وسط بزرگتر از یا برابر با ۵ فوت خواهد بود). شکل ۱۱۴ را ببینید. اگر این دو شرط با هم برقرار باشند مطمئن هستیم که طول هر سه قطعه کمتر از ۵ فوت است.



شکل۲۱۴

کمی تفکر نشان می‌دهد احتمال اینکه برشها در دو طرف نقطهٔ وسط باشند ۰٫۵ است (چهار امکان وجود دارد). در ضمن، فاصلهٔ بین دو برش، d، (اگر فاصلهٔ دقیقاً ۵ فوت را مطابق استدلال بالا کنار بگذاریم) یا در $۵ > d > ۰$ صدق می‌کند یا در $۱۰ > d > ۵$. این دو پیشامد هم احتمال‌اند. پس احتمال اینکه فاصلهٔ بین برشها کمتر از ۵ فوت باشد ۰٫۵ است.

احتمال اینکه دو پیشامد ـ (۱) برشها در دو طرف نقطهٔ وسط میله باشند، و (۲) فاصلهٔ برشها کمتر از ۵ فوت باشد ـ با هم روی دهند حاصل‌ضرب احتمالهای این دو پیشامد است. یعنی $P = ۰٫۵ \times ۰٫۵ = ۰٫۲۵$.

احتمال اینکه سه میله مثلثی تشکیل دهند ۰٫۲۵ است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۳.۲.۳ میله‌ای ۱۰ فوتی تصادفاً در ماشین برش می‌افتد. این میله به تصادف به دو قطعه تقسیم می‌شود. مسئول ماشین آنقدر ناراحت می‌شود که یکی از دو قطعه را به درون ماشین برش پرتاب می‌کند. این میله نیز به دو قطعه تقسیم می‌شود (باز هم محل برش تصادفی است). احتمال اینکه سه قطعهٔ حاصل مثلثی تشکیل دهند چقدر است؟

مسألهٔ ۴.۲.۳ کوچکترین عدد طبیعی مانند N را بیابید به‌طوری‌که اگر N نفر در اتاقی حضور داشته باشند احتمال اینکه دو نفر روز تولدشان یکی باشد (فقط روز تولد، نه سال تولد) بیشتر از ۰٫۵ باشد. [راهنمایی: سالهای کبیسه را درنظر نگیرید. فرض کنید که سال ۳۶۵ روز دارد.]

راه‌حل. همان‌طورکه قبلاً گفتیم گاهی بهتر است احتمال این را که چیزی اتفاق نیفتد حساب کنیم و سپس نتیجه را از ۱ کم کنیم.

با درنظر داشتن این نکته، N را ثابت می‌گیریم و احتمال این را حساب می‌کنیم که هیچ دو نفری در اتاقی که N نفر حضور دارند روز تولدشان یکی نباشد. اشخاص حاضر در اتاق را $P_۱$، $P_۲$، $\cdots$ و P_N می‌نامیم. روز تولد $P_۱$ ممکن است هریک از ۳۶۵ روز سال باشد بدون اینکه با شرط روزهای تولد متمایز تناقضی پیش آید. وقتی که روز تولد $P_۱$ تثبیت شد (روز تولد او ثابت است، تاریخ را برای انجام استدلالمان ثبت کرده‌ایم) دیگر نمی‌شود روز تولد $P_۲$ نیز همین روز باشد. پس ۳۶۴ امکان برای روز تولد $P_۲$ وجود دارد.

به همین ترتیب پیش می‌رویم. اگر همچنان به شرط روزهای تولد متمایز پایبند بمانیم، ۳۶۳ انتخاب برای روز تولد $P_۳$ وجود دارد. به‌طور خلاصه، تعداد کل ترکیبهای روزهای تولد N نفر که هیچ دو نفری از آنها روز تولدشان یکسان نیست، برابر است با

$$۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times \cdots \times [۳۶۵ - (N - ۱)]$$

تعداد کل توزیعهای همهٔ روزهای تولد ممکن بین N نفر، بدون توجه به تکراری بودن یا نبودن روزها، برابر است با

$$\underbrace{۳۶۵ \times ۳۶۵ \times \cdots \times ۳۶۵}_{N \text{ بار}}$$

به‌طور خلاصه، احتمال اینکه همهٔ N نفر حاضر در اتاق روزهای تولد متمایز داشته باشند برابر است با

$$P = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times \cdots \times [۳۶۵ - (N - ۱)]}{۳۶۵^N}$$

برای اینکه محاسبات ساده‌تر باشد و با عددهای خیلی بزرگ سروکار نداشته باشیم، این فرمول را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$P = \frac{۳۶۵}{۳۶۵} \times \frac{۳۶۴}{۳۶۵} \times \frac{۳۶۳}{۳۶۵} \times \cdots \times \frac{۳۶۵ - (N - ۱)}{۳۶۵}$$

اکنون با استفاده از کامپیوتر یا ماشین‌حساب شروع به محاسبه می‌کنیم. از سمت چپ شروع و کسرها را یکی‌یکی در هم ضرب می‌کنیم. هر وقت حاصل‌ضرب کوچکتر از $\frac{۱}{۲}$ شود کار تمام است. آخرین کسری که ضرب کرده‌ایم نشان می‌دهد که N چه باید باشد (چون آخرین کسری که ضرب کرده‌ایم $\frac{۳۶۵ - (N - ۱)}{۳۶۵}$ است).

مؤلف این محاسبات را انجام داده است. او بعد از ضرب کردن ۲۳ جمله به احتمال ۰٫۴۹۲۷۰۲۷ رسیده است. اگر فقط ۲۲ جمله در هم ضرب شوند احتمال ۰٫۵۲۴۳۰۴۶ به‌دست می‌آید. روشن است که کوچکترین مقدار N که احتمال کمتر از $\frac{۱}{۲}$ برای متمایز بودن روزهای تولد همهٔ افراد حاضر در اتاق ایجاد می‌کند ۲۳ است.

نتیجه می‌گیریم که اگر ۲۳ نفر در اتاق باشند، احتمال اینکه دو نفر یک روز تولد داشته باشند بیشتر از $\frac{1}{2}$ است (درواقع این احتمال برابر است با $P = ۱ - ۰٫۴۹۲۷۰۷ = ۰٫۵۰۷۲۹۷۳$). □

مسألهٔ پیکارجوی ۵.۲.۳ مسألهٔ قبل را به طریق زیر تغییر می‌دهیم. فرض کنید سال ۵۲ هفته و هر هفته هفت روز دارد (البته فرض نمی‌کنیم که هفته از روز یکشنبه یا هر روز خاص دیگری شروع می‌شود). کمترین مقدار N به‌طوری‌که اگر N نفر در اتاقی باشند، روز تولد دو نفرشان در یک هفته (نه یک سال یا یک روز، فقط یک هفته) باشد چیست؟

آیا جوابتان با جواب مسألهٔ قبل تفاوتی دارد؟

مسألهٔ پیکارجوی ۶.۲.۳ اگر سالهای کبیسه را هم به‌حساب آورید جواب مسألهٔ روز تولد چه تغییری می‌کند؟

مسألهٔ بعدی مسألهٔ پاکتهای نامه است که در بخش قبل اشاره‌ای گذرا به آن کردیم. بعد از مطالعهٔ این مسأله دوباره مسأله‌های پاکتهای نامهٔ مقدماتی‌تر را در بخش ۱.۳ ببینید. چرا آن مسأله‌ها بسیار ساده بودند ولی حل این یکی به ترفند زیرکانه‌ای نیاز دارد؟

مسألهٔ ۷.۲.۳ فرض کنید ۳۷ نامه نوشته‌اید و روی ۳۷ پاکت هم نشانی گیرنده‌های نامه‌ها را نوشته‌اید. چشمان خود را ببندید و درون هر پاکت به تصادف یک نامه بگذارید. احتمال اینکه فقط یک پاکت حاوی نامهٔ درست باشد و در ۳۶ پاکت دیگر نامه‌های اشتباه گذاشته باشید چقدر است؟

راه‌حل. خواهیم دید که این مسأله اگرچه شبیه مسأله‌های قبلی است، کاملاً با آنها فرق دارد.

مانند راه‌حل آخرین مسألهٔ پاکتهای نامه در بخش قبل، فرض کنید که نامه‌ها و همچنین پاکتها را از ۱ تا ۳۷ شماره‌گذاری کرده‌ایم. حالا فقط یکی از نامه‌ها در پاکت درست قرار دارد.

فرض کنید نامهٔ ۱ در پاکتِ ۱ است. برای محاسبهٔ تعداد آرایشهای ۳۶ نامهٔ دیگر، توجه می‌کنیم که هریک از نامه‌های ۲ تا ۳۷ درون یکی از پاکتهای ۲ تا ۳۷ است، ولی هیچ نامه‌ای درون پاکتی با شمارهٔ همان نامه نیست. پس باید جایگشتهای ۳۶ شیء را که هیچ‌کدام در موضع اصلی خود نیست بشماریم.

درصورتی‌که نامهٔ ۲ درون پاکتِ ۲ قرارگرفته باشد، باز هم می‌توان تحلیل مشابهی انجام داد. باز هم باید جایگشتهای ۳۶ شیء را که هیچ‌کدام در موضع اصلی خود نیست بشماریم.

درصورتی‌که نامهٔ ۳ درون پاکتِ ۳ باشد، یا نامهٔ ۴ درون پاکتِ ۴ باشد، و غیره، باز هم می‌توان تحلیل مشابهی انجام داد.

پس تعداد کلِّ توزیعهای ۳۷ نامه ۳۷ برابر تعداد جایگشتهای ۳۶ شیء است که هرکدام در جایی غیر از جای اصلی گذاشته شده است. پس مسأله به محاسبهٔ مقدار اخیر تبدیل شده است. سرانجام، باید مقداری را که به‌دست می‌آوریم بر !۳۷، یعنی تعداد جایگشتهای ۳۷ شیء تقسیم کنیم.

در اینجا هم مانند بسیاری از استدلالهای تحلیلی دیگر، مسألهٔ اصلی به مسألهٔ جدیدی که به خودیِ خود جالب است تبدیل شده است. ما این مسأله را بیان و حل می‌کنیم و سپس دوباره به سراغ مسألهٔ اصلی می‌رویم.

زیرمسألهٔ ۸.۲.۳ (برنولی ـ اویلر: پیشرفته) فرض کنید k شیء متمایز در مکانهای از ۱ تا k دارید. به چند طریق می‌توان ترتیب این اشیا را تغییر داد به‌طوری‌که هیچ شیئی در جای اصلی خود قرار نگیرد؟

راه‌حل. اشیا را $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k و جای آنها را $P_۱$، ... و P_k می‌نامیم. عددی که در جستجوی آن هستیم تعداد بازآراییهای $a_۱$، ... و a_k در مکانهای $P_۱$، ... و P_k است به‌طوری‌که هیچ a_jای در جای متناظر خود، یعنی P_j، قرار نگیرد؛ این عدد را $M(k)$ می‌نامیم.

دو حالت مختلف را جداگانه بررسی می‌کنیم: (۱) وقتی $a_۱$ در $P_۲$ و $a_۲$ در $P_۱$ باشد و $a_۳$، ... و a_k در $P_۳$، ... و P_k توزیع شده باشند؛ (۲) وقتی $a_۱$ در $P_۲$ باشد ولی $a_۲$ در $P_۱$ نباشد.

حالت (۱). جای $a_۱$ و $a_۲$ از پیش تعیین شده است. $k - ۲$ شیء $a_۳$، ... و a_k باید در $P_۳$، ... و P_k توزیع شوند به‌طوری‌که هیچ a_jای در P_j نباشد. اما تعداد راههای ممکن برای این کار همان $M(k - ۲)$ است.

حالت (۲). بهتر است حالت دوم را از این دیدگاه ببینیم: می‌خواهیم $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$، $\cdots$ و a_k را در $P_۱$، $P_۳$، $P_۴$، ... و P_k توزیع کنیم. اما اولین شیء (یعنی $a_۲$) نباید در اولین جا (یعنی $P_۱$) باشد، دومین شیء (یعنی $a_۳$) نباید در دومین جا (یعنی $P_۳$) باشد، و غیره. به بیان دیگر، این حالت توصیف $M(k - ۱)$ است.

پس روی‌هم‌رفته، تعداد بازآراییهای مجازی که در آنها $a_۱$ در $P_۲$ باشد $M(k - ۲) + M(k - ۱)$ است.

اکنون می‌توانیم تحلیل مشابهی را برای تعیین تعداد بازآراییهای مجازی که در آنها $a_۱$ در $P_۳$ باشد انجام دهیم. البته باز هم جواب $M(k - ۲) + M(k - ۱)$ است. و اگر باز هم همین تحلیل را برای تعیین تعداد بازآراییهای مجازی که در آنها $a_۱$ در $P_۴$ باشد تکرار کنیم، باز هم به همان جواب $M(k - ۲) + M(k - ۱)$ می‌رسیم. و اگر بخواهیم $a_۱$ در $P_۵$ یا $P_۶$ یا $\cdots$ یا P_k باشد باز هم به همین نتیجه می‌رسیم. به این ترتیب، $k - ۱$ نتیجهٔ یکسان، $M(k - ۲) + M(k - ۱)$، برای تعداد آرایشها به‌دست آورده‌ایم. روی‌هم‌رفته، عددی که می‌خواهیم پیدا کنیم، یعنی تعداد کلِ بازآراییهای مجاز $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k برابر است با

$$M(k) = (k - ۱)[M(k - ۲) + M(k - ۱)]$$

این رابطه را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$M(k) = k \times M(k - ۱) - M(k - ۱) + (k - ۱) \times M(k - ۲)$$

و یا

$$M(k) - k \times M(k-۱) = (-۱)[M(k-۱) - (k-۱) \times M(k-۲)] \qquad (*)$$

این رابطه‌ای بازگشتی برای تابع $M(k)$ است. رابطه‌های بازگشتی ابزاری مهم در ریاضیاتِ متناهی‌اند.

اگر حالتهای ۳، ۴، ۵، $\cdots$ و k از $(*)$ را بنویسیم به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
M(۳) - ۳ \times M(۲) &= (-۱)[M(۲) - ۲ \times M(۱)] \\
M(۴) - ۴ \times M(۳) &= (-۱)[M(۳) - ۳ \times M(۲)] \\
M(۵) - ۵ \times M(۴) &= (-۱)[M(۴) - ۴ \times M(۳)] \\
&\cdots \\
M(k) - k \times M(k-۱) &= (-۱)[M(k-۱) - (k-۱) \times M(k-۲)]
\end{aligned}$$

روشن است که اولین برابری بالا را می‌توانیم در برابری دوم قرار دهیم:

$$M(۴) - ۴ \times M(۳) = (-۱)^{۲}[M(۲) - ۲ \times M(۱)]$$

سپس می‌توانیم این برابری را در برابری سوم قرار دهیم و این کار را ادامه دهیم. نتیجهٔ نهایی چنین است:

$$M(k) - k \times M(k-۱) = (-۱)^{k-۲}[M(۲) - ۲ \times M(۱)]$$

اکنون توجه کنید که $(-۱)^{k-۲} = (-۱)^{k}$. همچنین، $M(۱) = ۰$ و $M(۲) = ۱$ (فقط کافی است بشمارید). با قرار دادن این اطلاعات در آخرین برابری به‌دست می‌آوریم

$$M(k) - k \times M(k-۱) = (-۱)^{k}$$

دو طرف را بر $k!$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{M(k)}{k!} - \frac{M(k-۱)}{(k-۱)!} = \frac{(-۱)^{k}}{k!} \qquad (**)$$

اکنون رابطهٔ $(**)$ را در حالتهای ۲، ۳، ۴، ... و k می‌نویسیم. به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\frac{M(۲)}{۲!} - \frac{M(۱)}{۱!} &= \frac{(-۱)^{۲}}{۲!} \\
\frac{M(۳)}{۳!} - \frac{M(۲)}{۲!} &= \frac{(-۱)^{۳}}{۳!} \\
\frac{M(۴)}{۴!} - \frac{M(۳)}{۳!} &= \frac{(-۱)^{۴}}{۴!} \\
&\cdots \\
\frac{M(k)}{k!} - \frac{M(k-۱)}{(k-۱)!} &= \frac{(-۱)^{k}}{k!}
\end{aligned}$$

این برابریها را با هم جمع می‌کنیم. توجه کنید همهٔ جمله‌های سمت چپ غیر از یکی حذف می‌شوند (این را حذف ادغامی می‌نامیم). نتیجه می‌شود

$$\frac{M(k)}{k!} = \frac{(-۱)^۲}{۲!} + \frac{(-۱)^۳}{۳!} + \frac{(-۱)^۴}{۴!} + \cdots + \frac{(-۱)^k}{k!}$$

و نتیجهٔ نهایی چنین است:

$$M(k) = k!\left(\frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \cdots + \frac{(-۱)^k}{k!}\right)$$

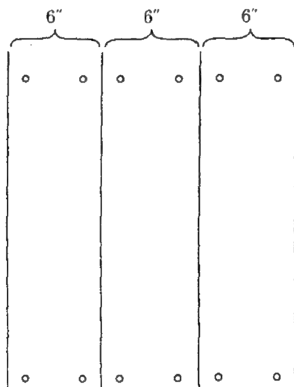
این تعداد کلِّ آرایشها، یا جایگشتهای مجاز است. به این ترتیب، زیرمسأله را کامل حل کرده‌ایم. □

اکنون دوباره به سراغ مسألهٔ ۷.۲.۳ می‌رویم و راه‌حل راکامل می‌کنیم. تا اینجا تعیین کرده‌ایم که تعداد راههای قرار دادن یک نامه در پاکتِ درست و ۳۶ نامه در پاکتهای اشتباه $M(۳۶) \times ۳۷$ است (در اینجا از نمادگذاری زیرمسأله استفاده کرده‌ایم). دراین‌صورت، احتمال روی دادن چنین آرایشی برابر است با

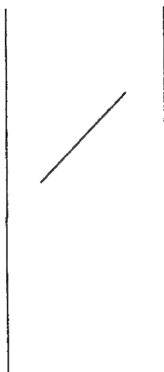
$$\begin{aligned} P &= \frac{۳۷ \times M(۳۶)}{۳۷!} \\ &= \frac{۳۷ \times ۳۶!(۱/۲! - ۱/۳! + ۱/۴! - \cdots + (-۱)^{۳۶}/(۳۶)!)}{۳۷!} \\ &= \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \cdots + \frac{۱}{(۳۶)!} \end{aligned}$$

و این جواب نهایی مسألهٔ ۷.۲.۳ است. □

مسألهٔ ۹.۲.۳ (بوفون؛ کمی استفاده از حسابان لازم است) کف اتاقی با تخته‌هایی به عرض ۶ اینچ فرش شده است (شکل ۱۱۵). دختری میله‌ای به طول ۴ اینچ کف اتاق می‌اندازد. او این کار را بارها، مثلاً N بار، تکرار می‌کند. احتمال این را که میله روی درز بین دو تخته کف اتاق بیفتد به‌عنوان تابعی از N حساب کنید. مقدار مجانبی این احتمال وقتی $N \to \infty$ چقدر است؟



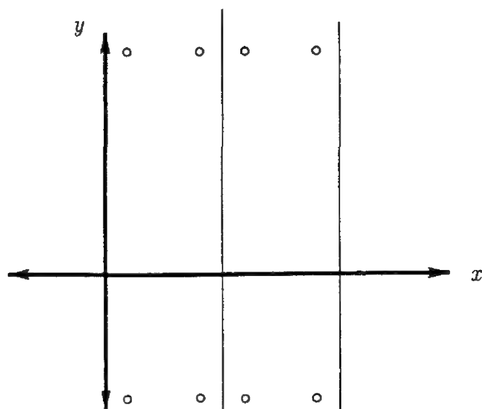
شکل۱۱۵



شکل۱۱۶

راه‌حل. این مسأله‌ای کلاسیک مشهور به «مسألهٔ سوزن بوفون» است. روشن است که احتمال اینکه میله روی درزی بیفتد به زاویهٔ سقوط میله بستگی دارد (شکل ۱۱۶). مثلاً اگر میله موازی با درزها سقوط کند بسیار نامحتمل است که درزی را قطع کند. ولی اگر میله عمود بر درزها سقوط کند کاملاً محتمل است که یکی از درزها را قطع کند. چون این سؤال که میله درزی را قطع می‌کند یا نه به زاویهٔ سقوط میله بستگی دارد، نباید از اینکه π در پاسخ ظاهر می‌شود تعجب کنید. درواقع، معلوم شده است که انداختن میله روی کف اتاق یکی از روشهای محاسبهٔ π است.

دستگاه مختصاتی را مانند شکل ۱۱۷ درنظر می‌گیریم. محور x عمود بر راستای درزها و محور y موازی با درزهاست. مبدأ را روی یکی از درزها می‌گیریم تا محور y منطبق بر این درز باشد.



شکل۱۱۷

برای اینکه مسأله آسانتر شود چند فرض متعارف می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم که میله مانند پاره‌خط بی‌نهایت باریک است. سپس فرض می‌کنیم که یک سر میله قرمزرنگ شده است. «زاویهٔ میله» را چنین اندازه می‌گیریم: میله را بدون دوران طوری منتقل می‌کنیم که سر بی‌رنگ آن در مبدأ قرار گیرد. سپس زاویهٔ جهتداری را که از قسمت مثبت محور x شروع می‌شود و در جهت پادساعتگرد به

میله می‌رسد اندازه می‌گیریم (درست همان کاری که موقع آموختن تابعهای سینوس و کسینوس انجام می‌دادید). اگر این زاویه θ رادیان باشد، می‌گوییم میله با محور x مثبت زاویهٔ θ می‌سازد.

اکنون زاویهٔ θ را با شرط $۰ \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{۲}$ ثابت بگیرید. توجه خود را به میله‌ای معطوف می‌کنیم که به‌گونه‌ای روی کف اتاق می‌افتد که از هر جهت تصادفی است جز اینکه با محور x مثبت زاویهٔ θ می‌سازد. احتمال اینکه این میله درزی را قطع کند چقدر است؟ روشن است که مختص عرض میله مورد توجه ما نیست، چون تأثیری در اینکه میله درزی را قطع می‌کند یا نه ندارد. چیزی که مهم است وضعیت میله در راستای چپ به راست است. مسأله تناوبی است: وقتی که انتهای چپ میله، با حفظ زاویه، از ۰ تا ۶ حرکت کند وضعیت به‌صورت زیر است. تا مسافت معینی، میله درزی را قطع نمی‌کند. سپس عبور از درز شروع می‌شود و میله از چپ به راست از درز عبور می‌کند. وقتی که انتهای چپ میله به ۶ می‌رسد دوباره در وضعیتی مشابه وضعیت اولیه که انتهای چپ میله در ۰ بود هستیم.

اکنون کمی از مثلثات استفاده می‌کنیم. طول میله ۴ اینچ است. وقتی که میله زاویهٔ θ می‌سازد، طول چپ به راست میله $۴\cos\theta$ است. پس وقتی انتهای چپ میله بین ۰ و $۶ - ۴\cos\theta$ باشد، میله درزی را قطع نمی‌کند. ولی وقتی انتهای چپ میله بین $۶ - ۴\cos\theta$ و ۶ باشد، میله درزی را قطع می‌کند. احتمال اینکه میله‌ای که زاویهٔ θ می‌سازد درزی را قطع کند برابر است با

$$P_\theta = \frac{۴\cos\theta}{۶}$$

با کمی تفکر معلوم می‌شود که وقتی $\frac{\pi}{۲} \leqslant \theta \leqslant \pi$ یا وقتی $\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{۳\pi}{۲}$ یا وقتی $\frac{۳\pi}{۲} \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$ همین وضعیت تکرار می‌شود. پس می‌توانیم توجه خود را فقط به $۰ \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{۲}$ معطوف کنیم.

امکان فرود آمدن میله به‌طوری‌که زاویهٔ خاصی بسازد درست برابر امکان فرود آمدن میله است به‌طوری‌که هر زاویهٔ دیگری بسازد. پس همهٔ P_θها هم‌احتمال‌اند. جواب نهایی را با میانگین گرفتن از P_θ روی $۰ \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{۲}$ به‌دست می‌آوریم. پس احتمال اینکه میله درزی را قطع کند برابر است با

$$\frac{۱}{\pi/۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۴\cos\theta}{۶}d\theta = \frac{۴}{۳\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos\theta d\theta = \frac{۴}{۳\pi} \qquad \square$$

[راهنمایی: این تنها جایی در راه‌حل این مسأله است که واقعاً از حسابان استفاده می‌کنیم. می‌توان از این هم اجتناب کرد. درواقع با استفاده از ایده‌هایی که در بسط حسابان نقش داشته‌اند می‌توان از به کار بردن حسابان در مسأله اجتناب کرد. به جای میانگین گرفتن از P_θ با استفاده از انتگرال، که ممکن است آن را قبلاً هرگز ندیده باشید، می‌توانید به‌صورت زیر عمل کنید. فاصلهٔ $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ را به صد زیرفاصلهٔ کوچکتر با طولهای یکسان تقسیم کنید. P_θ را در صد مقدار θ که هریک از آنها در یکی از زیرفاصله‌هاست حساب کنید. (البته باید از کامپیوتر استفاده کنید.) صد مقداری را که به‌دست آورده‌اید با هم جمع و حاصل را بر ۱۰۰ تقسیم کنید. جوابی که به‌دست می‌آورید بسیار نزدیک به $\frac{۴}{۳\pi}$ است.]

مؤلف کتاب با انداختن میله‌ای به طول ۴ اینچ روی کف اتاقی که با تخته‌هایی به عرض۶ اینچ فرش شده بود آزمایشی انجام داده است. میله پس از ۱۰۰ بار انداختن ۴۶ بار درزها را قطع کرد. پس احتمال برخورد میله با درزها ۰٫۴۶ شد. با برابر قرار دادن این مقدار با عبارت $\frac{4}{3\pi}$، مقدار ۲٫۹ برای π به‌دست می‌آید. این مقدار چندان دقیق نیست. می‌توان انتظار داشت که اگر تعداد آزمایشها بسیار زیاد باشد می‌توان مقدار π را با هر دقتی به‌دست آورد.

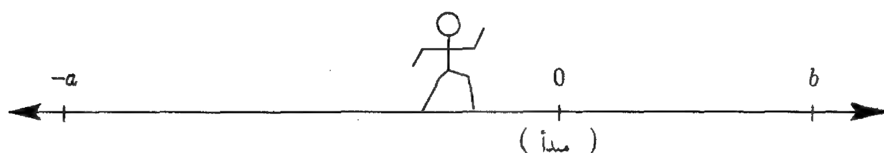
وُلف در سال ۱۸۵۰ آزمایشی را در زوریخ انجام داد. او از سوزنی به طول ۳۶ میلیمتر و تخته‌هایی به عرض ۴۵ میلیمتر استفاده کرد. البته احتمالی که او حساب کرد با عبارتی که ما در مسألهٔ قبل به‌دست آوردیم فرق داشت. او با ۵۰۰۰ بار انداختن سوزن به مقدار ۳٫۱۵۹۶ برای π رسید. فاکس در انگلستان در سال ۱۸۶۴ آزمایش مشابهی را انجام داد و با ۱۱۰۰ بار انداختن سوزن به مقدار ۳٫۱۴۱۹ برای π رسید. اسمیت در انگلستان (۱۸۵۵) با ۳۲۰۰ بار انداختن سوزن مقدار ۳٫۱۵۵۳ را برای π یافت.

مسألهٔ پیکارجوی ۱۰.۲.۳ مسألهٔ سوزن بوفون را درصورتی‌که فاصلهٔ درزهای تخته‌ها از یکدیگر d و طول میله ℓ باشد تحلیل کنید. وقتی $\ell > d$ چه مطلب جالب جدیدی به‌نظر می‌آید؟

اکنون بخش مهمی از نظریهٔ احتمال را که «قدم زدن تصادفی» نام دارد بررسی می‌کنیم.

مسألهٔ ۱۱.۲.۳ فرض کنید شخصی از مبدأ محور اعداد حقیقی شروع به قدم‌زدن در امتداد محور می‌کند و هر گام او ۱ واحد است. او هر بار یک قدم به طول واحد یا به سمت چپ یا به سمت راست برمی‌دارد. جهت حرکت او را پرتاب سکه‌ای تعیین می‌کند: هر بار که سکه شیر بنشیند یک قدم به سمت چپ (از دید ناظر) و هر بار که سکه خط بنشیند یک قدم به سمت راست (از دید ناظر) برمی‌دارد. پس اگر نتیجهٔ اولین شش پرتاب سکه ش، ش، خ، ش، خ و ش باشد، شخص موردنظر ما دو قدم به چپ، یک قدم به راست، یک قدم به چپ، یک قدم به راست و یک قدم به چپ برمی‌دارد. دراین صورت، او پس از شش قدم در نقطهٔ ۲− است.

اکنون فرض کنید که دو «سد جاذب» در $-a$ و b قرار داده‌ایم، که در اینجا a و b دو عدد طبیعی ثابت‌اند (شکل ۱۱۸ را ببینید). اگر شخص موردنظر ما به $-a$ یا b برسد «جذب می‌شود» و راهپیمایی او بلافاصله تمام می‌شود. سؤالی که می‌خواهیم بررسی کنیم این است: احتمال اینکه بازی با رسیدن شخص به $-a$ تمام شود چقدر است؟



شکل۱۱۸

راه‌حل. روشن است که اگر $a = b$، چون شخص موردنظر ما از مبدأ شروع به راهپیمایی کرده است (و مبدأ از دو سد جاذب هم‌فاصله است) امکان خارج شدن او از $-a$ با امکان خارج شدن او از b برابر است. اگر $a < b$، امکان خارج شدن از b بیشتر از امکان خارج شدن از $-a$ است (چون b به مبدأ نزدیکتر است)؛ اگر $a > b$، امکان خارج شدن از $-a$ بیشتر از امکان خارج شدن از b است (چون $-a$ به مبدأ نزدیکتر است). اما می‌خواهیم جواب کمّی به‌دست آوریم.

بهتر است چند نماد معرفی کنیم. فرض کنید شخص موردنظر ما در n ایستاده باشد. در این حالت، r_n را برای نمایش احتمال جذب شدن او در $-a$ به‌کار می‌گیریم. می‌توانیم بین r_n، r_{n-1} و r_{n+1} رابطه‌ای به‌صورت زیر به‌دست آوریم. وقتی که شخص موردنظر ما در n ایستاده است، با حرکت بعدی یا به $n - 1$ می‌رسد یا به $n + 1$ و این دو پیشامد هم احتمال‌اند. اگر با حرکت بعدی به $n - 1$ برسد، احتمال خروج از $-a$ می‌شود r_{n-1}؛ اگر با حرکت بعدی به $n + 1$ برسد، احتمال خروج از $-a$ می‌شود r_{n+1}. چون این احتمالها برابرند،

$$r_n = \frac{1}{2}[r_{n-1} + r_{n+1}]$$

اما معادلهٔ اخیر بیان می‌کند که r_n تابعی خطی از n است (نمودار $r_n = r(n)$ را برحسب n رسم کنید). بنابراین

$$r_n = \alpha n + \beta$$

این شکل عمومی تابع خطی است. اما اطلاعات زیر را از این خط داریم: اگر شخص موردنظر ما در $-a$ باشد بازی تمام شده است، و بنابراین $r_{-a} = 1$ ؛ همچنین اگر او در b باشد، بازی تمام شده است، و بنابراین $r_b = 0$. پس

$$1 = r_{-a} = \alpha \cdot (-a) + \beta$$

و

$$0 = r_b = \alpha \cdot b + \beta$$

می‌توانیم این دو معادله را حل کنیم و به جوابهای زیر برسیم:

$$\alpha = \frac{-1}{a+b}, \qquad \beta = \frac{b}{a+b}$$

در نتیجه،

$$r_n = \left(-\frac{1}{a+b}\right) n + \frac{b}{a+b} = \frac{b-n}{a+b}$$

معادلهٔ اخیر چه چیزی در مورد سؤال اصلی ما بیان می‌کند؟ به‌خاطر آورید که r_n احتمال پایان یافتن بازی با جذب شدن راهپیما در $-a$ است، به‌شرطی که او در حال حاضر در n ایستاده باشد. به‌خصوص، اگر راهپیما در حال حاضر در 0 ایستاده باشد،

$$r_0 = \frac{b}{a+b}$$

اگر نقش a و b را عوض کنیم، می‌بینیم که اگر راهپیما در ۰ ایستاده باشد، احتمال خروج او از b، که آن را با $s_\circ$ نشان می‌دهیم، برابر است با

$$s_\circ = \frac{a}{a+b}$$

پس به‌روشنی می‌بینیم که اگر a و b برابر باشند، احتمالها برابرند. همچنین، اکنون درستی گزاره‌هایی را که در ابتدای راه‌حل بیان کردیم به‌طور کمّی درمی‌یابیم. □

مسألهٔ پیکارجوی ۱۲.۲.۳ امیدِ احتمال میانگین همهٔ پیشامدهای سادهٔ ممکن است. امیدِ تعداد گامها تا پایان بازی در مسألهٔ قبل چیست؟ [راهنمایی: M_n را تعداد گامهایی بگیرید که شخص موردنظر تا هنگام جذب شدن می‌پیماید، به فرض اینکه او در حال حاضر در n ایستاده باشد. نماد $E(M_n)$ معرف امید M_n است. مانند راه‌حل مسألهٔ قبل، $E(M_n)$ را با $E(M_{n-1})$ و $E(M_{n+1})$ مرتبط کنید. **توجه کنید که این رابطه دقیقاً مانند رابطهٔ مسألهٔ قبل نیست، چون در اینجا تعداد گامها را می‌شماریم نه احتمال آن را!**]

به‌عنوان نکتهٔ آخر، از «مسألهٔ ورشکستگی» یاد می‌کنیم. این مسأله بازی‌یی بین دو بازیکن A و B است. بازیکن A بازی را با a دلار و بازیکن B بازی را با b دلار شروع می‌کند. در هر بازی سکه‌ای پرتاب می‌شود. اگر سکه شیر بنشیند A یک دلار به B می‌دهد. اگر سکه خط بنشیند، B یک دلار به A می‌دهد. مسألهٔ ۱۱.۲.۳ و مسألهٔ پیکارجوی ۱۲.۲.۳ را برحسب این بازی تعبیر کنید.

۳.۳ باز هم دربارهٔ شمارش

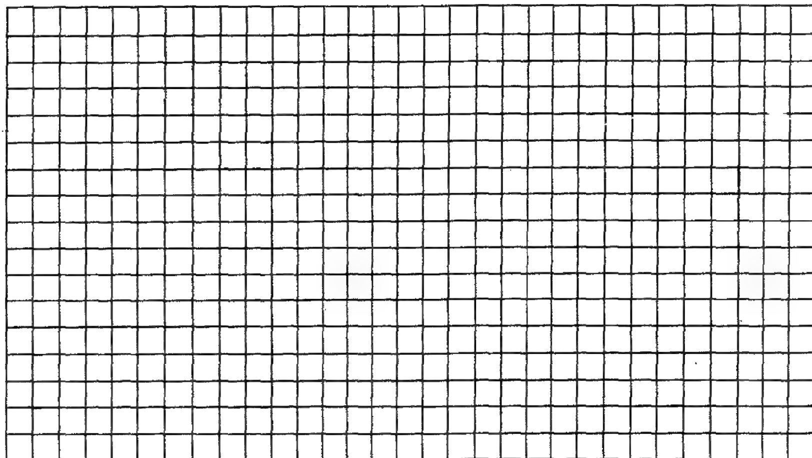
مسألهٔ ۱.۳.۳ تور مسطحی به پهنای ۳۱ مربع و ارتفاع ۱۷ مربع رسم کنید. چند مستطیل نابدیهی مختلف می‌توان رسم کرد که مرزشان خطهای تور باشد؟ شکل ۱۱۹ را ببینید. [در اینجا منظور از «نابدیهی» این است که طول و عرض مستطیلها مثبت‌اند.]

راه‌حل. به روشی مستدل برای شمردن مستطیلها نیاز داریم. توجه کنید که هر مستطیل با نقطهٔ سمت چپ پایین آن، طول آن و عرض آن به‌طور یکتا مشخص می‌شود.

نقطهٔ سمت چپ پایینِ تور در شکل ۱۱۹ را مبدأ می‌گیریم و نقطه‌ها را به شیوهٔ معمول دستگاه مختصات دکارتی مشخص می‌کنیم (طول ضلع مربعهای تور را یک واحد می‌گیریم).

چند مستطیل ممکن است گوشهٔ سمت چپ پایینشان در مبدأ باشد؟ ۳۱ پهنا، از ۱ تا ۳۱، و ۱۷ ارتفاع، از ۱ تا ۱۷ وجود دارد. پس روی‌هم‌رفته $527 = 17 \times 31$ مستطیل هست که گوشهٔ سمت چپ پایین آنها در ۰ است.

این شروع خوبی است ولی روشی بسیار خسته‌کننده برای شمردن همهٔ مستطیلهاست. اکنون کمی تحلیلی‌تر عمل می‌کنیم. فرض کنید مستطیلهایی را که گوشهٔ سمت چپ پایینشان در (j,k) است،



شکل۱۱۹

به‌طوری‌که $۳۰ \geqslant j \geqslant ۰$ و $۱۶ \geqslant k \geqslant ۰$، درنظر گرفته‌ایم. $۳۱ - j$ پهنای مختلف و $۱۷ - k$ ارتفاع مختلف برای چنین مستطیلهایی ممکن است. پس روی‌هم‌رفته $(۳۱ - j) \times (۱۷ - k)$ مستطیل وجود دارد که گوشهٔ سمت چپ پایینشان در (j, k) است. با توجه به حدود مقادیر j و k تعداد کلِّ مستطیلهای غیربدیهیِ ممکن برابر است با

$$S = \sum_{j=۰}^{۳۰} \sum_{k=۰}^{۱۶} (۳۱ - j) \times (۱۷ - k)$$

بسط جمعوندها با استفاده از قانون توزیع‌پذیری، وگروهبندی مجدد آنها محاسبه را ساده‌تر می‌کند. می‌توانیم بنویسیم

$$S = \sum_{j=۰}^{۳۰} \sum_{k=۰}^{۱۶} [۵۲۷ - ۱۷j - ۳۱k + jk]$$

و این نیز برابر است با

$$\sum_{j=۰}^{۳۰} \sum_{k=۰}^{۱۶} ۵۲۷ - \sum_{j=۰}^{۳۰} \sum_{k=۰}^{۱۶} ۱۷j - \sum_{j=۰}^{۳۰} \sum_{k=۰}^{۱۶} ۳۱k + \sum_{j=۰}^{۳۰} \sum_{k=۰}^{۱۶} jk$$

$$= [۵۲۷ \times ۳۱ \times ۱۷] - ۱۷ \times ۱۷ \times \sum_{j=۰}^{۳۰} j$$

$$- ۳۱ \times ۳۱ \times \sum_{k=۰}^{۱۶} k + \left[\sum_{j=۰}^{۳۰} j\right] \times \left[\sum_{k=۰}^{۱۶} k\right]$$

اکنون با استفاده از فرمول گاوس که در بخش ۲.۱ دیدیم می‌توانیم هریک از مجموعهای رابطهٔ بالا را حساب کنیم:

$$S = ۲۷۷۷۲۹ - ۲۸۹ \times ۴۶۵ - ۹۶۱ \times ۱۳۶ + ۴۶۵ \times ۱۳۶$$

$$= ۲۷۷۷۲۹ - ۱۳۴۳۸۵ - ۱۳۰۶۹۶ + ۶۳۲۴۰$$

$$= ۷۵۸۸۸$$

□

در فصل ۱ دیدیم که چگونه از روش استقرا برای محاسبهٔ مجموعهای متناهی خاصی مانند $k + \cdots + ۳ + ۲ + ۱$ استفاده کنیم. اکنون مجموع دیگری به نام مجموع هندسی را بررسی می‌کنیم.

مسألهٔ ۲.۳.۳ فرض کنید λ عددی حقیقی و k عددی طبیعی باشد. مجموع زیر را حساب کنید:

$$S = ۱ + \lambda + \lambda^۲ + \cdots + \lambda^k$$

راه‌حل. کلید راه‌حل این مسأله توجه به این نکته است که حاصل‌ضرب λS فرق چندانی با S ندارد. درواقع

$$\lambda S = \lambda + \lambda^۲ + \lambda^۳ + \cdots + \lambda^{k+۱}$$

می‌بینیم که تفاوت این دو مجموع فقط در وجود ۱ در S و $\lambda^{k+۱}$ در λS است. پس

$$S - ۱ = \lambda S - \lambda^{k+۱}$$

یعنی

$$(\lambda - ۱)S = \lambda^{k+۱} - ۱$$

و این را نیز می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$S = \frac{\lambda^{k+۱} - ۱}{\lambda - ۱}$$

□

راه‌حل مسألهٔ قبل چه چیزی به ما می‌گوید؟ مثلاً فرض کنید که

$$S = ۱ + \left(\frac{۱}{۳}\right) + \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ + \cdots + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۱۰۰}$$

و می‌خواهیم مقدار S را صریحاً به‌دست آوریم. جمع کردنِ دستی این عددها کاری خسته‌کننده و وقت‌گیر است. اما این مجموع کاملاً شبیه الگوی سری هندسی، به‌ازای $\lambda = \frac{۱}{۳}$ و $k = ۱۰۰$، است. پس

$$S = \frac{(۱/۳)^{۱۰۱} - ۱}{(۱/۳) - ۱} = \frac{۳}{۲} \times \left(۱ - \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۱۰۱}\right)$$

اکنون با استفاده از ماشین‌حساب می‌توان دید که مقدار عبارت اخیر حدود $۱/۵ - ۹/۷۰۲ \times ۱۰^{-۴۹}$ است.

درصورتی‌که $-1 < \lambda < 1$، بهتر است به‌صورت زیر استدلال کنیم. اگر

$$k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

قرار می‌دهیم

$$S_k = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^k$$

از مسألهٔ قبل می‌دانیم که

$$S_k = \frac{1 - \lambda^{k+1}}{1 - \lambda} \qquad (*)$$

اکنون می‌توانیم بپرسیم اگر به جای اینکه تعدادی متناهی از توانهای λ را با هم جمع کنیم همهٔ توانهای λ را با هم جمع کنیم چه اتفاقی می‌افتد. این کار (به مفهومی که وقتی حسابان بیاموزید دقیقتر با آن آشنا می‌شوید) متناظر است با میل دادن k به بی‌نهایت در برابری $(*)$.

نتیجه این است که مجموع $S = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots$، یعنی مجموع همهٔ توانهای نامنفی λ چنین به‌دست می‌آید: می‌پرسیم که اگر k بی حد و مرز بزرگ شود، طرف راست $(*)$ چه می‌شود. چون $|\lambda| < 1$، می‌توان پذیرفت که وقتی k بی حد و مرز بزرگ شود، λ^{k+1} کوچکتر و کوچکتر می‌شود، و درواقع به 0 میل می‌کند. به بیان دیگر $S_k \to \frac{1}{(1-\lambda)}$. می‌نویسیم

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j = \frac{1}{1 - \lambda} \qquad (**)$$

این گونه‌ای از نمادگذاری استاندارد ریاضی برای مجموعیابی است (ابتدای بخش ۲.۳ را ببینید). نماد $\sum$ را «سیگمای بزرگ» می‌نامیم. این نماد مجموعیابی را نشان می‌دهد. حد پایینی به معنی این است که در ابتدای عمل مجموعیابی نمای j برابر 0 است، و حد بالایی بی‌کران است (به بیان دیگر، همهٔ توانهای λ را با هم جمع می‌کنیم).

مثالی روشنگر می‌آوریم: مجموع زیر برابر چیست؟

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$$

نمودار فاصلهٔ $[0, 2]$ را رسم کنید. مجموع اولین دو جمله $\frac{3}{2}$ است. یک جملهٔ دیگر را که جمع کنید نصف فاصلهٔ باقی‌مانده تا ۲ را می‌پوشانید. یک جملهٔ دیگر را که جمع کنید باز هم نصف فاصلهٔ باقی‌مانده تا ۲ را می‌پوشانید. درواقع، هر جملهٔ دیگر را که اضافه کنید این ویژگی کلیدی تکرار می‌شود. فرض اینکه کلِّ مجموع برابر ۲ باشد پذیرفتنی است.

درواقع، فرمول جدیدِ ما این پیش‌بینی را تأیید می‌کند:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1}{1 - (1/2)} = 2$$

در مسألهٔ بعدی این ایده‌های جدید در مورد سری هندسی را به شکلی بسیار ساده به‌کار می‌گیریم.

مسألهٔ ۳.۳.۳ دنبالهٔ فیبوناتچی دنباله‌ای معروف در ریاضیات، درواقع در همهٔ علوم، است. این دنباله به طریق زیر ساخته می‌شود: دو جملهٔ اول ۱ هستند. جملهٔ بعد مجموع دو جملهٔ قبل است؛ یعنی جملهٔ سوم ۲ است. جملهٔ بعدی (چهارم) مجموع دوجملهٔ قبل است: ۳ = ۲ + ۱. جملهٔ بعدی نیز مجموع دو جملهٔ قبل است: ۵ = ۳ + ۲. درواقع، ده جملهٔ اول دنبالهٔ فیبوناتچی عبارت‌اند از

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵$$

جملهٔ jاُم دنباله را با a_j نشان می‌دهیم و برابر است با مجموع دوجملهٔ قبل از آن ($j \geqslant ۳$). پس

$$a_۰ = ۱, \quad a_۱ = ۱, \quad a_۲ = ۲, \quad a_۳ = ۳, \quad a_۴ = ۵, \quad \cdots$$

ثابت کنید که فرمول زیر برای دنبالهٔ فیبوناتچی درست است:

$$a_j = \frac{\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^j - \left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^j}{\sqrt{۵}}$$

راه‌حل. از روش تابعهای مولد که فنی قدرتمند است و در سراسر علوم ریاضی به‌کار گرفته می‌شود استفاده می‌کنیم.

می‌نویسیم

$$F(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \cdots$$

در اینجا a_jها جمله‌های دنبالهٔ فیبوناتچی‌اند و حرف x نمایشگر متغیری نامشخص است. نکتهٔ مهم در اینجا این است که اهمیتی نمی‌دهیم که x چیست. می‌خواهیم تابع F را به‌گونه‌ای دستکاری کنیم که بتوانیم از آن a_jها را پیدا کنیم. $F(x)$ را به‌عنوان چندجمله‌ایی با تعداد زیادی ضریب ببینید.

توجه کنید که

$$xF(x) = a_۰x + a_۱x^۲ + a_۲x^۳ + a_۳x^۴ + \cdots$$

و

$$x^۲F(x) = a_۰x^۲ + a_۱x^۳ + a_۲x^۴ + a_۳x^۵ + \cdots$$

پس با گروهبندی توانهای مشابه x معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} F(x) - xF(x) - x^۲F(x) \\ &= a_۰ + (a_۱ - a_۰)x + (a_۲ - a_۱ - a_۰)x^۲ \\ &\quad + (a_۳ - a_۲ - a_۱)x^۳ + (a_۴ - a_۳ - a_۲)x^۴ + \cdots \end{aligned}$$

اما ویژگی اساسی تعریف‌کنندهٔ دنبالهٔ فیبوناتچی این است که $a_۲-a_۱-a_۰ = ۰$، $a_۳-a_۲-a_۱ = ۰$، و غیره. پس معادلهٔ بالا بسیار ساده است:

$$F(x) - xF(x) - x^۲F(x) = a_۰ + (a_۱ - a_۰)x$$

همچنین می‌دانیم که $a_0 = a_1 = 1$. پس معادله تبدیل می‌شود به

$$(1 - x - x^2)F(x) = 1$$

و یا

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} \qquad (***)$$

بهتر است که مخرج را به‌صورت زیر تجزیه کنیم:

$$F(x) = \frac{1}{\left[1 - \frac{-2}{1-\sqrt{5}}x\right]\left[1 - \frac{-2}{1+\sqrt{5}}x\right]}$$

(فقط کافی است سمت راست را ساده کنید و ببینید که با (***) برابر است.)

با کمی دستکاری جبریِ بیشتر نتیجه می‌گیریم که

$$F(x) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left[\frac{1}{1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}}x}\right] + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left[\frac{1}{1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}x}\right]$$

اکنون می‌خواهیم فرمول (**) را برای هریک از کسرهای درون کروشه به‌کار گیریم. برای کسر اول، $-\frac{2}{1-\sqrt{5}}x$ را λ می‌گیریم. عبارت اول درون کروشه برابر است با

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}x\right)^j$$

به همین ترتیب، عبارت دوم برابر است با

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}x\right)^j$$

پس روی‌هم‌رفته نتیجه می‌گیریم

$$F(x) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}x\right)^j + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}x\right)^j$$

با گروهبندی جمله‌های شامل توانهای مشابه x، سرانجام نتیجه می‌گیریم

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}x\right)^j + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}x\right)^j\right]x^j$$

ولی راه‌حل مسأله را با فرمول زیر شروع کردیم:

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

این دو فرمول متفاوت برای $F(x)$ باید با هم سازگار باشند. به‌خصوص، ضریبهای توانهای مختلف x باید در دو فرمول یکی باشند. نتیجه می‌گیریم که

$$a_j = \frac{۵+\sqrt{۵}}{۱۰}\left(-\frac{۲}{۱-\sqrt{۵}}\right)^j + \frac{۵-\sqrt{۵}}{۱۰}\left(-\frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}\right)^j$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{۵+\sqrt{۵}}{۱۰} = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \times \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}, \qquad \frac{۵-\sqrt{۵}}{۱۰} = -\frac{۱}{\sqrt{۵}} \times \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

و

$$-\frac{۲}{۱-\sqrt{۵}} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}, \qquad -\frac{۲}{۱+\sqrt{۵}} = \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

با جایگذاری این چهار رابطه در فرمول a_j و چند ساده‌سازی جبری نتیجه می‌گیریم

$$a_j = \frac{\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^j - \left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^j}{\sqrt{۵}}$$

و این همان رابطهٔ مطلوب است. □

در تمرینهای آخر فصل فرصتی برای خو گرفتن با روش تابعهای مولد خواهید داشت. پیش از اینکه شروع به دست و پنجه نرم کردن با این مسأله‌ها بکنید فنونی را که برای تحلیل دنبالهٔ فیبوناتچی به‌کار گرفتیم مرور کنید. توجه کنید که چگونه F، xF و $x^۲F$ را با هم ترکیب کردیم تا حذفهای مهمی صورت گیرد. ما این‌گونه از ویژگیهای خاص دنبالهٔ فیبوناتچی استفاده کردیم. در مسأله‌های دیگر، مانند مسأله‌های آخر فصل، به ترکیبهای دیگری، احتمالاً با ضریبهای متفاوت، متناسب با هر مسألهٔ خاص نیاز خواهید داشت.

۴.۳ مسألهٔ کلاسیک ازدواج و ایده‌های مرتبط با آن

مرد جوانی می‌خواهد ازدواج کند. او تصمیم می‌گیرد که به خواستگاری حداکثر ۱۰۰ دختر خانم برود. او پس از آشنا شدن با هر دختر تصمیم می‌گیرد که با او ازدواج کند یا به خواستگاری دختر دیگری برود. هر بار که دختری را نپذیرد دیگر نمی‌تواند دوباره از آن دختر خواستگاری کند. نهایتاً او باید فقط یک دختر را انتخاب و با او ازدواج کند.

نکتهٔ جالب این مسأله این است که مرد جوان می‌تواند به گذشته بنگرد ولی هیچ اطلاعی از آینده ندارد. او در هر لحظه می‌تواند بگوید «دختری که اکنون از او خواستگاری کرده‌ام زیباتر و سازگارتر از همهٔ دختران قبلی است». بر این اساس ممکن است تصمیم بگیرد که با این دختر ازدواج کند. یا ممکن

است فکر کند که «این دختر عالی است ولی دل به دریا می‌زنم و به امید اینکه به‌زودی همسر بهتری پیدا کنم با او ازدواج نمی‌کنم».

«مسألهٔ ازدواج» تعیین بهترین راه‌کار برای این مرد جوان است. برای اینکه احساسات را در مسأله دخالت ندهیم، مسأله را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

مسألهٔ ۱.۴.۳ در کلاهی ۱۰۰ نوار کاغذی ریخته‌ایم و روی هر نوار عددی طبیعی نوشته‌ایم (توجه کنید که عددهای روی نوارها فقط عددهای از ۱ تا ۱۰۰ نیستند، بلکه هر عدد طبیعی ممکن است روی نوارها نوشته شده باشد). عددها لزوماً ترتیب یا الگوی مشخصی ندارند. روی هیچ دو نواری یک عدد نوشته نشده است، و بنابراین نواری هست که عدد روی آن بزرگ‌ترین عدد است.

شخصی که هیچ اطلاع قبلی از اینکه چه عددهایی روی نوارها نوشته‌ایم ندارد (ولی می‌داند که ۱۰۰ نوار در کلاه هست) با چشمان بسته نوارها را یکی‌یکی از کلاه بیرون می‌آورد. او هر بار عدد روی نوار را نگاه می‌کند و تصمیم می‌گیرد که بازی را تمام کند و به اندازهٔ عدد روی نوار پول بگیرد یا اینکه به بازی ادامه دهد و نوار دیگری را بیرون آورد.

توجه کنید که بازیکن هر نوار را نگاه می‌کند و سپس تصمیم می‌گیرد که بازی را تمام کند یا ادامه دهد. او می‌تواند به پیش برود ولی نمی‌تواند به عقب برگردد. اگر تا وقتی که ۱۰۰اُمین نوار را بیرون می‌آورد انتخابی نکرده باشد اجباراً باید عدد روی ۱۰۰اُمین نوار را بپذیرد و به اندازهٔ آن پول بگیرد.

بهترین راه‌کار برای بازیکن چیست؟ [در اینجا «بهترین راه‌کار» یعنی اینکه بازیکن بیشترین پول ممکن را بگیرد.]

مؤلف با شرمندگی اعتراف می‌کند که وقتی اولین‌بار این مسأله را شنید، لحظه‌ای اندیشید و گفت « هیچ راه‌کاری وجود ندارد، لاعلاج است». این مشکل تا حدودی ناشی از این بود که مؤلف درست درک نکرده بود که راه‌کار چیست، و البته مشکل اصلی این بود که او فکر نمی‌کرد.

پیشاپیش فرض می‌کنیم که راه‌کار به شکل زیر خواهد بود: بازیکن تعداد مشخصی از نوارها، مثلاً k نوار، را بیرون می‌آورد و به دقت به عددهای روی نوارها توجه می‌کند. پس از بیرون آوردن k نوار، بازیکن باید نوار بعدی را که بیرون می‌آورد تعیین کند که این نوار در «ویژگی P» صدق می‌کند یا نه، و ویژگی P باید تعیین شود. بعداً بحث خواهیم کرد که چرا توجه کردن به این نوع راه‌کار معقول است.

راه‌حل. اولین نواری که بیرون می‌آید «نوار ۱» می‌نامیم، دومین نوار را «نوار ۲» می‌نامیم، و همین‌طور تا آخر.

هدف ما بهینه کردن مقدار پولی است که بازیکن دریافت می‌کند. هر راه‌کاری را که منجر به انتخاب $(\ell + 1)$اُمین نوار، $\ell \geqslant k$، شود می‌توان بهبود بخشید. برای این کار بزرگ‌ترین عدد نوشته‌شده روی نوارهای ۱، ۲، . . . و ℓ را M می‌نامیم و آن را به‌خاطر می‌سپاریم. سپس نوار بعدی را که عددی بزرگ‌تر از M روی آن نوشته شده است انتخاب می‌کنیم (اگر چنین نواری بیرون نیاید بازیکن مجبور است به آخرین نوار قناعت کند). با استفادهٔ مکرر از این مطلب درمی‌یابیم که با فرضی که در بند قبل

از شروع راه‌حل کردیم، بهترین راه‌کار این است که بزرگترین عدد نوشته‌شده روی نوارهای ۱، ۲، ... و k را که آن را M می‌نامیم به‌خاطر بسپاریم، و سپس نوار بعدی را که عددی بزرگتر از M دارد انتخاب کنیم.

بعد از تعیین این طرح، کار ما انتخاب بهترین مقدار ممکن برای k است. بزرگترین عدد (بین همهٔ ۱۰۰ نوار) را Q می‌نامیم و فرض می‌کنیم Q روی نوار $r+۱$ نوشته شده باشد. بازیکن فقط درصورتی موفق به انتخاب این نوار می‌شود که دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $r \geqslant k$ (چون مطابق راه‌کار ما k نوار اول انتخاب نمی‌شوند؛ پس اگر $r < k$، آنگاه $(r+۱)$اُمین نوار که بزرگترین عدد را دارد انتخاب نمی‌شود).

۲) بزرگترین عدد روی نوارهای از ۱ تا r بزرگترین عدد روی نوارهای از ۱ تا k نیز باشد (چون اگر بزرگترین عدد روی نوارهای از ۱ تا r، که آن را P می‌نامیم، بزرگتر از بزرگترین عدد روی نوارهای از ۱ تا k، که آن را M می‌نامیم، باشد، آنگاه $P < Q$ ولی P پیش از رسیدن به $(r+۱)$اُمین نوار انتخاب می‌شود).

احتمال اینکه بزرگترین عدد، Q، روی نوار $(r+۱)$اُم (یا هر نوار مشخص دیگری) باشد $\frac{۱}{۱۰۰}$ است. احتمال یافتن نواری که عدد Q روی آن است، به فرض اینکه نوار $(r+۱)$اُم باشد، $\frac{k}{r}$ است (فکر کنید که مثلاً اگر $r = k+۱$ چه اشکالی ممکن است پیش آید). پس روی‌هم‌رفته، احتمال بردن بازی با انتخاب نواری که بزرگترین عدد، Q، روی آن است، به فرض اینکه نوار شامل Q نوار $(r+۱)$اُم باشد و ما r نوار اول را کنار بگذاریم و نوار $(r+۱)$اُم را انتخاب کنیم برابر است با

$$p_r = \frac{۱}{۱۰۰} \times \frac{k}{r}$$

مقادیر مجاز برای r عبارت‌اند از $r = k, k+۱, \ldots, ۹۹$. پس احتمال بردن بازی با راه‌کار مشخص‌شده برابر است با

$$P = \sum_{r=k}^{۹۹} p_r = \frac{k}{۱۰۰} \sum_{r=k}^{۹۹} \frac{۱}{r} \qquad (*)$$

اما باید درس مهمی را در مورد مجموع سمت راست فرمول (*) بیاموزید.

اگر x کوچک و مثبت باشد می‌توانیم بنویسیم

$$\ln(۱+x) = x\left\{\ln\left[(۱+x)^{\frac{۱}{x}}\right]\right\}$$

و عبارت درون لگاریتم سمت راست همان عبارتی است که برای تعریف عدد اویلر، $e \approx ۲٫۷۱۸\ldots$، وقتی $x \to ۰$، استفاده می‌کنیم. پس می‌توانیم بنویسیم

$$\ln(۱+x) \approx x \ln e = x$$

از این نکته در مورد مجموع موردنظر استفاده می‌کنیم:

$$\ln N = \ln\left[\frac{N}{N-۱}\times\frac{N-۱}{N-۲}\times\cdots\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۲}{۱}\right]$$
$$= \ln\left(\frac{N}{N-۱}\right)+\ln\left(\frac{N-۱}{N-۲}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{۳}{۲}\right)+\ln\left(\frac{۲}{۱}\right)$$
$$= \ln\left(۱+\frac{۱}{N-۱}\right)+\ln\left(۱+\frac{۱}{N-۲}\right)$$
$$+\cdots+\ln\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)+\ln\left(۱+\frac{۱}{۱}\right)$$

اکنون می‌توانیم این نکته را که $\ln(۱+x)\approx x$ در مورد هریک از جمعوندهای فرمول بالا، که در آن $\frac{۱}{(N-۱)}$، $\frac{۱}{(N-۲)}$، ... نقش عدد مثبت x را بازی می‌کنند، به‌کار گیریم. نتیجه می‌گیریم

$$\ln N \approx \frac{۱}{N-۱}+\frac{۱}{N-۲}+\cdots+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۱}$$

[این فرمول تقریبی را با ماشین‌حساب یا کامپیوتر بررسی کنید و ببینید چقدر دقیق است!] پس معلوم می‌شود که

$$\sum_{r=k}^{۹۹}\frac{۱}{r}=\sum_{r=۱}^{۹۹}\frac{۱}{r}-\sum_{r=۱}^{k-۱}\frac{۱}{r}\approx \ln ۹۹-\ln(k-۱)=\ln\left(\frac{۹۹}{k-۱}\right)$$

با این تقریب، فرمول (*) تبدیل می‌شود به

$$P\approx\frac{k}{۱۰۰}\cdot\ln\left(\frac{۹۹}{k-۱}\right)$$

می‌خواهیم k را طوری انتخاب کنیم که این احتمال بزرگترین مقدار ممکن را داشته باشد.

البته حسابان بهترین ابزار برای ماکسیمم کردن تابعی از این نوع است. ولی در این کتاب فرض کرده‌ایم که خواننده حسابان نمی‌داند. پس به‌جای استفاده از حسابان، با استفاده از ماشین‌حسابی که نمودار رسم می‌کند یا یکی از نرم‌افزارهای جبری کامپیوتر، نمودار تابع

$$P(x)=\frac{x}{۱۰۰}\cdot\ln\left(\frac{۹۹}{x-۱}\right)$$

را رسم و تعیین کنید که P کجا بیشترین مقدار است. خواهید دید که بیشترین مقدار P تقریباً در $x=\frac{۱۰۰}{e}$ است، که e (همان‌طور که قبلاً گفتیم) عدد اویلر است، یعنی $e\approx ۲٫۷۱۸\ldots$.

از این تحلیل نتیجه می‌گیریم که بازیکن باید اولین $\frac{۱۰۰}{e}$ (مقدار گردشده به نزدیکترین عدد طبیعی به آن، یعنی ۳۷) نواری را که بیرون می‌آورد بررسی کند و بزرگترین عدد نوشته‌شده روی این نوارها را به‌خاطر بسپرد. نوار بعدی که عددی بزرگتر از ماکسیمم مشاهده شده رویش نوشته شده باشد نواری است که باید انتخاب شود. این راه‌کار اپتیمال است. □

تمرین فصل ۳

۱. ثابت کنید که تعداد راههای مختلف توزیع n کارت متمایز بین ۲ نفر $(۲^{n-۱} - ۱)۲$ است. [راهنمایی: این امکان را که تعداد کارتهای این دو نفر یکسان نباشد به‌حساب آورید. هریک از این دو نفر دست‌کم یک کارت می‌گیرد.]

۲. پنج نفر کیسه‌ای پر از الماس دزدیده‌اند و در هتلی پنهان شده‌اند. آنها می‌خواهند الماسها را به‌طور یکسان بین خود تقسیم کنند. یکی از آنها وقتی دیگران در اتاق نیستند الماسها را به پنج قسمت برابر تقسیم می‌کند و یک الماس اضافه می‌ماند. او الماس اضافی را به پیشخدمت هتل می‌دهد، سهم خود را برمی‌دارد و بقیهٔ الماسها را دوباره در کیسه می‌ریزد. بعداً دزد دوم هم وقتی دیگران در اتاق نیستند، بقیهٔ الماسها را به پنج قسمت برابر تقسیم می‌کند و یک الماس اضافه می‌ماند. او هم الماس اضافی را به پیشخدمت می‌دهد، سهم خود را برمی‌دارد و بقیهٔ الماسها را در کیسه می‌ریزد. هریک از سه نفر دیگر هم بقیهٔ الماسها را به پنج قسمت برابر تقسیم می‌کند، یک الماس اضافه می‌آورد و الماس اضافی را به پیشخدمت می‌دهد.

سرانجام، هر پنج نفر دور هم جمع می‌شوند و الماسهای باقی‌مانده را به پنج قسمت برابر تقسیم می‌کنند. یک الماس اضافه می‌ماند. آنها الماس اضافی را به پیشخدمت می‌دهند و هریک از آنها سهم خود را برمی‌دارد.

کمترین تعداد الماسهای دزدی چه ممکن است باشد؟

۳. آرایهٔ شکل ۱۲۰ را درنظر بگیرید. توجه کنید بعد از دو سطر اول، هر سطر چنین ساخته می‌شود: (الف) در انتهای هر سطر یک ۱ قرار دارد؛ (ب) (در هر طرف) جملهٔ یکی مانده به انتهای سطر مجموع دو جملهٔ بالای خود است؛ (ج) (در هر طرف) جمله‌ای که فاصله‌اش از انتهای سطر دوجمله یا بیشتر باشد مجموع سه‌جملهٔ بالای خود است. توضیح دهید که چرا در سطر سوم و در هریک از سطرهای بعد از آن دست‌کم یک عددِ زوج هست.

۱
۱ ۱ ۱
۱ ۲ ۳ ۲ ۱
۱ ۳ ۶ ۷ ۶ ۳ ۱
۱ ۴ ۱۰ ۱۶ ۱۹ ۱۶ ۱۰ ۴ ۱
• • •

شکل ۱۲۰

۴. پسری ۱۰۰ چوب‌کبریت در شش قوطی کبریت ریخته است، و هریک از آنها یا حاوی ۱ چوب‌کبریت است، یا ۵، یا ۱۰، یا ۲۵ یا ۵۰ چوب‌کبریت. او یکی از قوطیهای کبریت را گم می‌کند. احتمال اینکه این قوطی حاوی ۱۰ چوب‌کبریت بوده باشد چقدر است؟

۵. امید تعداد فرزندانی که خانواده‌ای باید داشته باشد تا احتمال داشتن (دست‌کم) دو پسر و یک دختر بیشتر از ۰٫۵ باشد چقدر است؟

۶. عنکبوتی برای زنده ماندن باید روزی سه مگس بخورد. عنکبوت بعد از خوردن سه مگس تا آخر روز دست به شکار نمی‌زند. هر مگسی که سر راه عنکبوت قرار گیرد امکان اینکه به چنگ عنکبوت بیفتد یا از چنگش بگریزد یکی است. با این فرض که امروز پنج مگس سر راه عنکبوت قرار گرفته باشند (که بعضی از آنها زنده مانده‌اند و بعضی شکار شده‌اند)، احتمال زنده ماندن مگس بعدی که سر راه عنکبوت قرار می‌گیرد چقدر است؟

۷. شرکت فروشندهٔ نوعی خودکار، کارتهایی در اختیار فروشندگان قرار داده که روی هریک از آنها یکی از عددهای ۱، ۲، ... یا ۵۲ نوشته شده است. هر خریدار به‌ازای خرید هر خودکار یکی از این کارتها را دریافت می‌کند. هر خریداری که همهٔ شماره‌های ۱، ۲، ... و ۵۲ را در اختیار داشته باشد یک خودکار رایگان دریافت می‌کند. امید تعداد خودکارهایی که هر خریدار باید بخرد تا همهٔ ۵۲ کارت را داشته باشد چقدر است؟

۸. A و B هر دو تیراندازان ماهری هستند و هریک از آنها هر هدفی را به احتمال ۵۰٪ می‌زند. این دو مسابقه‌ای را شروع و به نوبت به هدفی تیراندازی می‌کنند. اولین کسی که تیرش به هدف بخورد برنده می‌شود. اگر A اول تیراندازی کند، احتمال بردنش چقدر است؟

۹. سه لکهٔ (نقطه‌ای) جوهر به تصادف روی قرصی دایره‌ای ریخته شده است. چقدر احتمال دارد که هر سه لکه در یک نیم‌قرص باشند؟

۱۰. در تمرین ۹ به‌جای «قرص دایره‌ای» بنویسید «کره» و به‌جای «نیم‌قرص» بنویسید «نیمکره» و مسألهٔ جدید را حل کنید.

۱۱. در تمرین ۹ به‌جای «قرص دایره‌ای» بنویسید «مربع» و به‌جای «نیم‌قرص» بنویسید «نصف مربع» و مسألهٔ جدید را حل کنید. آیا فرقی می‌کند که مربع به‌صورت افقی، عمودی یا قطری نصف شده باشد؟

۱۲. درون کلاهی ۱۰۰۰ نوار کاغذی هست که روی هریک از آنها عددی طبیعی از ۱ تا ۱۰۰۰ نوشته شده است. با چشمان بسته چهار نوار از کلاه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه عددهای بیرون آمده ترتیب صعودی داشته باشند چقدر است؟

۱۳. در مسألهٔ ۱۲ اگر باز هم ۱۰۰۰ نوار با ۱۰۰۰ عدد متمایز داشته باشیم ولی از پیش ندانیم که این عددها چه هستند یا چه ترتیبی دارند، مسأله چه تغییری می‌کند؟ [توجه کنید که هنوز هم ۱۰۰۰ عدد نوشته‌شده روی نوارها متمایزند.]

۱۴. پنج مهرهٔ قرمز و چهار مهرهٔ آبی را در کیسه‌ای ریخته‌ایم. با چشمان بسته پنج مهره از کیسه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه همهٔ این مهره‌ها قرمز باشند چقدر است؟

۱۵. می‌خواهیم ۱ لیتر آب از رودخانه برداریم، ولی فقط یک ظرف ۸ لیتری و یک ظرف ۵ لیتری داریم و هیچ ظرف دیگری در اختیار نداریم. چگونه باید این کار را بکنیم؟

۱۶. عددهای طبیعی را به‌ترتیب بنویسید. ۵۰۰۰۰اُمین رقمی که می‌نویسید چیست؟

۱۷. کتابی ۷۵۰ صفحه دارد که به طریق معمول شماره‌گذاری شده‌اند. چند رقم برای شماره‌گذاری صفحه‌های کتاب به‌کار رفته است؟

۱۸. مثلثی را T و یکی از ضلعهای این مثلث را s می‌نامیم. احتمال اینکه طول s کوچکتر از میانگین حسابی طول دو ضلع دیگر مثلث باشد چقدر است؟

۱۹. هریک از ۴۱ دانش‌آموز کلاسی سه امتحان جبر، زیست‌شناسی و شیمی داده‌اند. اطلاعات زیر را داریم:

- دوازده دانش‌آموز در امتحان جبر رد شده‌اند.
- پنج دانش‌آموز در امتحان زیست‌شناسی رد شده‌اند.
- هشت دانش‌آموز در امتحان شیمی رد شده‌اند.
- دو دانش‌آموز هم در جبر و هم در زیست‌شناسی رد شده‌اند.
- شش دانش‌آموز هم در جبر و هم در شیمی رد شده‌اند.
- سه دانش‌آموز هم در زیست‌شناسی و هم در شیمی رد شده‌اند.
- یک دانش‌آموز در هر سه امتحان رد شده است.

[توجه: این اطلاعات را چنین بخوانید: پنج دانش‌آموز در زیست‌شناسی رد شده‌اند؛ از اینها ۲ نفر هم در جبر و هم در زیست‌شناسی رد شده‌اند، و غیره.]
چند دانش‌آموز در هر سه درس قبول شده‌اند؟

۲۰. دو تاس سالم را با هم می‌ریزید و نمی‌بینید که چه عددهایی نشسته‌اند. دوست شما می‌گوید مجموع تاسها دست‌کم ۹ است. احتمال اینکه مجموع تاسها ۱۱ باشد چقدر است؟ احتمال اینکه مجموع تاسها دست‌کم ۱۱ باشد چقدر است؟

۲۱. در مقاله‌های جامعه‌شناسی چنین ادعاهای یافت می‌شود: «اکثر مجرمان در ایالات متحد امریکا از خانواده‌های بزرگتر از متوسط‌اند». در این مقاله‌ها معمولاً پیشنهاد می‌شود که رابطهٔ بین جرم و بزرگی خانواده باید بررسی شود.

به‌نظر شما بررسی چنین ارتباطی عاقلانه است؟ آیا می‌توان گفت اکثر مردم از خانواده‌های بزرگتر از متوسط‌اند؟ مدلی آماری بسازید و تعیین کنید که ادعای اخیر ممکن است درست باشد یا نه. چند آزمایش انجام دهید.

۲۲. پنج مرد مجرد و ۵ زن مجرد در اداره‌ای کار می‌کنند. هریک از مردها خانمها را براساس شایستگی ازدواج رده‌بندی کرده است. هریک از خانمها هم مردها را براساس شایستگی ازدواج رده‌بندی کرده است. آیا همیشه ممکن است پنج ازدواج صورت گیرد به‌طوری که همه راضی

باشند؟ [در اینجا منظور از «راضی بودن» این است که اگر آقای x با خانم y ازدواج کرده باشد هیچ‌یک از چهار خانم دیگر این ویژگی را ندارد که اگر x به‌جای y با او ازدواج می‌کرد، هم x با زنی شایسته‌تر و هم آن زن با مردی شایسته‌تر ازدواج کرده بود و هم ازدواجهای دیگر دست‌کم به اندازهٔ حالا مطلوب بودند.]

۲۳. k لیوان در اختیار دارید. این لیوانها را عضوهای مجموعه‌ای k عضوی مانند S بگیرید. یک حبهٔ انگور درون یکی از لیوانها بیندازید. سپس یک حبهٔ انگور درون لیوان دیگری بیندازید. این کار را هر چند بار که می‌خواهید تکرار کنید و سپس دست از این کار بکشید [وقتی دست از کار کشیدید درون هیچ لیوانی بیشتر از یک حبهٔ انگور نیست و ممکن است بعضی از لیوانها خالی باشند]. به این ترتیب، زیر مجموعه‌ای از S را مشخص کرده‌اید. این طرح را برای شمارش زیرمجموعه‌های S به‌کار گیرید و ثابت کنید که تعداد این زیرمجموعه‌ها ۲^k است.

۲۴. درِ خانهٔ دوستی را که سالهاست ندیده‌ام می‌زنم. دخترش در را باز می‌کند و می‌گوید «از دیدن شما خیلی خوشحالم»، بعد می‌گوید «ببخشید می‌روم بچه را که گریه می‌کند بیاورم». احتمال اینکه بچه پسر باشد چقدر است؟

۲۵. سه کارت از یک جنس و به یک اندازه ساخته شده‌اند. هر دو روی یکی از کارتها قرمز است. هردو روی یکی دیگر از کارتها سیاه است. یک روی کارت سوم قرمز و روی دیگر آن سیاه است. کارتها را درون کلاهی می‌ریزیم و یکی از آنها را بیرون می‌آوریم. فقط یک روی این کارت را نگاه می‌کنیم. این رو قرمز است. احتمال اینکه هر دو روی کارت انتخاب شده قرمز باشد چقدر است؟

۲۶. تاس سالمی را شش بار می‌ریزیم. احتمال اینکه تاس دست‌کم پنج‌بار ۵ نشسته باشد چقدر است؟

۲۷. تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی $۸۱۰۰۰۰ = ۳۰^۴$ چند تاست؟

۲۸. مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را به دو زیرمجموعهٔ جدا از هم که اجتماعشان همهٔ S باشد افراز کنید. یکی از این دو مجموعه باید شامل دو عدد و نیز تفاضل آنها باشد. چرا؟

۲۹. برای شماره‌گذاری صفحه‌های کتابی ۱۸۹۰ رقم به‌کار رفته است. این کتاب چند صفحه دارد؟

۳۰. برابریهای زیر را بررسی کنید:

$$\begin{aligned} ۱ &= ۱ \\ ۲+۳+۴ &= ۱+۸ \\ ۵+۶+۷+۸+۹ &= ۸+۲۷ \\ ۱۰+۱۱+۱۲+\cdots+۱۶ &= ۲۷+۶۴ \end{aligned}$$

الگوی موجود را تعیین و اتحاد را ثابت کنید.

۳۱. برابریهای زیر را بررسی کنید:

$$\begin{aligned} ۱ &= ۱ \\ ۱-۴ &= -(۱+۲) \\ ۱-۴+۹ &= ۱+۲+۳ \\ ۱-۴+۹-۱۶ &= -(۱+۲+۳+۴) \end{aligned}$$

الگوی موجود را تعیین و اتحاد را ثابت کنید.

۳۲. پسری ۴۴ سکه دارد و در لباسش ۱۰ جیب هست. آیا او می‌تواند طوری سکه‌ها را در جیبهایش بگذارد که تعداد سکه‌ها در هیچ دو جیبی یکی نباشد؟

۳۳. برابریهای زیر را بررسی کنید:

$$\begin{aligned} ۱ &= ۱ \\ ۳+۵ &= ۸ \\ ۷+۹+۱۱ &= ۲۷ \\ ۱۳+۱۵+۱۷+۱۹ &= ۶۴ \\ ۲۱+۲۳+\cdots+۲۹ &= ۱۲۵ \end{aligned}$$

الگوی موجود را تعیین و اتحاد را ثابت کنید.

۳۴. ۵۰ چوب‌کبریت را به پنجاه طریق مختلف می‌توان در بسته‌های ۱، ۵، ۱۰، ۲۵ یا ۵۰تایی تقسیم کرد. این ادعا را ثابت کنید. به چند طریق مختلف می‌توان ۲۵ چوب‌کبریت را در چنین بسته‌هایی تقسیم کرد؟

۳۵. در ورودیِ یکی از شهرهای امریکا روی تابلویی نوشته شده است

TOLEDO

OHIO

حروف روی صفحه‌های فلزی هم‌اندازه‌ای به‌طور جداگانه نوشته شده‌اند. طوفانی تابلو را به زمین می‌اندازد و صفحه‌ها از تابلو جدا می‌شوند. شهروند خوبی که سواد ندارد سر می‌رسد و با کنار هم گذاشتن صفحه‌ها دوباره تابلو را عَلَم می‌کند؛ اما چون سواد ندارد صفحه‌ها را تصادفی کنار هم می‌گذارد. احتمال اینکه «OHIO» را درست سرهم کرده باشد چقدر است؟ [فرض کنید حروف **I**، **H** و **O** کاملاً متقارن‌اند و اگر صفحه‌هایشان سروته نصب شود درست خوانده می‌شوند.] احتمال اینکه «TOLEDO» را درست سر هم کرده باشد چقدر است؟ احتمال اینکه هر دو واژه را درست سر هم کرده باشد چقدر است؟

۳۶. توری مستطیلی شکلی به اندازهٔ $m \times n$ درنظر بگیرید. چند مسیر مختلف، در امتداد خطهای

تور، ازگوشهٔ سمت چپ پایین به گوشهٔ سمت چپ بالا وجود دارد (فقط حرکت به سمت بالا و سمت راست مجاز است)؟

۳۷. سه تیم A، B و C چند بازی با هم انجام می‌دهند. در بازی اول تیم A بیرون می‌ماند و تیمهای B و C با هم بازی می‌کنند. پس از آن، بازندهٔ هر بازی بیرون می‌ماند و برنده با تیم دیگر بازی می‌کند. کلاً یازده بازی انجام می‌شود. تعداد بردهای سه تیم عددهایی متفاوت‌اند و تیم A آخرین بازی را باخته است. تعداد برد و باختهای سه تیم را تعیین کنید.

۳۸. دور میزی گرد ده صندلی گذاشته‌اند و قرار است ۵ نفر از شهر A و ۵ نفر از شهر B دور میز بنشینند. این افراد به چند طریق می‌توانند روی صندلیها بنشینند به‌طوری‌که هیچ‌کس مجاور همشهری خود ننشیند؟ [راهنمایی: ابتدا سعی کنید این مسأله را برای چهار یا شش نفر حل کنید.]

۳۹. گفته می‌شود که موضوع احتمالات در سال ۱۶۵۴ پدید آمده است. در این سال شوالیه دومِره به دوست خود بلز پاسکال (ریاضیدان مشهور سدهٔ هفدهم) نامه نوشت و از او پرسید که چرا همیشه در تاس بازی می‌بازد. پاسکال متوجه شد که دوستش همیشه پنجاه‌پنجاه شرط می‌بندد که در ۲۴ بار متوالی ریختن یک جفت تاس یک بار دوازده بیاورد. خود را به جای پاسکال بگذارید، این وضعیت را تحلیل کنید و بگویید شوالیه چه اشتباهی می‌کرده است.

۴۰. کدام‌یک محتملتر است: وقتی که فقط یک تاس را ۴ بار می‌ریزید دست‌کم یک ۶ بیاورید، یا وقتی که دو تاس را ۲۴ بار می‌ریزید دست‌کم یک ۱۲ بیاورید.

۴۱. بازی‌یی را تصور کنید که پنج بازیکن دارد و هریک از آنها سکه‌ای را همزمان با بقیه می‌اندازد. اگر همهٔ سکه‌ها غیر از یکی مثل هم بنشینند، کسی که نتیجه‌اش با بقیه فرق دارد برنده می‌شود (مثلاً اگر چهار «شیر» و یک «خط» بنشیند، «خط» برنده است). اگر چنین وضعی روی ندهد، بازیکنان دوباره سکه‌هایشان را می‌اندازند. احتمال اینکه بازی با اولین پرتاب سکه‌ها تمام شود چقدر است؟ با پرتاب دوم چطور؟

۴۲. در کلاهی یک توپ سفید، دو توپ قرمز، سه توپ سبز، چهار توپ آبی، پنج توپ سیاه، شش توپ زرد، هفت توپ نارنجی، و هشت توپ بنفش هست. دوستتان توپی را به تصادف بیرون می‌آورد و به شما نشان نمی‌دهد. باید با پرسیدن سؤالهایی که جوابشان فقط «بله» یا «نه» باشد رنگ توپ را تعیین کنید. بهترین راه‌کار چیست؟

۴۳. دنباله‌ای با قاعدهٔ $a_\circ = ۲$، $a_۱ = ۱$ و $a_j = ۳a_{j-۱} - a_{j-۲}$ تعریف شده است. با استفاده از روش تابعهای مولد فرمولی برای a_j بیابید.

۴۴. دنباله‌ای با قاعدهٔ $a_\circ = ۴$، $a_۱ = -۱$ و $a_j = -a_{j-۱} + ۲a_{j-۲}$ تعریف شده است. با استفاده از روش تابعهای مولد فرمولی برای a_j بیابید.

۴۵. دنباله‌ای با قاعدهٔ $a_\circ = \circ$، $a_۱ = -۱$ و $a_j = ۳a_{j-۱} - ۲a_{j-۲}$ تعریف شده است. با استفاده از روش تابعهای مولد فرمولی برای a_j بیابید.

۴۶. سیزده کارت سفید، سیزده کارت قرمز، سیزده کارت آبی و سیزده کارت سیاه را که هر دسته از ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده است کاملاً با هم مخلوط می‌کنیم. سپس این ۵۲ کارت را به پنج دسته تقسیم می‌کنیم و کارتهای هر دسته را روی هم می‌چینیم. احتمال اینکه یکی از پنج کارت بالایی ۱۱، ۱۲ یا ۱۳ باشد چقدر است؟

۴۷. در مسألهٔ ۴۶ درصورتی‌که ۵۲ کارت را به k دسته تقسیم کرده باشیم جواب مسأله چه تغییری می‌کند؟

۴۸. صد توپ سفید و صد توپ سیاه را در سه کلاه ریخته‌ایم. چشمان خود را می‌بندید، یک کلاه انتخاب می‌کنید و یک توپ از درون آن کلاه بیرون می‌آورید. آیا احتمال اینکه توپ سفیدی انتخاب کرده باشید به شیوهٔ توزیع توپها در سه کلاه بستگی دارد؟

۴۹. دامپزشکی در تشخیص بیماری خاصی که بین گاوها شایع است تخصص دارد. او معمولاً گاوها را در گروههای ۱۰۰تایی معاینه می‌کند. معمولاً از هر ۵۰۰ گاو فقط یکی به این بیماری مبتلا می‌شود (البته اگر دامپزشک زود متوجه شود؛ در غیر این‌صورت، همهٔ گله مبتلا می‌شوند). دامپزشک برای تشخیص بیماری آزمایش خون انجام می‌دهد.

دامپزشک برای افزایش کارایی و کاهش هزینه راهی ابداع کرده است. او بخش کوچکی از نمونهٔ خون همهٔ گاوهای گروه ۱۰۰تایی را جدا و همه را با هم مخلوط می‌کند و سپس آزمایش را روی این مخلوط انجام می‌دهد. اگر نتیجه منفی باشد می‌تواند اعلام کند که گروه ۱۰۰تایی به بیماری آلوده نیست. اگر نتیجه مثبت باشد، دامپزشک باید تک‌تکِ نمونه‌های خون صد گاو را آزمایش کند و در این حالت باید ۱۰۱ آزمایش انجام دهد.

اگر قرار باشد دامپزشک ۵۰۰۰ گاو را معاینه کند، درصورتی‌که از روش بالا استفاده کند امید تعداد آزمایشهایی که باید انجام دهد چقدر است؟

۵۰. در ظرفی ۵ لیتر آب خالص و یک فنجان رنگ قرمز می‌ریزیم (هر فنجان $\frac{۱}{۱۶}$ لیتر است). رنگ را کاملاً با آب مخلوط می‌کنیم. یک فنجان از مخلوط را برمی‌دارید و به جای آن یک فنجان آب خالص می‌ریزید. دوباره مخلوط را کاملاً هم می‌زنید. باز هم یک فنجان از مخلوط را برمی‌دارید و به جای آن یک فنجان آب می‌ریزید.

بارها این کار را تکرار می‌کنید. روشن است که غلظت رنگ کمتر و کمتر می‌شود (چرا؟). آیا اگر این کار را به تعداد دفعات کافی (ولی متناهی) انجام دهید غلظت رنگ به صفر میل می‌کند؟ آیا غلظت رنگ هیچ‌وقت کمتر از ۱٪ می‌شود؟ آیا غلظت رنگ هیچ‌وقت کمتر از ۰٫۱٪ می‌شود؟ آیا کران پایینی برای غلظت رنگ وجود دارد؟

۵۱. کارتی را به اندازهٔ ۳ اینچ در ۵ اینچ ببُرید و عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را به فاصله‌های یکسان در یک ردیف روی کارت بنویسید. عددها را به یک اندازه و یک شکل بنویسید تا در اولین نگاه هیچ‌کدام متمایز از عددهای دیگر نباشد. پشت کارت بنویسید «چرا ۳ را انتخاب کردید؟»

اکنون روی کارت را به دوستانتان نشان دهید و به هریک از آنها بگویید که عددی را انتخاب کند. تعجب خواهید کرد که چقدر عدد ۳ را انتخاب می‌کنند. دراین صورت، شما بی‌درنگ پشت کارت را نشان می‌دهید و دوستانتان را متعجب می‌کنید.

چرا این‌طور است؟ همچنین متوجه خواهید شد که اگر عددهای از ۱ تا ۱۰ را روی کارت بنویسید بیشتر مردم اغلب ۳ و ۷ را انتخاب می‌کنند (بیشتر از آن که احتمال انتزاعی پیشگویی می‌کند). فکر می‌کنید چرا این‌طور است؟

۵۲. اندازهٔ معدهٔ آدمها در محدودهٔ از ۱۵ تا ۱، از بزرگترین تا کوچکترین معده، متغیر است. اندازهٔ قلب آدمها نیز از ۲ تا ۱ متغیر است؛ ضربان قلب نیز بین آدمها تعییراتی از ۳ تا ۱ دارد. به انسانی از نظر یک ویژگی «متوسط» می‌گوییم که در یک‌سومِ میانی باشد. اگر سه ویژگی بالا به تصادف بین آدمها توزیع شده باشد، چه درصدی از جمعیت نسبت به هر سهٔ این ویژگیها متوسط‌اند؟

۵۳. دو نفر، به نامهای A و B، در بازی‌یی شرکت می‌کنند. در این بازی سیزده کارت سفید، سیزده کارت قرمز، سیزده کارت آبی و سیزده کارت سیاه که کارتهای هر دسته از ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند کاملاً با هم مخلوط می‌شوند. سپس ۵ کارت به A و ۵ کارت به B داده می‌شود. دو حالت را درنظر بگیرید: یکی اینکه A دو کارت با عدد یکسان داشته باشد و حالت دیگر اینکه کارتهای A پنج عدد متمایز باشند. درکدام حالت احتمال اینکه B دست‌کم دو کارت با عدد یکسان داشته باشد بیشتر است؟

۵۴. تعداد زیادی مهرهٔ کوچک، همه به یک اندازه و یک شکل ولی در دو رنگ دارید. می‌خواهید گردنبندی با ده مهره بسازید. چند گردنبند متفاوت می‌توانید بسازید؟ توجه کنید که اگر یکی از گردنبندها از دوران دیگری به‌دست آید، این دو شبیه‌اند و یکی محسوب می‌شوند. [پس از حل کردن این مسأله، n را به‌جای «ده» و k را به‌جای «دو» بگذارید و دوباره مسأله را حل کنید.]

۵۵. درکشو شما یک جفت دستکش سبز و یک جفت دستکش قهوه‌ای هست. چشمتان را می‌بندید و دو لنگه دستکش بیرون می‌آورید. احتمال اینکه این دو لنگه از یک جفت باشند چقدر است؟

۴

مسأله‌های منطقی

۱.۴ منطق ساده

در مسأله‌های این بخش چندان با ریاضیات سروکار نداریم و فقط به منطق محض و/یا استدلال می‌پردازیم.

مسألهٔ ۱.۱.۴ شش نفر به نامهای A، B، C، D، E و F در واگن رستوران قطارند. یکی از آنها اهل نیویورک، یکی اهل شیکاگو، یکی اهل تولسا، یکی اهل سنت‌لوئیس، یکی اهل میلواکی، و یکی نیز اهل آتلانتاست. اطلاعات زیر را می‌دانیم:

۱. A و مردی که اهل نیویورک است پزشک‌اند.

۲. E و زنی که اهل شیکاگوست معلم‌اند.

۳. C و شخصی که اهل تولساست مهندس‌اند.

۴. B و F در جنگ شرکت کرده‌اند ولی شخصی که اهل تولساست خدمت سربازی نکرده است.

۵. شخصی که اهل میلواکی است مسنتر از A است.

۶. شخصی که اهل آتلانتاست مسنتر از C است.

۷. B و شخصی که اهل نیویورک است در سنت‌لوئیس پیاده می‌شوند.

۸. C و مردی که اهل میلواکی است در سان‌فرانسیسکو پیاده می‌شوند.

شغل و زادگاه هریک از این شش نفر را تعیین کنید.

راه‌حل. اهمیت شیوه‌های بصری در این نوع مسائل غیرقابل انکار است. با این شیوه‌ها داده‌ها را به‌گونه‌ای می‌توان سازماندهی کرد که فقط با نوشتن ممکن نیست. با توجه به این نکته، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

F	E	D	C	B	A	
	x		x	x	x	نیویورک
	x		x		x	شیکاگو
x	x		x	x	x	تولسا
						سنت‌لوئیس
			x	x	x	میلواکی
			x			آتلانتا

هر جا که ارتباط ناممکن باشد x می‌گذاریم. مثلاً گزارهٔ ۱ می‌گوید که A اهل نیویورک نیست؛ پس در ستون A و در ردیف نیویورک x می‌گذاریم. به همین ترتیب، گزارهٔ ۷ می‌گوید که B اهل نیویورک نیست. گزاره‌های ۱ و ۲ با هم نتیجه می‌دهند A، که پزشک است، اهل شیکاگو نیست (چون شخصی که اهل شیکاگوست معلم است). xهای دیگر هم براساس استدلالهای مشابهی گذاشته شده‌اند.

وقتی همهٔ xها را قرار دهیم می‌بینیم C فقط ممکن است اهل سنت‌لوئیس باشد. دراین صورت تنها امکان برای شهر زادگاه A آتلانتاست. وقتی سنت‌لوئیس را به‌عنوان زادگاه C مشخص کردیم، دیگر این شهر زادگاه هیچ‌یک از پنج نفر دیگر نخواهد بود. این موضوع را با قرار دادن # در جدول مشخص می‌کنیم. همچنین آتلانتا را برای همه غیر از A حذف می‌کنیم. برای نشان دادن اینکه شهری زادگاه یکی از این افراد است در محل موردنظر در جدول * می‌گذاریم:

F	E	D	C	B	A	
	x		x	x	x	نیویورک
	x		x		x	شیکاگو
x	x		x	x	x	تولسا
#	#	#	*	#	#	سنت‌لوئیس
			x	x	x	میلواکی
#	#	#	x	#	*	آتلانتا

اکنون بی‌درنگ معلوم می‌شود که B اهل شیکاگو، E اهل میلواکی، F اهل نیویورک و D اهل تولساست.

سرانجام از گزاره‌های ۱، ۲ و ۳ نتیجه می‌گیریم که

- A اهل آتلانتا و پزشک است.
- B اهل شیکاگو و معلم است.
- C اهل سنت‌لوئیس و مهندس است.
- D اهل تولسا و مهندس است.
- E اهل میلواکی و معلم است.
- F اهل نیویورک و پزشک است.

مسأله حل شد. □

مسألهٔ پیکارجوی ۲.۱.۴ آیا در مسألهٔ قبل همهٔ هشت گزاره برای حل‌کردن مسأله لازم بود؟

مسألهٔ ۳.۱.۴ حداکثر مقدار پولی برحسب سکه‌های ۱ سنتی، ۵ سنتی، ۱۰ سنتی و بیست‌وپنج سنتی که با آنها نتوان دقیقاً یک دلار پرداخت چقدر است (هر دلار ۱۰۰ سنت است)؟

راه‌حل. روش حذف را به‌کار می‌گیریم. روشن است که نمی‌توانیم بیشتر از سه ۲۵سنتی، یا بیشتر از نُه ۱۰سنتی، یا بیشتر از نوزده ۵سنتی یا بیشتر از ۹۹ یک‌سنتی داشته باشیم. البته وقتی ترکیب سکه‌ها را درنظر بگیریم موضوع پیچیده‌تر می‌شود.

روشن است که ۹۹ سنت را به هر طریقی که بخواهیم می‌توانیم جورکنیم. ترفند حل مسأله این است که ببینیم آیا می‌توانیم بیشتر از یک دلار جورکنیم ولی نتوانیم دقیقاً یک دلار جورکنیم یا نه. چنین حالتی فقط وقتی پیش می‌آید که زیرمجموعه‌ای از سکه‌ها داشته باشیم که مجموعشان کمتر از یک دلار باشد ولی با اضافه کردن آخرین سکه مجموع بیشتر از یک دلار شود. مثلاً ممکن است نُه ۱۰سنتی و یک ۲۵سنتی داشته باشیم. دراین‌صورت هفت ۱۰سنتی و یک ۲۵سنتی ۹۵سنت می‌شود، نُه ۱۰ سنتی ۹۰سنت می‌شود، هشت ۱۰سنتی و یک ۲۵سنتی یک دلار و ۵سنت می‌شود و مجموع همهٔ سکه‌ها هم یک دلار و ۱۵ سنت است.

آیا می‌توانیم مثال بهتری بیابیم؟ روشن است که باید تعداد فردی ۲۵ سنتی داشته باشیم و سپس از این نکته استفاده کنیم که با هر تعداد ۱۰ سنتی نمی‌توانیم اختلاف با یک دلار را جورکنیم (با سکه‌های ۱سنتی یا ۵سنتی همیشه می‌توانیم اختلاف با یک دلار را جورکنیم). روشن است که نمی‌توانیم یک ۲۵سنتی و ده ۱۰ سنتی داشته باشیم، چون ده ۱۰سنتی یک دلار می‌شود. اضافه کردن سکه‌های ۵ سنتی وضع را بدتر می‌کند نه بهتر، چون تعداد فرد ۵سنتی‌های موجود در ۲۵ سنتی را زوج می‌کنند. می‌توانیم چهار ۱سنتی نیز اضافه کنیم: نُه ۱۰ سنتی، یک ۲۵سنتی و چهار ۱سنتی می‌شود یک دلار و نوزده سنت و با این سکه‌ها نمی‌توان دقیقاً یک دلار جورکرد. [توجه کنید که نمی‌توانیم پنج ۱سنتی داشته باشیم، چون دراین‌صورت می‌توان یک دلار جورکرد.]

راهی دیگر این است که سه ۲۵سنتی، چهار ۱۰سنتی (با پنج ۱۰سنتی می‌توان یک دلار جور کرد) و چهار ۱ سنتی داشته باشیم. مجموع این سکه‌ها هم یک دلار و نوزده سنت می‌شود. با کمی تفکر می‌بینید که با هر تعداد سکه‌ای که مجموعشان بیشتر از یک دلار و نوزده سنت باشد می‌توان دقیقاً یک دلار جور کرد. □

مسألهٔ پیکارجوی ۴.۱.۴ مسألهٔ قبل را درصورتی‌که به‌جای «یک دلار» بگذاریم «پنجاه‌سنت» حل کنید.

مسألهٔ ۵.۱.۴ سه نفر با چشمان بسته در دایره‌ای ایستاده‌اند. روی سر هریک از این سه نفر کلاهی می‌گذاریم. هر کلاه یا قرمز است یا سیاه و هر سه نفر این را می‌دانند. این سه نفر همزمان چشمانشان را باز می‌کنند و هر کسی که کلاه قرمزی ببیند بی‌درنگ دستش را بالا می‌برد. اولین کسی که بتواند رنگ کلاهش را درست بگوید برنده می‌شود.

با این وضعیت، اگر دو کلاه قرمز و یک کلاه سیاه باشد چه روی می‌دهد؟

راه‌حل. این مسأله بسیار آسان است. سه نفر را A، B و C می‌نامیم. فرض کنید کلاه C سیاه باشد.

چون دو کلاه قرمز هست، هر سه نفر دستشان را بلند می‌کنند. A می‌بیند که C کلاه سیاه دارد. او چنین استدلال می‌کند که کلاه خودش سیاه نیست؛ چون اگر سیاه بود، B دستش را بلند نمی‌کرد. پس A نتیجه می‌گیرد که کلاه خودش قرمز است. B نیز با استدلال مشابهی نتیجه می‌گیرد که کلاه خودش قرمز است. پس A یا B، هرکدام تیزهوشتر باشد، برنده می‌شود.

C می‌بازد. او می‌بیند که A و B هر دو کلاه قرمز دارند و هر دو دستشان را بالا برده‌اند. پس C نمی‌تواند تصمیم بگیرد که کلاه خودش قرمز است یا سیاه. □

مسألهٔ ۶.۱.۴ مسألهٔ قبل را درصورتی‌که کلاه هر سه نفر قرمز باشد تحلیل کنید.

راه‌حل. باز هم سه نفر را A، B و C بنامید. روشن است که هر سه نفر دستشان را بلند می‌کنند، چون هریک از آنها کلاه قرمزی می‌بیند (درواقع هریک از آنها دو کلاه قرمز می‌بیند). برای ساده شدن استدلال فرض کنید A تیزهوشتر از دو نفر دیگر باشد. A می‌داند ممکن نیست کلاهش سیاه باشد. چون اگر کلاه A سیاه باشد B متوجه می‌شود که ممکن نیست کلاه خودش سیاه باشد، چون در غیراین صورت C دستش را بالا نمی‌برد. پس اگر کلاه A سیاه بود، B همهٔ اینها را می‌فهمید و نتیجه می‌گرفت که کلاه خودش قرمز است و این را می‌گفت. اگر کلاه A سیاه بود، C هم می‌توانست چنین استدلال کند و رنگ کلاهش را بگوید. چون نه B حرف زده است و نه C، A نتیجه می‌گیرد که کلاهش قرمز است، این را می‌گوید و برنده می‌شود.

□

مسألهٔ پیکارجوی ۷.۱.۴ در مسألهٔ قبل اگر چهار نفر در دایره‌ای ایستاده باشند و کلاه هر چهار نفر قرمز باشد چه روی می‌دهد؟ [راهنمایی: این مسأله چه ارتباطی با مسألهٔ ۴.۵.۱ دارد؟]

مسألهٔ ۸.۱.۴ دو نفر در سفری مستقل از هم هریک مجسمه‌ای خریده‌اند. مجسمه‌ها کاملاً شبیه هم‌اند. هر دو نفر مجسمه‌هایشان را به قسمت بار هواپیما تحویل می‌دهند. شرکت هواپیمایی هر دو مجسمه را گم می‌کند.

هریک از این دو مسافر ادعای خسارت می‌کند (آنها همدیگر را نمی‌شناسند). هریک از آنها قیمتی برای مجسمهٔ خود اعلام می‌کند و هیچ‌کدام مدرکی برای قیمت اعلام‌شده ندارند. این دو نفر پیش از اعلام ادعای خود با هم مشورت نکرده‌اند.

مدیر شرکت هواپیمایی که باید ادعاها را بررسی کند قبلاً به این دو نفر گفته است که وقتی هر دو ادعا را دریافت کند چنین قضاوت می‌کند: (الف) قیمت اعلام‌شده برای هر مجسمه باید عددی از ۵ دلار تا ۲۰۰ دلار باشد (بدون خرده)؛ (ب) کسی که قیمت پایینتری را اعلام کند راست می‌گوید و علاوه‌بر دریافت آن مبلغ، ۳ دلار هم به‌عنوان جایزهٔ صداقت می‌گیرد؛ (ج) کسی که قیمت بالاتری را اعلام کند دروغ می‌گوید و به اندازهٔ قیمت پایینتر منهای ۳ دلار، که به‌عنوان مجازات دروغگویی کسر می‌شود، دریافت می‌کند. درصورتی‌که هر دو نفر یک قیمت را اعلام کنند در مورد هر دو مطابق قسمت (ج) عمل می‌شود.

هر دو مسافر باهوش، و درواقع به یک اندازه باهوش‌اند. بهترین راه‌کار برای هریک از آنها چیست؟

راه‌حل. روشن است که هر مسافر مایل است بیشترین مبلغ ممکن را دریافت کند. این دو نفر را A و B بنامید.

اگر هر دو نفر قیمت مجسمه را ۲۰۰ دلار اعلام کنند، هریک از آنها ۱۹۷ دلار می‌گیرد. هر دو نفر این را می‌دانند. با این استدلال، A تصمیم می‌گیرد که بهتر است قیمت را ۱۹۹ دلار اعلام کند. اما B نیز به همین طریق استدلال می‌کند و می‌داند که A این‌گونه استدلال کرده است. پس B تصمیم می‌گیرد که قیمت را ۱۹۸ دلار اعلام کند.

اما A نیز می‌تواند دقیقاً مانند B استدلال کند و چون می‌داند که B می‌تواند به‌خوبیِ او استدلال کند، تصمیم می‌گیرد که قیمت را ۱۹۷ دلار اعلام کند.

اگر به‌همین ترتیب به استقرای قهقرایی پیش برویم می‌بینیم که سرانجام هر دو نفر تصمیم می‌گیرند که قیمت را ۵ دلار اعلام کنند و هریک از آنها ۲ دلار می‌گیرد. □

تحلیل مسألهٔ قبل پردردسر است. این تحلیل مثالی از گونهٔ تحلیلهایی است که اغلب در نظریهٔ بازیها انجام می‌شود و هر دو بازیکن با استدلال درست به نتیجه‌ای نامعقول می‌رسند. نکتهٔ مهم در اینجا دیدگاه است: اگر هر بازیکن می‌دانست که در ذهن دیگری چه می‌گذرد و اگر دو بازیکن

می‌توانستند با هم تبادل‌نظر کنند، نتیجهٔ مطلوبتری حاصل می‌شد. ولی چون هریک از آنها می‌خواهد به‌گونه‌ای دیگری را فریب دهد، راه‌کار هر دو نفر منجر به وضعیتی می‌شود که عملاً زیانبار است. برای مطالعهٔ بیشتر در مورد این نوع مسأله‌ها [MON] را بخوانید و با مسألهٔ سردرگمی زندانی آشنا شوید (تمرین ۱۸ در انتهای فصل ۷ را نیز ببینید).

مسألهٔ پیکارجوی ۹.۱.۴ تحلیل دیگری برای مسألهٔ قبل عرضه کنید که به نتیجه‌ای مطلوبتر، دست‌کم برای یکی از بازیکنان، منجر شود.

مسألهٔ پیکارجوی ۱۰.۱.۴ دو بازیکن در بازی‌یی شرکت دارند. جلو آنها ۵۰ سکه روی‌هم چیده شده‌اند. دو بازیکن یکی در میان حرکتی انجام می‌دهند. در هر حرکت، بازیکن می‌تواند یک یا دو سکه از روی ستون سکه‌ها بردارد.

بازی وقتی تمام می‌شود که یا سکه‌ها تمام شوند یا بازیکنی دو سکه بردارد (به بیان دیگر، اگر بازیکنی یک سکه بردارد بازی ادامه می‌یابد ولی اگر بازیکنی دو سکه بردارد بازی تمام می‌شود).

با این فرض که هر بازیکن می‌خواهد بیشترین تعداد سکه‌هایی را که ممکن است بردارد، راه‌کار اپتیمال برای بازیکن اول چیست؟

در بخش بعد جزئیات بیشتری از نظریهٔ بازیها را بررسی می‌کنیم.

۲.۴ بازیها

در این بخش بازیها و موقعیتهای شبه‌بازی گوناگونی را بررسی می‌کنیم. نظریهٔ بازیها بخش مهمی از تفکر تحلیلی نوین شده است. یکی از اولین آثاری که به درک اهمیت نظریهٔ بازیها کمک کرد [MON] نوشتهٔ فون نویمان و مورگنسترن بود. در اینجا سعی نمی‌کنیم که کاربردهای نظریهٔ بازیها را بررسی کنیم، بلکه فقط به خود بازیها می‌پردازیم.

مسألهٔ ۱.۲.۴ بازی‌یی دو بازیکن دارد. این دو نفر بازی را با ستونی از ۳۰ سکهٔ یکسان که روی هم چیده شده‌اند شروع می‌کنند. در هر حرکت بازیکن می‌تواند از ۱ تا ۶ سکه را بردارد. بازیکنی که آخرین سکه را بردارد برنده می‌شود. بازیکن اول چه راه‌کاری را باید به‌کار گیرد تا همیشه برنده شود؟

راه‌حل. بازیکن اول را A و بازیکن دوم را B می‌نامیم. می‌خواهیم راه‌کاری برای A طراحی کنیم که مطمئناً برنده شود.

ایدهٔ حل مسأله این است که کار را از آخر شروع کنیم. روشن است که A مایل است در آخرین حرکتش ۶ سکه یا کمتر از ۶ سکه باقی مانده باشد. دراین‌صورت او همهٔ سکه‌های باقی‌مانده را برمی‌دارد و برندهٔ بازی می‌شود. پس در حرکت قبل از آن باید تعداد سکه‌هایی که B پیش رو دارد

طوری باشد که بعد از اینکه B سکه‌هایش را برمی‌دارد ۶ یا کمتر از ۶ سکه باقی بماند.

اگر B مثلاً ۸ سکه پیش‌رو داشته باشد، فقط یک سکه برمی‌دارد تا ۷ سکه برای A بماند. این برای A خوب نیست، چون او نمی‌تواند همهٔ سکه‌های باقی‌مانده را بردارد. اگر B، ۹ سکه یا حتی بیشتر از ۹ سکه پیش‌رو داشته باشد باز هم همین اتفاق می‌افتد. بهترین حالت برای A این است که B در حرکت قبل از آخرین حرکت فقط با ۷ سکه مواجه باشد. توجه کنید که B مجبور است دست‌کم یک سکه بردارد ولی نمی‌تواند بیشتر از ۶ سکه بردارد. پس B هر حرکتی انجام دهد، بین ۱ سکه تا ۶ سکه برای A می‌ماند و او می‌تواند همهٔ سکه‌ها را بردارد. پس نتیجهٔ نهایی این استدلال این است که A مایل است B در حرکت قبل از آخر با ۷ سکه مواجه باشد.

با استدلال قهقرایی و استفاده از همین منطق، می‌بینیم که A مایل است B در چهار حرکت مانده به آخر با ۱۴ سکه مواجه باشد. دراین‌صورت، مستقل از اینکه B چند سکه بردارد (البته بین ۱ سکه تا ۶ سکه)، A در سه حرکت مانده به آخر متمم تعداد سکه‌هایی را که B برداشته است برمی‌دارد و B در حرکت قبل از آخر با ۷ سکه مواجه می‌شود. می‌دانیم که در این وضعیت A برنده است [مثلاً اگر B با ۱۴ سکه مواجه باشد و سه سکه بردارد، A در حرکت بعد ۴ سکه برمی‌دارد].

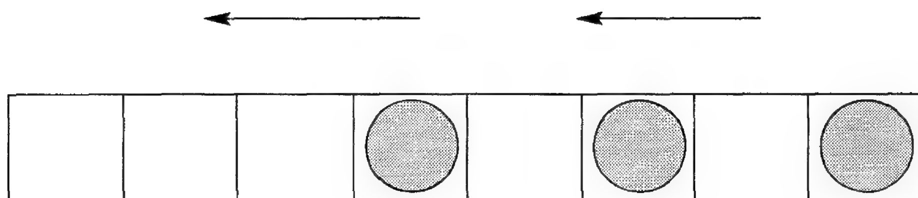
با تکرار این راه‌کار می‌بینیم که A مایل است B در شش حرکت مانده به آخر با ۲۱ سکه و در هشت حرکت مانده به آخر با ۲۸ سکه مواجه باشد.

مسأله حل شد: A در حرکت اول دو سکه برمی‌دارد و ۲۸ سکه برای B باقی می‌گذارد. B هر تعداد سکه که بردارد (از ۱ سکه تا ۶ سکه) A متمم این تعداد را برمی‌دارد و ۲۱ سکه برای B باقی می‌گذارد. باز هم هر چند سکه که B بردارد A متمم این تعداد را برمی‌دارد و ۱۴ سکه باقی می‌گذارد. باز هم B هر چند سکه که بردارد A متمم این تعداد را برمی‌دارد و ۷ سکه باقی می‌گذارد. اینجا آخر بازی است؛ B هر تعداد سکه که بردارد، A بقیهٔ سکه‌ها را برمی‌دارد و برنده می‌شود.

این راه‌کار برد برای A است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۲.۲.۴ بازی مسألهٔ قبل را درنظر بگیرید. آیا می‌توانید راه‌کار بردی برای بازیکن دوم این بازی طراحی کنید؟ اگر بازیکن اول راه‌کاری را که در راه‌حل مسألهٔ قبل ابداع کردیم به‌کار گیرد، چطور؟

مسألهٔ ۳.۲.۴ بازی‌یی روی صفحه‌ای شامل هشت مربع مجاور، مانند شکل ۱۲۱، انجام می‌شود. در شکل وضعیت سه مهره در ابتدای بازی نشان داده شده است. هر حرکت مجاز انتقال یکی از مهره‌ها به مربع سمت چپ آن مهره است. هر مهره را در صورت لزوم می‌توان روی مهره‌ای دیگر گذاشت یا از زیر مهره‌ای دیگر حرکت داد. هدف بازی انتقال هر سه مهره به آخرین مربع سمت چپ است. بازیکنی که آخرین حرکت را انجام دهد برنده می‌شود. راه‌کار برد برای بازیکن اول چیست؟



شکل۱۲۱

راه‌حل. بازیکن اول را A و بازیکن دوم را B بنامید. صفحه‌ای مانند شکل ۱۲۱ رسم کنید. از سه سکه به جای مهره‌ها استفاده کنید. چند بار بازی کنید. می‌توانید خودتان نقش هر دو بازیکن را بازی کنید یا بازی را با دوستتان انجام دهید. متوجه چه چیزی می‌شوید؟ هر طور که بازی کنید A برنده می‌شود. چگونه چنین چیزی ممکن است؟

توجه کنید که مهره‌ها فقط به جلو (به چپ) حرکت می‌کنند و نمی‌توان مهره‌ای را به عقب (به راست) برد. سه مهره را از چپ به راست ۱، ۲ و ۳ بنامید. در هر بازی مهرهٔ ۱ برای رسیدن به آخرین مربع سمت چپ سه مربع را می‌پیماید. مهرهٔ ۲ پنج مربع و مهرهٔ ۳ هفت مربع را برای رسیدن به آخرین مربع سمت چپ می‌پیماید. پس تعداد کلِّ حرکتهای مجاز در هر بازی ۷ + ۵ + ۳، یعنی ۱۵، است. پس تعداد حرکتها در هر بازی عددی فرد و همیشه یکی است.

بازیکن A حرکتهای شمارهٔ ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳ و ۱۵ را انجام می‌دهد. به بیان دیگر، مستقل از اینکه در بازی چه روی دهد، A همیشه آخرین حرکت را انجام می‌دهد. پس A همیشه برنده است.

نتیجه تحلیل ما این است که هر راه‌کاری، راه‌کار برد برای A است. □

مسألهٔ ۴.۲.۴ **(بازی سنتی چینی)** در ابتدای این بازی دو ستون سکه که روی هم چیده شده‌اند جلو بازیکنان قرار دارد. تعداد سکه‌های دو ستون ممکن است یکی باشد یا نباشد. هر حرکت مجاز، (الف) برداشتن هر تعداد سکه از یک ستون، یا (ب) برداشتن تعدادی مساوی سکه از هر دو ستون است. بازیکنی که آخرین سکه را بردارد برنده می‌شود.

دو مثال از موقعیت برد و دو مثال از موقعیت باخت بیاورید.

راه‌حل. ترفند مسأله این است که چندان خیالپردازی نکنیم. ابتدا باید تعیین کنیم که «موقعیت برد» چیست. موقعیت برد موقعیتی است که بازیکن مواجه با آن مطمئن باشد درصورتی‌که درست بازی کند می‌برد. «موقعیت باخت» موقعیتی است که بازیکن مواجه با آن، هر کاری بکند، ببازد (البته به شرط اینکه بازیکن دیگر عاقلانه بازی کند).

مثالی بدیهی از موقعیت برد در این بازی $(1, 0)$ است. منظور از این نماد این است که یک سکه در ستون اول است و در ستون دوم هیچ سکه‌ای نیست. این موقعیت برد است، چون بازیکن مواجه با

آن همهٔ سکه‌های ستون اول (درواقع یک سکه) را برمی‌دارد. به همین ترتیب اگر k عددی طبیعی باشد، موقعیت $(k, ۰)$ موقعیت برد است؛ چون بازیکن مواجه با آن همهٔ k سکه را از ستون اول برمی‌دارد.

هر دو مثال بند قبل را «بدیهی» تلقی می‌کنیم، چون بازیکن مواجه با آن، به شرط اینکه درست بازی کند، بی‌درنگ در همان حرکت برنده می‌شود. موقعیت برد «نابدیهی» موقعیتی است که بازیکن مواجه با آن مجبور باشد پیش از دست‌کم یک حرکت بازیکن دیگر نقشه بکشد.

با استفاده از آنچه در بند قبل آموختیم از آخر به اول می‌رویم و می‌بینیم که اگر j عددی طبیعی باشد و $۲ \leqslant j$، موقعیت $(j, j + ۱)$ موقعیت برد است. بازیکن مواجه با این موقعیت قاعدهٔ (ب) را به‌کار می‌گیرد و $j - ۱$ سکه از هر ستون برمی‌دارد. به این ترتیب بازیکن دیگر با موقعیت $(۱, ۲)$ مواجه می‌شود. اکنون بازیکن دیگر هر کاری بکند بازنده است:

۱) اگر یک سکه از هر ستون بردارد، بازیکن اول را با موقعیت $(۱, ۰)$ مواجه می‌کند و بازیکن اول می‌برد.

۲) اگر همهٔ سکه‌های ستون اول را بردارد، بازیکن اول با موقعیت $(۲, ۰)$ مواجه می‌شود و با برداشتن همهٔ سکه‌های ستون دوم برنده می‌شود.

۳) اگر یک سکه از ستون دوم بردارد، بازیکن اول با موقعیت $(۱, ۱)$ مواجه می‌شود و با برداشتن یک سکه از هر ستون برنده می‌شود.

۴) اگر همهٔ سکه‌های ستون دوم را بردارد. بازیکن اول با موقعیت $(۱, ۰)$ مواجه می‌شود و با برداشتن یک سکه از ستون اول برنده می‌شود.

با استفاده از آنچه تاکنون آموخته‌ایم می‌بینیم که اگر k عددی طبیعی باشد و $۲ < k$، موقعیت $(۱, k)$ موقعیت برد است. بازیکن مواجه با این موقعیت $k - ۲$ سکه از ستون دوم برمی‌دارد. به این ترتیب بازیکن دیگر با موقعیت $(۱, ۲)$ مواجه می‌شود که از تحلیل قبلی خود می‌دانیم موقعیت باخت است.

تاکنون چند موقعیت برد دیده‌ایم. ضمن بررسی موقعیتهای برد یک موقعیت باخت هم دیدیم: موقعیت $(۱, ۲)$ (و البته موقعیت $(۲, ۱)$) موقعیت باخت است. بازیکن مواجه با این موقعیت هر کاری بکند می‌بازد.

موقعیت $(۳, ۵)$ نیز موقعیت باخت است. این موقعیت را تحلیل می‌کنیم و درمی‌یابیم که چرا موقعیت باخت است. اگر بازیکن مواجه با این موقعیت یک سکه از ستون دوم بردارد، بازیکن دیگر با موقعیت $(۳, ۴)$ مواجه می‌شود و از قبل می‌دانیم که این موقعیت برد است. اگر این بازیکن دو سکه از ستون دوم بردارد، بازیکن دیگر با استفاده از قاعدهٔ (ب) همهٔ سکه‌ها را برمی‌دارد. اگر بازیکن ما سه سکه از ستون دوم بردارد بازیکن دیگر را در موقعیت $(j, j + ۱)$ قرار می‌دهد که موقعیت برد است. اگر بازیکن ما چهار سکه از ستون دوم بردارد، $(۳, ۱)$ باقی می‌ماند؛ بازیکن دیگر یک سکه از ستون اول برمی‌دارد و بازیکن ما را در موقعیت باخت $(۲, ۱)$ قرار می‌ ‌ اگر بازیکن ما همهٔ سکه‌های ستون

دوم را بردارد، بازیکن دیگر با استفاده از قاعدهٔ (الف) برنده می‌شود.

اگر بازیکن ما یک سکه از ستون اول بردارد، بازیکن دیگر چهار سکه از ستون دوم برمی‌دارد و ما را در موقعیت باخت قرار می‌دهد. اگر بازیکن ما دو سکه از ستون اول بردارد، بازیکن دیگر سه سکه از ستون دوم برمی‌دارد و ما در موقعیت باخت قرار می‌گیریم. اگر بازیکن ما در یک حرکت همهٔ سکه‌های ستون اول را بردارد باز هم بی‌درنگ می‌بازد.

باقی می‌ماند حالتهایی را که بازیکن ما تعدادی مساوی سکه از دو ستون بردارد بررسی کنیم. این حالتها هم شبیه حالتهای قبلی‌اند و بررسی آنها را به‌عهدهٔ شما می‌گذاریم. □

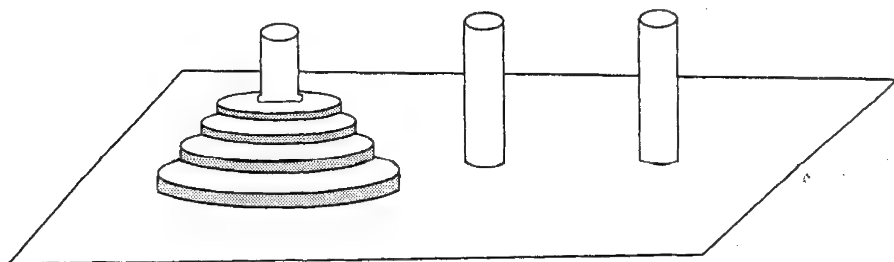
مسألهٔ پیکارجوی ۵.۲.۴ در مسألهٔ قبل آیا هر موقعیت به شکل $(k, k+۲)$ موقعیت باخت است؟

مسألهٔ پیکارجوی ۶.۲.۴ ستونی از ۱۵ سکه روی میز است. دو بازیکن به نوبت سکه‌هایی را برمی‌دارند. هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ سکه بردارد. بازیکنی برنده می‌شود که بعد از تمام شدن سکه‌ها تعدادی فرد از سکه‌ها را در اختیار داشته باشد.

راه‌کار بردی برای هریک از دو بازیکن طراحی کنید.

مسألهٔ ۷.۲.۴ (برج هانوی) شکل ۱۲۲ وضعیت ابتدایی معمای مشهور «برج هانوی» را نشان می‌دهد. [خوره‌های کامپیوتر می‌دانند راه‌کاری که برای حل این مسأله طرح می‌کنیم مدلی برای چرخاندن نوارها در سیستمهای ذخیره‌سازی کامپیوتری است.] توجه کنید که چهار قرص با اندازه‌های مختلف از بزرگ به کوچک در دیرک سمت چپ قرار دارند. هدف این است که این چهار قرص را با همین آرایش به دیرک سمت راست منتقل کنیم. دو قاعده را باید رعایت کنیم: فقط بالاترین قرص هر دیرک را می‌توانیم به دیرک دیگری منتقل کنیم و هیچ‌وقت مجاز نیستیم قرصی بزرگتر را روی قرصی کوچکتر قرار دهیم.

راه‌کاری برای انتقال هر چهار قرص به دیرک سمت راست ابداع کنید؟



شکل۱۲۲

راه‌حل. کار را با حل مسأله‌ای ساده‌تر شروع می‌کنیم. فرض کنید فقط دو قرص در دیرک سمت چپ داریم و قرص کوچکتر روی قرص بزرگتر است. در حرکت اول قرص کوچک بالایی را به دیرک وسط

منتقل می‌کنیم. سپس قرص بزرگتر را به دیرک سمت راست منتقل می‌کنیم. بعد قرص کوچک را به دیرک سمت راست منتقل می‌کنیم و روی قرص بزرگتر می‌گذاریم. مسأله برای دو قرص حل شده است.

اکنون حالت مربوط به سه قرص را درنظر می‌گیریم. معقول است که فرض کنیم در حل این مسأله می‌توانیم از آنچه با تفکر در مورد دو قرص آموختیم استفاده کنیم. قرصها را از کوچک به بزرگ ۱، ۲ و ۳ بنامید. دیرکها را از چپ به راست A، B و C بنامید.

ابتدا قرص ۱ را در دیرک C بگذارید. سپس ۲ را در B بگذارید. اکنون ۱ را در B قرار دهید. سپس ۳ را در C بگذارید. می‌بینید که بزرگترین قرص را به دیرک سمت راست منتقل کرده‌ایم و قرصهای ۱ و ۲ را به ترتیب مناسب در دیرک B قرار داده‌ایم. این وضعیت دقیقاً مشابه وضعیتی است که در بند اول این راه‌حل پیش‌رو داشتیم. پس می‌توانیم همان حرکتها را برای انتقال قرصهای ۱ و ۲ به دیرک C تکرار کنیم. به این ترتیب مسأله در حالت سه قرص هم حل شده است.

اکنون چهار قرص را درنظر می‌گیریم. با استفاده از آنچه در بند قبل آموختیم می‌خواهیم بزرگترین قرص (قرص ۴) را به دیرک سمت راست منتقل کنیم و قرصهای ۱ ، ۲ و ۳ را (به‌ترتیب قابل قبول) در دیرک A یا B قرار دهیم. به این ترتیب مسأله را به مسأله‌ای که در بند قبل حل کردیم تبدیل می‌کنیم.

ابتدا قرص ۱ را به B منتقل کنید. اکنون ۲ را در C بگذارید. سپس ۱ را در C بگذارید. بعد ۳ را در B قرار دهید. اکنون قرص ۴ آزاد است و باید آن را به دیرک C منتقل کنیم. ۱ را به A، ۲ را به B و سپس ۱ را به B منتقل کنید. اکنون دیرک C آزاد است، قرصهای ۱، ۲ و ۳ به ترتیب مناسب در دیرک B قرار دارند و قرص ۴ به‌تنهایی در دیرک A است. ۴ را به C منتقل کنید. سپس قرصهای ۱، ۲ و ۳ را با استفاده از راه‌حل «مسألهٔ سه قرص» به دیرک C منتقل کنید. به این ترتیب مسألهٔ برج هانوی چهارقرصی هم حل شد. □

توجه کنید که در راه‌حل مسألهٔ قبل حل حالتهای ساده‌تر صرفاً تمرینی صوری نبود. از این حالتهای ساده‌تر هم به‌عنوان تمرین استفاده کردیم و هم توانستیم به کمک آنها اندیشه‌مان را سازماندهی کنیم. با حل مسألهٔ دو قرص، ارائهٔ راه‌حل مسألهٔ سه قرص ساده‌تر و زیباتر شد. همچنین، با حل مسألهٔ سه قرص، توضیح راه‌حل مسألهٔ چهار قرص نسبتاً سرراست شد.

مسألهٔ پیکارجوی ۸.۲.۴ راه‌حلی برای مسألهٔ برج هانوی با پنج قرص پیدا کنید.

مسألهٔ پیکارجوی ۹.۲.۴ الگوریتمی برای تبدیل مسألهٔ برج هانوی با k قرص به مسألهٔ برج هانوی با $k - ۱$ قرص ابداع کنید.

مسألهٔ پیکارجوی ۱۰.۲.۴ ثابت کنید که برای حل مسألهٔ برج هانوی با k قرص بیشتر از $۲^k - ۱$ حرکت لازم نیست. درواقع، الگوریتمی بیابید که بتوان آن را برای کامپیوتر پیاده‌سازی کرد (این الگوریتم

ارتباطی نزدیک با الگوریتمی دارد که برای حل بعضی از مسأله‌های مربوط به مربعهای وفقی در بخش ۱.۵ به‌کار می‌گیریم).

مسألهٔ ۱۱.۲.۴ صفحه‌ای شبیه صفحهٔ شطرنج درنظر بگیرید که به جای 8×8 (صفحه شطرنج معمولی)، $k \times k$ باشد. آیا می‌توان k مهرهٔ شطرنج را روی این صفحه طوری قرار داد که هیچ دو مهره‌ای در یک ردیف یا یک ستون نباشند و هیچ مهره‌ای نیز روی قطرهای صفحه نباشد؟

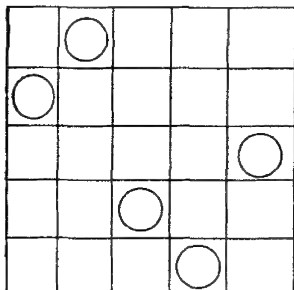
راه‌حل. اغلب آزمودن حالتهای ساده کمک زیادی می‌کند. صفحهٔ شطرنجی 2×2 آنقدر ساده است که مسأله در این حالت بی‌معنی می‌شود. صفحهٔ 3×3 را می‌آزماییم. مهره‌ای که باید در ستون اول قرار گیرد نمی‌تواند در ردیف اول باشد (چون روی قطر قرار می‌گیرد) و در ردیف سوم هم نمی‌تواند باشد. پس این مهره باید در ردیف دوم باشد. پس مهرهٔ ستون دوم باید یا در ردیف اول باشد یا در ردیف سوم (به هر حال در ردیف دوم نمی‌تواند باشد چون روی قطر قرار می‌گیرد). چون این دو آرایش متقارن‌اند، مثلاً فرض کنید این مهره را در ردیف اول بگذاریم. دراین‌صورت، مهرهٔ ستون سوم باید در ردیف سوم قرار گیرد که روی قطر است.

وضعیت بند قبل اجتناب‌ناپذیر است، خواستهٔ مسأله برای صفحهٔ شطرنجی 3×3 ناممکن است. ممکن است در این مرحله حدس بزنیم که مسأله در حالت کلی ناممکن است. اکنون صفحهٔ شطرنجی 4×4 را می‌آزماییم. به‌زودی متوجه می‌شویم که می‌توانیم مهره‌ها را در مربعهای $(3, 1)$، $(1, 2)$، $(4, 3)$ و $(2, 4)$ بگذاریم. [در اینجا مثلاً $(3, 1)$ یعنی مربع سوم از بالا و اول از سمت چپ؛ مربع $(2, 4)$ مربع دوم از بالا و چهارم از سمت چپ است؛ و غیره.] این آرایش در شرایط مسأله صدق می‌کند.

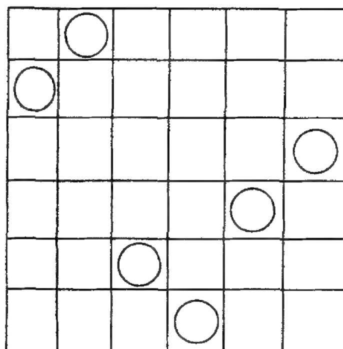
اکنون حدس خود را اصلاح می‌کنیم: اگر صفحهٔ شطرنجی دست‌کم ۴ مربع در هر طرف داشته باشد می‌توان شرایط مسأله را برقرار کرد. اکنون این حکم را به استقرا ثابت می‌کنیم. ولی استقرا را به شیوه‌ای (اندکی) جدید به‌کار می‌گیریم.

تاکنون تحقیق کردیم که مهره‌ها را با شرایط خواسته‌شده می‌توان در صفحهٔ 4×4 آرایش داد. باید تحقیق کنید که در مورد صفحه‌های 5×5، 6×6 و 7×7 نیز می‌توان این کار را کرد. (یا می‌توانید تقلب کنید و شکل ۱۲۳ را ببینید).

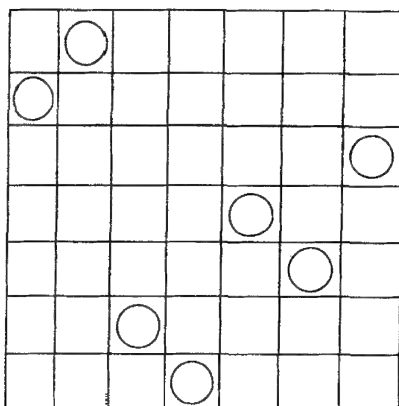
اکنون ادعای زیر را بررسی می‌کنیم: اگر بتوانیم مسأله را در مورد صفحهٔ $k \times k$ حل کنیم می‌توانیم از این راه‌حل برای حل کردن مسأله در مورد صفحهٔ $(k + 4) \times (k + 4)$ استفاده کنیم. برای درک بهتر وضعیت شکل ۱۲۴ را ببینید. در این شکل، صفحه‌ای $k \times k$ به شیوه‌ای مناسب در صفحهٔ $(k + 4) \times (k + 4)$ نشسته است. مهره‌ها را در موقعیت مناسب در صفحهٔ $k \times k$ قرار دهید. اکنون بقیهٔ مهره‌ها را به‌صورتی که در شکل ۱۲۵ نشان داده شده است در مربعهای $(1, 2)$، $(2, 1)$، $(k + 3, k + 4)$ و $(k + 4, k + 3)$ در صفحهٔ بزرگتر قرار دهید. به این ترتیب مسأله در مورد صفحهٔ $(k + 4) \times (k + 4)$ حل شده است.



$k = 5$

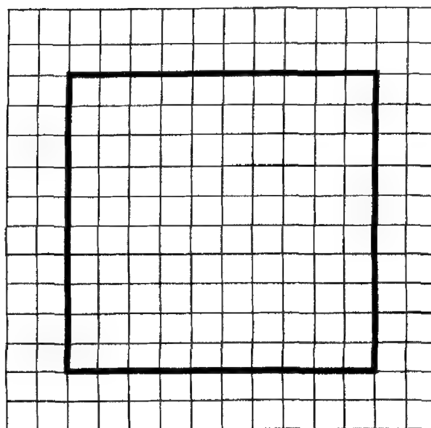


$k = 6$

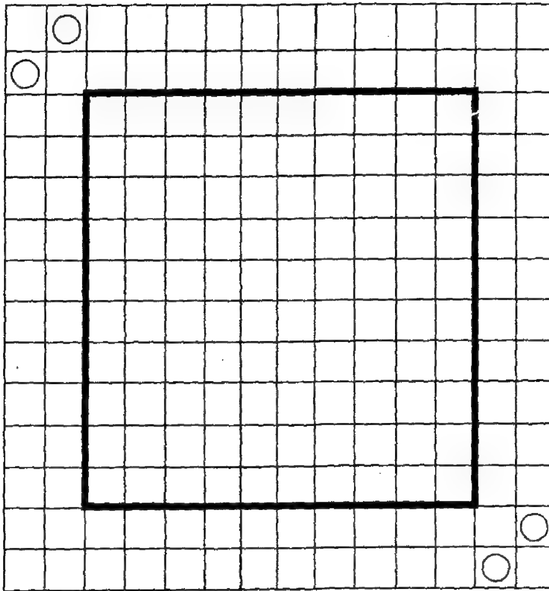


$k = 7$

شکل۱۲۳



شکل۱۲۴



شکل۱۲۵

اکنون راه‌حل مسأله در چهار مرحله کامل می‌شود. ابتدا توجه کنید که می‌توان نتیجهٔ بند قبل را در مورد صفحهٔ ۴×۴ به‌کار گرفت. به این ترتیب مسأله به‌ازای

$$k = ۴, ۸, ۱۲, ۱۶, \cdots$$

حل می‌شود. سپس می‌توانیم نتیجهٔ بند قبل را در مورد صفحهٔ ۵×۵ به‌کار گیریم. به این ترتیب مسأله به‌ازای

$$k = ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, \cdots$$

حل می‌شود. بعد نتیجهٔ بند قبل را در مورد صفحهٔ ۶×۶ به‌کار می‌گیریم. به این ترتیب مسأله به‌ازای

$$k = ۶, ۱۰, ۱۴, ۱۸, \cdots$$

حل می‌شود. سپس نتیجهٔ بند قبل را در مورد صفحهٔ ۷×۷ به‌کار می‌گیریم. به این ترتیب مسأله به‌ازای

$$k = ۷, ۱۱, ۱۵, ۱۹, \cdots$$

حل می‌شود.

اکنون با یک نگاه درمی‌یابیم که مسأله را به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k به‌طوری‌که $k \geqslant ۴$ حل کرده‌ایم.

□

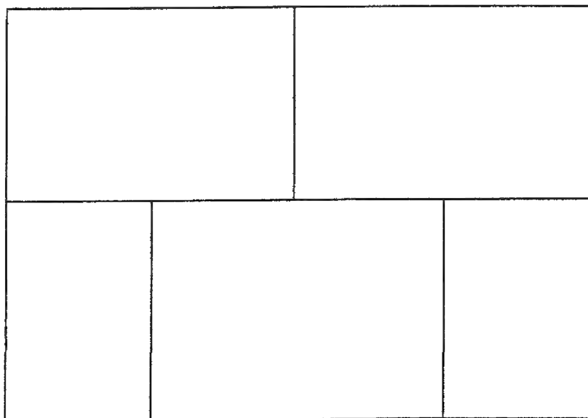
مسألهٔ پیکارجوی ۱۲.۲.۴ آیا می‌توانید k مهرهٔ شطرنج را روی صفحهٔ شطرنجی $k \times k$ طوری قرار دهید که در هر سطر فقط یک مهره، در هر ستون فقط یک مهره و در هر قطر هم فقط یک مهره باشد؟

۳.۴ مسیریابی و استفاده از زوجیت

در این بخش چند مسألهٔ مقدماتی مشهور در ریاضیات را بررسی می‌کنیم. بعضی از این مسأله‌ها مربوط به مسیریابی است. مسألهٔ زیر از این گونه است:

مسألهٔ ۱.۳.۴ شیءِ هندسی شکل ۱۲۶ را ببینید. توجه کنید که روی ضلعهای این شکل ۱۶ پاره‌خط مشخص شده است. آیا می‌توان مسیر مسطح پیوسته‌ای یافت که از هر پاره‌خط دقیقاً یک بار بگذرد؟ [توجه: مسیر نباید از رأسها بگذرد؛ مسیر فقط باید از میان ضلعها به ناحیه‌ای وارد یا از ناحیه‌ای خارج شود.]

این مسأله قرنها عدهٔ زیادی را عاجز کرده است. درواقع ساختن چنین مسیری ناممکن است. به‌زودی استدلال منطقی درستی برای ناممکن بودن یافتن چنین مسیری عرضه می‌کنیم. ولی عده‌ای هنوز از پذیرفتن این استدلالهای ریاضی امتناع می‌کنند و عده‌ای نیز همچنان در جستجوی یافتن این مسیر دست‌نیافتنی پافشاری می‌کنند. همیشه به‌خاطر داشته باشید که «راه‌حل» مسأله، مانند برهان ریاضی، ابزاری روانشناختی است. هدف راه‌حل متقاعد کردن خواننده است به اینکه مسأله حل شده است.



شکل ۱۲۶

راه‌حل. مستطیل بزرگ به پنج ناحیه تقسیم شده است. توجه کنید که سه تا از این ناحیه‌ها، یعنی ناحیهٔ بالا سمت چپ، ناحیهٔ بالا سمت راست و ناحیهٔ میانی پایین، هریک تعدادی فرد (پنج) دیواره یا لبهٔ مرزی دارد. نکته‌ای مهم در مورد ناحیه‌ای مانند U که تعدادی فرد لبهٔ مرزی داشته باشد وجود دارد: اگر مسیری در U شروع شود ممکن نیست در U ختم شود؛ اگر مسیری در U شروع نشود باید در U ختم شود.

این نکته آنقدر مهم است که در مورد آن باید بیشتر اندیشه کرد. فرض کنید ناحیه‌ای مانند V دو یال داشته باشد. از هر یال فقط می‌توانیم یک بار بگذریم. اگر مسیری از درون این ناحیه شروع شود اولین باری که از یکی از یالهای ناحیه بگذرد از ناحیه خارج می‌شود. اکنون از یک یال استفاده شده است. فقط یک یال دیگر از این ناحیه مانده است که مسیر باید از آن بگذرد. مسیر ممکن است

به‌محض خروج از ناحیه از این یال بگذرد یا نگذرد، ولی (بنابر قاعده) نهایتاً باید از این یال بگذرد. وقتی چنین شود مسیر از خارج ناحیه وارد آن می‌شود. دراین‌صورت مسیر به تله می‌افتد چون از هر یال ناحیهٔ V (دقیقاً یک‌بار!) گذشته است. مسیر نمی‌تواند از این ناحیه خارج شود و بنابراین باید در همین جا ختم شود.

همین استدلال در مورد ناحیه‌ای که ۴، ۶ یا هر تعداد زوجی یال داشته باشد به‌کار می‌آید: اگر مسیری از درون ناحیه شروع شود باید در همان ناحیه هم ختم شود. اگر مسیر بیرون ناحیه شروع شود بیرون ناحیه هم باید ختم شود.

استدلال در مورد ناحیه‌ای که تعداد یالهایش فرد باشد درست عکس این استدلال است. ناحیه‌ای مانند W با سه یال درنظر بگیرید. فرض کنید مسیر از درون W شروع شود. در حرکت اول مسیر باید از یک یال W بگذرد و به خارج از W برسد. بعداً (شاید بلافاصله نباشد) مسیر ممکن است یال دیگری از W را قطع کند. این بار مسیر از خارج W به درون آن می‌آید. اکنون فقط یک یال W باقی مانده است. مسیر باید از هر یال دقیقاً یک بار بگذرد؛ پس باید از یال باقی‌ماندهٔ W بگذرد. اکنون مسیر از هر یال W یک‌بار گذشته است و بیرون W است. مسیر دیگر نباید به W وارد شود چون قبلاً از همهٔ یالهای W گذشته است. این استدلال در مورد ناحیه‌ای که ۵، ۷ یا هر تعداد فردی یال داشته باشد به‌کار می‌آید.

اکنون مسألهٔ خودمان را بررسی می‌کنیم. سه ناحیه هست که تعداد یالهای هریک از آنها فرد است و قبلاً آنها را مشخص کردیم. این ناحیه‌ها را E_1، E_2 و E_3 بنامید. اگر مسیر خارج از این سه ناحیه شروع شود باید درون هریک از آنها ختم شود. این چیزی است که استدلال قبلی ما ایجاب می‌کند. چون درونهای این سه ناحیه دوبه‌دو جدا از هم‌اند، چنین چیزی آشکارا ناممکن است. پس مسیر باید از درون یکی (و فقط یکی) از این سه ناحیه شروع شود. مثلاً فرض کنید مسیر از درون E_1 شروع شود. دراین‌صورت مسیر در نقطه‌ای خارج از E_2 و خارج از E_3 شروع شده است. استدلال ما نشان می‌دهد که انتهای مسیر باید در نقطه‌ای خارج از E_1 (تا اینجا مشکلی نیست) و همچنین درون E_2 و درون E_3 باشد. ولی نقطه‌ای وجود ندارد که هم درون E_2 و هم درون E_3 باشد.

اگر مسیر از نقطه‌ای درون E_2 یا درون E_3 شروع شود باز هم استدلالی مشابه به‌کار می‌آید.

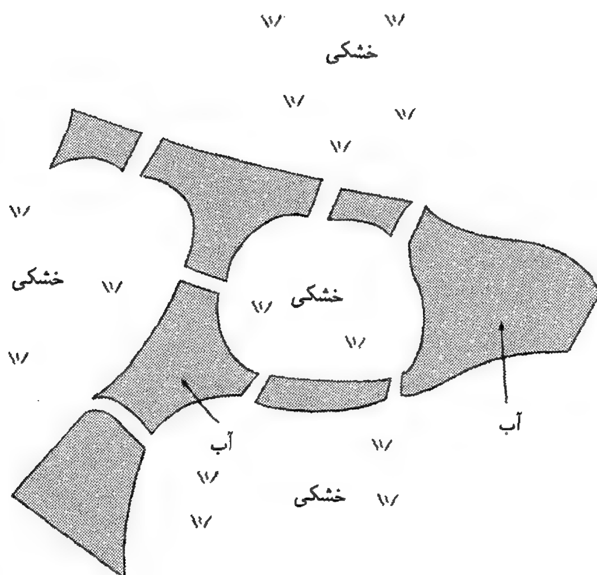
همهٔ نقطه‌هایی راکه ممکن است نقطهٔ شروع مسیر باشند حذف کرده‌ایم. پس در موقعیت غیرقابل دفاعی قرارگرفته‌ایم و هیچ مسیری که با توصیف مسأله بخواند وجود ندارد. □

توجه کنید که در راه‌حل مسألهٔ قبل «زوجیت» نقشی تعیین‌کننده داشت. از مفهوم زوجیت برای تمایز بین ناحیه‌هایی که تعداد یالهایشان زوج است و ناحیه‌هایی که تعداد یالهایشان فرد است استفاده کردیم. اگر بخواهید راه‌حلی بیابید که چنین باشد: «مسیر را از اینجا شروع می‌کنیم. از این یال می‌گذریم و بعد تا اینجا پیش می‌رویم. اکنون می‌توانیم به سمت چپ یا به طرف دیگر برویم. اکنون چهار انتخاب داریم . . .»، مأیوس خواهید شد. حساب همهٔ امکانات و حالتهای مختلف را نگاه داشتن تقریباً ناممکن

است. درخواهید یافت که در بسیاری از موارد استفاده از زوجیت همهٔ پیچیدگیها را کنار می‌زند و راه‌حلی صریح و موجز به‌دست می‌دهد (مسألهٔ مربوط به کاشی‌کاری کف حمام در فصل ۱ را به‌خاطر می‌آورید؟). البته برنامه‌نویسی باهوش می‌تواند با کامپیوتر همهٔ امکانات را بیازماید.

در اینجا مسأله‌ای را طرح می‌کنیم که بسیار شبیه مسألهٔ قبل است. این مسأله به لحاظ تاریخی مهم است: لئونهارت اویلر، ریاضیدان مشهور (۱۷۸۳-۱۷۰۷)، نقشی مؤثر در حل آن داشته است. برخی از تاریخ‌نگاران پیدایش توپولوژی صفحه را بررسی این مسأله می‌دانند. این مسأله را به دلایل فرهنگی می‌آوریم.

مسألهٔ ۲.۳.۴ **(هفت پل کونیگسبرگ)** در شهر کونیگسبرگ (که قبلاً بخشی از پروس بود ولی اکنون در لهستان است) هفت پل هست. [برخی گفته‌اند هشت پل در این شهر بوده است. ولی مسأله با هشت پل راه‌حل متفاوتی دارد. مسألهٔ بعد را ببینید.] این پلها در شکل ۱۲۷ نشان داده شده‌اند. مسأله رسم مسیری پیوسته است که از هر پل دقیقاً یک بار بگذرد.

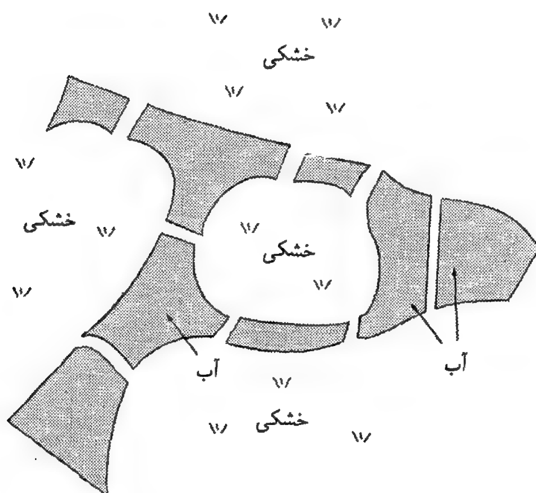


شکل۱۲۷

راه‌حل. در شکل ۱۲۷ آبهای اطراف شهر با سایه و خشکیها و پلها سفید تصویر شده‌اند. توجه کنید که هریک از خشکیها به تعدادی فرد از پلها راه دارد. پس با موقعیتی شبیه مسألهٔ قبل مواجهیم: مسیری که در یکی از خشکیها شروع شود نباید در همان خشکی ختم شود.

به‌عنوان تمرین، استدلال را کامل و ثابت کنید یافتن مسیری که مطابق خواستهٔ مسأله باشد ممکن نیست. □

مسألهٔ پیکارجوی ۳.۳.۴ در شکل ۱۲۸ آرایشی از شهر کونیگسبرگ با هشت پل نشان داده شده است. اکنون ثابت کنید می‌توان مسیر پیوسته‌ای رسم کرد که از هر پل دقیقاً یک‌بار بگذرد.
چند راه متمایز برای حل این مسأله وجود دارد؟



شکل۱۲۸

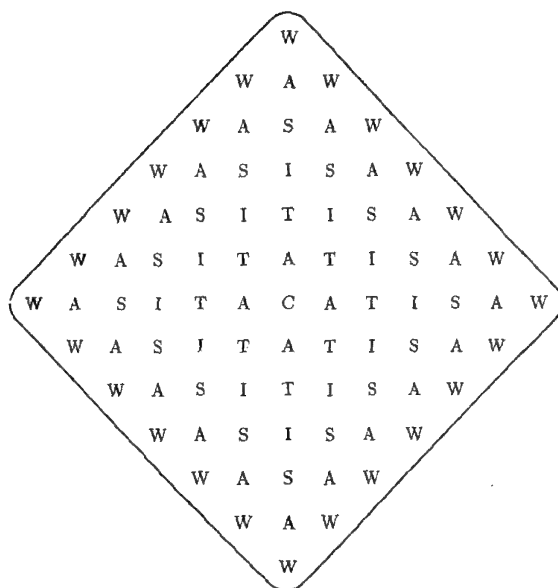
مسألهٔ پیکارجوی ۴.۳.۴ آیا می‌توانید در مسألهٔ پیکارجوی قبل زیرمجموعه‌ای هفت‌تایی از هشت پل پیدا کنید به‌طوری‌که مسیری پیوسته از تمامی این هفت پل بگذرد؟

مسألهٔ ۵.۳.۴ (سام لوید) نمودار شکل ۱۲۹ را ببینید. در این شکل حروفی را می‌بینید که با آنها می‌توان جملهٔ «*WAS IT A CAT I SAW*» را نوشت. مسأله این است: به چند طریق مختلف می‌توانید از یکی از W های کنار لبه‌های شکل شروع کنید و حرف‌به‌حرف روی نمودار حرکت کنید و جملهٔ بالا را بخوانید؟

راه‌حل. اگر بخواهید واقعاً مسیرهای مختلف را بشمارید به‌زودی طاقتتان طاق می‌شود. باید ایده‌ای داشته باشیم.

استدلالی نادرست چنین است: چون جمله به «SAW»، و درواقع به «W»، ختم می‌شود، پس باید به یکی از لبه‌های شکل ختم شود. به‌همین ترتیب، جمله با «WAS»، یعنی با «W»، شروع می‌شود. پس جمله باید از یکی از لبه‌های شکل شروع شود. بیست‌وچهار W در لبه‌های شکل هست. هر بار که می‌خواهیم جمله را بخوانیم باید از یکی از این Wها شروع کنیم و در آخر جمله دوباره به یکی از این Wها برسیم. هر یک از Wها ممکن است شروع جمله یا ختم جمله باشد. پس تعداد طرق مختلف خواندن جمله ۲۴×۲۴، یعنی ۵۷۶، است.

تعداد طرقی که در بند قبل به‌دست آمد بسیار کمتر از تعداد واقعی است. در استدلال بند قبل به



شکل۱۲۹

این واقعیت که جمله جناس مقلوب است توجه نکردیم: این جمله را می‌توانیم از اول به آخر یا از آخر به اول بخوانیم. با توجه به این نکته درمی‌یابیم که لازم است (الف) خواندن جمله را از روی یکی از لبه‌ها شروع کنیم، (ب) تا مرکز شکل بیابیم و «WAS IT A C» را بخوانیم، و سپس دوباره به یکی از لبه‌ها برگردیم و بقیهٔ جمله یعنی «AT I SAW» را بخوانیم.

با شمردن همهٔ شاخه‌های مسیر می‌بینیم که ۲۵۲ طریق مختلف برای شروع کردن جمله در یکی از لبه‌ها و پیش رفتن تا مرکز شکل وجود دارد (این را به‌عنوان تمرین برای شما می‌گذاریم). البته همین تعداد طریق هم برای شروع کردن از مرکز شکل و خواندن بقیهٔ جمله وجود دارد. هر مسیر کامل از یکی از مسیرهای اول و سپس یکی از مسیرهای دوم تشکیل شده است. پس تعداد کلِ مسیرهای ممکن $۲۵۲^۲$، یعنی ۶۳۵۰۴، است. می‌بینیم که حدس اولیهٔ ما، یعنی ۵۷۶، بسیار کمتر از مقدار واقعی است.

□

ایدهٔ جناس مقلوب ایده‌ای است که سالهاست معمابازان را مجذوب کرده است. طولانیترین جناس مقلوب با معنایی که مؤلف تاکنون دیده است این جمله است:

GO HANG A SALAMI I'M A LASAGNA HOG.

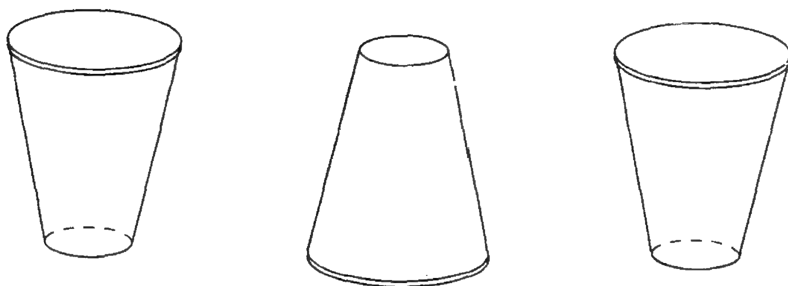
در مرکز وِب

http : / /www.cs.brown.edu/people/nfp/palindrome.html

هزاران مثال از جناس مقلوب و همچنین اطلاعاتی در مورد ساختن جناسهای مقلوب وجود دارد.

مسألهٔ پیکارجوی ۶.۳.۴ سه لیوان را روی میزی مانند شکل ۱۳۰ گذاشته‌ایم. توجه کنید که دو لیوان کناری را درست ولی لیوان میانی را سروته گذاشته‌ایم. می‌توانید دو لیوان را همزمان برگردانید. هدف این است که نهایتاً هر سه لیوان درست قرار گرفته باشند.

ثابت کنید که این کار ناممکن است.



شکل ۱۳۰

مسألهٔ ۷.۳.۴ نقطهٔ مشبکه‌ای در فضای سه‌بعدی ($\mathbb{R}^۳$) نقطه‌ای است که هر سه مختصش عددهایی صحیح باشند. نُه نقطهٔ مشبکه‌ای متمایز در $\mathbb{R}^۳$ بگیرید. توضیح دهید که چرا باید نقطهٔ وسط یکی از پاره‌خطهایی که دو تا از این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کند نقطه‌ای مشبکه‌ای باشد؟

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که نقطهٔ وسط پاره‌خطی که دو نقطهٔ مشبکه‌ای را به هم وصل می‌کند لزوماً نقطه‌ای مشبکه‌ای نیست. مثلاً $A = (۰, ۰, ۰)$ و $B = (۱, ۱, ۱)$ دو نقطهٔ مشبکه‌ای‌اند ولی نقطهٔ وسط آنها، $C = \left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$، نقطه‌ای مشبکه‌ای نیست.

این مثال ساده نشان می‌دهد که چرا ممکن است نقطهٔ وسط پاره‌خط مشبکه‌ای نباشد: وقتی که وسط پاره‌خط حاصل از وصل کردن $A = (a, b, c)$ و $A' = (a', b', c')$ را حساب می‌کنیم، مختصات نقطهٔ وسط را $\left(\frac{a+a'}{۲}, \frac{b+b'}{۲}, \frac{c+c'}{۲}\right)$ به‌دست می‌آوریم. برای اینکه این سه مختص عددهایی صحیح باشند باید $a + a'$ و $b + b'$ و $c + c'$ هر سه زوج باشند. پس a و a' هر دو باید یا زوج باشند یا فرد. b و b' و همین‌طور c و c' نیز هر دو باید یا زوج باشند یا فرد. این ویژگی شاخص است.

«ز» را برای زوج و «ف» را برای فرد به‌کار می‌بریم. دراین صورت مختصات هر نقطهٔ مشبکه‌ای در فضا به یکی از صورتهای زیر است:

(ف،ف،ز) (ف،ز،ز) (ز،ز،ز)

(ز، ف،ف) (ف،ف،ف) (ز،ف،ز)

(ف،ز،ف) (ز،ز،ف)

به بیان دیگر، هشت امکان هست. ولی در این مسأله نُه نقطه داریم. پس زوجیت مختصات دو تا از نقطه‌ها باید مثل هم باشند. با استدلال بالا، نقطهٔ وسط پاره‌خط حاصل از این دو نقطه باید نقطه‌ای مشبکه‌ای باشد. □

۴.۴ مسأله‌های مرموز حساب

در این بخش به بررسی دسته‌ای از مسائل می‌پردازیم که بِرویک، ریاضیدان انگلیسی، در اوایل قرن بیستم آنها را بررسی کرد و احتمالاً چندین سال قبل از بِرویک مطرح شده بودند.

مسألهٔ ۱.۴.۴ حروف زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccccc} & L & E & T & S \\ & W & A & V & E \\ \hline L & A & T & E & R \end{array}$$

این مسأله مربوط به عمل جمع است. حروف مختلف رقمهای مختلف را (که از بین رقمهای ۰، ۱، ۲، ... و ۹ انتخاب شده‌اند) نشان می‌دهند. وقتی که حرفی (مثلاً A) دو بار به‌کار رفته باشد نشان می‌دهد که رقمی تکرار شده است. مسأله تعیین کردن همهٔ رقمهاست.

راه‌حل. کار را با حرف L در **LATER** شروع می‌کنیم. این L از نقلی عمل جمع حاصل شده است. چون L و W که با هم جمع شده‌اند و این L را به‌دست داده‌اند هیچ‌کدام بزرگتر از ۹ نیستند، امکان ندارد (حتی اگر نقلی حاصل از جمع کردن E و A را به‌حساب آوریم) که این L چیزی جز ۱ باشد (نمی‌توانیم این L را رقم ۰ بگیریم، چون ۰ در سمت چپ عدد معمولاً نوشته نمی‌شود). پس L در سمت چپ LATER و بنابراین هر دو L برابر ۱ هستند.

اکنون W فقط ممکن است ۸ یا ۹ باشد، چون وقتی با ۱ جمع می‌شود باید نقلی ایجاد شود. اما W ممکن نیست ۸ باشد، چون دراین‌صورت A باید ۰ باشد و در عین حال مجموع E و A باید نقلی داشته باشد تا $L + W = 1 + 8$ را به ۱۰ تبدیل کند. اگر A صفر باشد، E اجباراً باید ۹ باشد و مجموع T و V هم باید نقلی داشته باشد و در نتیجه E با T برابر نیست. اما این هم کارساز نیست، چون دراین‌صورت T باید صفر باشد درحالی‌که قبلاً ۰ را به‌کار برده‌ایم. پس W برابر ۸ نیست؛ W باید ۹ باشد.

اکنون جمع ما چنین است:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & E & T & S \\ & 9 & 0 & V & E \\ \hline 1 & 0 & T & E & R \end{array}$$

اکنون E هر چه باشد، T باید یکی بزرگتر باشد (به سبب نقلی) و بنابراین T برابر E نیست. ولی T + V هم باید E باشد. چنین چیزی ممکن نیست، مگر اینکه V برابر ۹ باشد. ولی V ممکن نیست ۹ باشد، چون ۹ را قبلاً به‌کار برده‌ایم. پس V باید ۸ باشد و جمع S و E حتماً باید نقلی داشته باشد. اکنون می‌توانیم بنویسیم

	۱	E T	S

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & ۱ & E & T & S \\
 & ۹ & ۰ & ۸ & E \\
\hline
۱ & ۰ & T & E & R
\end{array}
$$

توجه کنید که T ممکن نیست ۲ باشد، چون دراین‌صورت E برابر ۱ می‌شود و ۱ را قبلاً به‌کار برده‌ایم. اگر T برابر ۳ باشد E برابر ۲ است و می‌توانیم بنویسیم

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & ۱ & ۲ & ۳ & S \\
 & ۹ & ۰ & ۸ & ۲ \\
\hline
۱ & ۰ & ۳ & ۲ & R
\end{array}
$$

چون ۹ و ۸ را قبلاً به‌کار برده‌ایم، S ممکن نیست بزرگتر از ۷ باشد. اما دراین‌صورت جمع S و ۲ نقلی ندارد و فرضهای قبلیمان نادرست است.

اگر T برابر ۴ باشد، E برابر ۳ است و می‌توانیم بنویسیم

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & ۱ & ۳ & ۴ & S \\
 & ۹ & ۰ & ۸ & ۳ \\
\hline
۱ & ۰ & ۴ & ۳ & R
\end{array}
$$

باز هم گیر می‌کنیم، چون اگر S برابر ۷ باشد، R برابر ۰ می‌شود و ۰ را قبلاً به‌کار برده‌ایم؛ اگر S برابر ۶ باشد، نقلی ایجاد نمی‌شود. پس فرض اینکه T = ۴ درست نیست.

این امکان نیز که T برابر ۵ باشد به همین گونه منتفی است. این حالت را باید به‌عنوان تمرین بررسی کنید. اکنون T = ۶ را امتحان می‌کنیم. دراین‌صورت E = ۵ و می‌توانیم بنویسیم

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & ۱ & ۵ & ۶ & S \\
 & ۹ & ۰ & ۸ & ۵ \\
\hline
۱ & ۰ & ۶ & ۵ & R
\end{array}
$$

اکنون S = ۷ و R = ۲ انتخابی قابل قبول است. معما حل شده است:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & ۱ & ۵ & ۶ & ۷ \\
 & ۹ & ۰ & ۸ & ۵ \\
\hline
۱ & ۰ & ۶ & ۵ & ۲
\end{array}
$$

به‌عنوان تمرین بررسی کنید که $T = ۷$ کارساز نیست. $T = ۸$ قابل قبول نیست، چون ۸ را قبلاً به‌کار برده‌ایم. پس جواب یکتایی برای مسأله یافته‌ایم. □

مسألهٔ پیکارجوی ۲.۴.۴ مسألهٔ جمع زیر را حل کنید:

```
   S E N D
   M O R E
 ---------
 M O N E Y
```

همان قاعده‌های مسألهٔ قبل را رعایت کنید.

مسألهٔ زیر کمی فرق دارد و کمی دشوارتر است:

مسألهٔ ۳.۴.۴ به تقسیم زیر توجه کنید:

```
۶ * ۸ * * *  | * * ۹
* * * ۲      |-------
-------        * ۵ ۳
  * ۹ * *
  * * ۴ *
  -------
    * * ۴ *
    * * * *
    -------
```

در این تقسیم تعدادی از رقمها خوانا نیستند (به جای این رقمها * گذاشته‌ایم). با اطلاعات داده شده می‌توان این رقمها را به‌طور یکتا تعیین کرد. رقمهای ناخوانا را مشخص کنید.

راه‌حل. ابتدا به جای *ها حرف می‌گذاریم تا ارجاع به آنها آسانتر باشد:

سطر اول	۶d۸efg	bc۹
سطر دوم	hij۲	a۵۳
سطر سوم	k۹lm	
سطر چهارم	no۴p	
سطر پنجم	qr۴s	
سطر ششم	tuvw	

توجه کنید که $bc۹ \times ۳$ سطر ششم را به‌دست می‌دهد. دراین‌صورت، w باید ۷ باشد و باید نقلی ۲ داشته باشیم. ولی دراین‌صورت c باید برابر ۴ باشد تا در مرحلهٔ بعدی ضرب $bc۹ \times ۳$ رقم دوم از راست در حاصل‌ضرب برابر ۴ باشد. البته s هم باید برابر با w باشد؛ پس $s = ۷$. بی‌درنگ متوجه می‌شویم که $p = ۵$، چون سطر چهارم $b۴۹ \times ۵$ است. اکنون می‌توانیم بنویسیم

سطر اول	۶d۸efg	b۴۹
سطر دوم	hij۲	a۵۳
سطر سوم	k۹lm	
سطر چهارم	no۴۵	
سطر پنجم	qr۴۷	
سطر ششم	tu۴۷	

از کمکهای بصری استفاده کنید. اکنون معلوم می‌شود که m باید ۹ باشد (چون ۴ = ۵ − ۹)، بنابراین *f* برابر ۹ است. همچنین توجه کنید که a باید ۸ باشد تا آخرین رقم سطر دوم ۲ شود. به این ترتیب j باید ۹ باشد. پس می‌توانیم بنویسیم

سطر اول	۶d۸e۹g	b۴۹
سطر دوم	hi۹۲	۸۵۳
سطر سوم	k۹l۹	
سطر چهارم	no۴۵	
سطر پنجم	qr۴۷	
سطر ششم	tu۴۷	

توجه کنید که g برابر ۷ است و h هم باید ۶ باشد. پس b یا ۷ است یا ۸. اگر b برابر ۸ باشد، hi۹۲ برابر ۶۷۹۲ و no۴۵ برابر ۴۲۴۵ است. اکنون نمودارمان چنین است:

سطر اول	۶d۸e۹۷	۸۴۹
سطر دوم	۶۷۹۲	۸۵۳
سطر سوم	k۹l۹	
سطر چهارم	۴۲۴۵	
سطر پنجم	qr۴۷	
سطر ششم	tu۴۷	

اکنون مشکلی داریم، چون k باید ۴ باشد. یعنی اینکه d برابر ۲ است، ولی دراین صورت تفریق سطر دوم از سطر اول جور درنمی‌آید چون سطر اول کوچکتر از سطر دوم است. پس نمی‌توانیم b را ۸ بگیریم. b باید ۷ باشد. اکنون نمودارمان چنین است:

```
سطر اول     ۶d۸e۹۷  | ۷۴۹
                    |------
سطر دوم     ۵۹۹۲      ۸۵۳
            ------
سطر سوم      k۹l۹
سطر چهارم    ۳۷۴۵
             ----
سطر پنجم      qr۴۷
سطر ششم       ۲۲۴۷
              ----
```

اکنون مقسوم‌علیه و خارج‌قسمت کامل به‌دست آمده‌اند. می‌توانیم این دو را درهم ضرب کنیم و مقسوم را برابر با ۶۳۸۸۹۷ به‌دست آوریم. بقیهٔ رقمها را می‌توانیم با استفاده از قاعده‌های معمولی حساب به‌دست آوریم. □

مسألهٔ بعدی خود مسألهٔ بِرویک است. این مسأله اساساً پیچیده‌تر از مسأله‌ای که هم‌اکنون حل کردیم نیست. ولی برای حل این مسأله مراحل بیشتری را باید بپیماییم. این مسأله احتمالاً مشهورترین مسأله در نوع خود است.

مسألهٔ ۴.۴.۴ (بِرویک) به تقسیم طولانی زیر توجه کنید:

```
**۷*******   | ****۷*
             |--------
 ******        **۷**
-------
*****۷*
*******
-------
  *۷****
  *۷****
  ------
  *******
  ****۷**
  -------
     ******
     ******
     ------
```

همهٔ رقمها غیر از رقمهای ۷ای که در نمودار نشان داده شده‌اند ناخوانا هستند. مسأله تعیین همهٔ این رقمهاست.

راه‌حل. ما هم مانند راه‌حلی که در دوری [DOR] داده شده است به‌جای همهٔ رقمهای ناخوانا حرف می‌گذاریم تا ارجاع به آنها آسانتر باشد. همچنین چند تا از سطرها را شماره‌گذاری می‌کنیم.

	ABVCDEFGHI	+−?|V%
	JKLMNO	:;V"&
سطر سوم	PQRSTVU	
سطر چهارم	WXYZ!@#	
سطر پنجم	aVbcde	
سطر ششم	fVghij	
سطر هفتم	klmnopq	
سطر هشتم	rstuVvw	
سطر نهم	xyz$~^	
سطر دهم	xyz$~^	

متوجه شده‌اید که حروف الفبا کم آورده‌ایم و مجبور شده‌ایم از نمادهای مختلف ASCII برای نمایش مجهولها استفاده کنیم. ضمن کار این نمادها حذف می‌شوند.

مقسوم‌علیه (عددی که بر آن تقسیم می‌کنیم) را با $\mathcal{D}$ نشان می‌دهیم. اولین رقم $\mathcal{D}$، یعنی +، باید ۱ باشد؛ چون اگر ۲ باشد $\mathcal{D} \times 7$ هفت رقم خواهد داشت، ولی سطر ششم آشکارا نشان می‌دهد که این حاصل‌ضرب شش رقم دارد.

اکنون چون باقیمانده در سطر سوم مرکب از رقمهای PQRSTV است، P باید ۱ باشد. اگر جز این باشد، مقسوم‌علیه از این باقیمانده کوچکتر خواهد بود. همین استدلال نشان می‌دهد که k هم باید ۱ باشد. دراین‌صورت با بررسی تفریق می‌بینیم که $W = 1$ و $r = 1$.

اکنون مقسوم‌علیه ممکن نیست بزرگتر از ۱۹۹۹۷۹ باشد و " ممکن نیست بزرگتر از ۹ باشد. پس سطر هشتم که حاصل‌ضرب" در D است ممکن نیست بزرگتر از ۱۷۹۹۸۱۱ باشد. به‌خصوص $s < 8$. اکنون l فقط ممکن است ۹ یا ۰ باشد (چون حاصل تفریق ۷ از ۷ است)؛ ولی l ممکن نیست ۹ باشد، چون در سطر نهم زیر l و s هیچ رقمی نیست. پس $l = 0$. ولی $k = 1$ و بنابراین $s = 0$. توجه کنید که از $k = 1$ و $l = 0$ اجباراً تساوی $a = f + 1$ نتیجه می‌شود. نتیجه می‌گیریم که $f \leqslant 8$. پس سطر ششم بزرگتر از ۸۷ghij نیست.

اگر − برابر با (یا بزرگتر از) ۳ بود، بدون توجه به اینکه رقمهای دیگر مقسوم‌علیه چه باشند، $\mathcal{D}$ دست‌کم ۱۳۰۰۰۰ می‌شد و سطر ششم، که از $\mathcal{D} \times 7$ حاصل می‌شود، بزرگتر از ۹۰۰۰۰۰ می‌شد. قبلاً دیدیم که این امر ممکن نیست. پس − یا ۰ یا ۱ یا ۲ است. − ممکن نیست ۰ باشد، چون اگر چنین بود سطر هشتم ۷ رقمی نبود.

اگر − برابر ۱ بود، ? باید ۰ یا ۱ می‌بود. این به این دلیل است که اگر ? دست‌کم ۲ باشد، $\mathcal{D} \times 7$ (رقم سوم خارج‌قسمت ضرب در مقسوم‌علیه) که شامل ضرب ?×۷ است عددی دو رقمی خواهد

بود و نقلی ایجاد خواهد کرد. ولی دراین‌صورت امکان ندارد رقم دوم سطر ششم ۷ شود. پس ? یا ۰ است یا ۱. ولی ? ممکن نیست ۰ باشد، چون دراین‌صورت مقسوم‌علیه خیلی کوچک می‌شود و امکان ندارد سطر هشتم ۷ رقمی شود. پس ? باید ۱ باشد.

اگر فرض کنیم ? برابر با ۱ باشد، مقسوم‌علیه باید ۱۱۱|۷٪ باشد. سطر هشتم حاصل‌ضرب این عدد در ″ است. پس | و ٪ و ″ باید طوری انتخاب شوند که سطر هشتم عددی ۷ رقمی شود. چنین اتفاقی فقط وقتی روی می‌دهد که ″ برابر با ۹ باشد. ولی دراین‌صورت رقم سوم از سمت راست در سطر هشتم فقط وقتی ۷ است که | برابر با ۰ یا ۹ باشد. ولی | ممکن نیست ۰ باشد، چون اگر چنین باشد سطر هشتم شش رقمی می‌شود. همچنین، | ممکن نیست ۹ باشد، چون اگر چنین باشد سطر ششم با ۷۸۳ شروع می‌شود. پس امکان اینکه ? برابر با ۱ باشد وجود ندارد.

استدلالمان را جمع‌بندی می‌کنیم. بررسی کردیم که – ممکن است ۱ باشد یا نه. اگر باشد، ? فقط ممکن است ۰ یا ۱ باشد. ولی هیچ‌یک از این دو امکان وجود ندارد. نتیجه می‌گیریم که – برابر با ۱ نیست. قبلاً دیدیم که – برابر با ۰ هم نیست. تنها امکان باقی‌مانده این است که – برابر با ۲ باشد. با دانستن مقدار –، بی‌درنگ معلوم می‌شود که f برابر با ۸ و a برابر با ۹ است.

اکنون رقم سوم D، یعنی ?، را بررسی می‌کنیم. این رقم فقط ممکن است ۴ یا ۵ باشد. این به این دلیل است که ۱۲۶۰۰۰ × ۷ بزرگتر از سطر ششم و ۱۲۴۰۰۰ × ۷ کوچکتر از سطر ششم است. به همین ترتیب، چون ۱۲۴۰۰۰ × ۹ بزرگتر از سطر هشتم و ۱۲۵۰۰۰ × ۷ کوچکتر از سطر هشتم است، ″ باید ۸ باشد.

اکنون باید تصمیم بگیریم که ? برابر با ۴ است یا ۵. توجه می‌کنیم که

$$۸ \times ۱۲۴۹۷۹ < ۱۰۰۰۰۰۰$$

پس برابر بودن ? با ۴ با سطر هشتم سازگار نیست. پس ? باید ۵ باشد.

اکنون با نوشتن همهٔ اطلاعاتی که به‌دست آورده‌ایم نمودار زیر حاصل می‌شود:

```
                          ABYCDEFGHI  | ۱۲۵|۷٪
                          JKLMNO      |________
                                        : ; ۷۸&
سطر سوم                   ۱QRST۷U
سطر چهارم                 ۱XYZ!@#
                          -------
سطر پنجم                     ۹۷bcde
سطر ششم = (مقسوم‌علیه)×۷      ۸۷ghij
                             ------
سطر هفتم                      ۱۰mnopq
سطر هشتم                      ۱۰tu۷vw
                              -------
سطر نهم                          xyz$~^
سطر دهم                          xyz$~^
                                 ------
```

اکنون توجه می‌کنیم که سطر هشتم ٪|۷ ۱۲۵ × ۷ است و در این سطر رقم سوم از سمت راست ۷ است. نتیجه می‌شود که | فقط ممکن است ۴ یا ۹ باشد (فقط کافی است امکانات مختلف را امتحان کنید). ولی | ممکن نیست ۹ باشد، چون اگر چنین باشد سطر ششم دست‌کم باید ۱۲۵۹۷۰ × ۷ باشد ولی این عدد بزرگتر از سطر ششم است. پس | برابر با ۴ است. ولی دراین‌صورت ٪ باید یکی از رقمهای ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ باشد (رقمهای دیگر به این دلیل حذف می‌شود که رقم سوم از سمت راست در حاصل‌ضرب ٪ ۱۲۵۴۷ × ۸ باید ۷ باشد). هر کدام از این ۵ رقم را انتخاب کنیم با توجه به تساوی

$$۷ \times ۱۲۵۴۷٪ = ۸۷۸ * **$$

نتیجه می‌گیریم که g باید ۸ باشد. به همین ترتیب سطر هشتم به ما می‌گوید که

$$۸ \times ۱۲۵۴۷٪ = ۱۰۰۳۷ * *$$

و بنابراین ۰ = t و ۳ = u.

چون $\mathcal{D}$ × (;) ، یعنی ٪۱۲۵۴۷ × (;)، هفت رقم سطر چهارم را ایجاد می‌کند و چون فقط $\mathcal{D}$ × ۸ و $\mathcal{D}$ × ۹ هفت رقم دارند نتیجه می‌شود که (;) یا ۸ است یا ۹.

اکنون توجه می‌کنیم که ۰ = t و ۱ ⩽ x (و اینکه k = r = l و ۰ = s = l) نتیجه می‌دهند ۱ ⩽ m. ولی ۸ = g و ۹ ⩽ b نتیجه می‌دهند ۱ ⩽ m. نتیجه می‌گیریم ۱ = m. دراین‌صورت ۹ = b و ۱ = x. اکنون با توجه به اینکه ۲۰۰۰۰ < $\mathcal{D}$ × ۲ (سطر نهم) نتیجه می‌گیریم ۱ = &. گذشته از این، ۲ = y، ۵ = z، ۴ = $، ۷ = ~ و ٪ = ^.

باز هم اطلاعات به‌دست آمده را در نمودار زیر ثبت می‌کنیم:

```
                              A B ۷ C D E F G H ٪   | ۱ ۲ ۵ ۴ ۷ ٪
                              J K L M N O           |-------------
                                                      : ; ۷ ۸ ۱
سطر سوم                       ۱ Q R S T ۷ U
سطر چهارم                     ۱ X Y Z ! @ #
سطر پنجم                          ۹ ۷ ۹ c d e
سطر ششم = (مقسوم‌علیه)×۷          ۸ ۷ ۸ h i j
سطر هفتم                          ۱ ۰ ۱ n o p q
سطر هشتم                           ۱ ۰ ۰ ۳ ۷ v w
سطر نهم                                ۱ ۲ ۵ ۴ ۷ ٪
سطر دهم                                ۱ ۲ ۵ ۴ ۷ ٪
```

به‌خاطر آورید که ٪ یکی از رقمهای ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ است. این رقمها به ترتیب متناظرند با

$$vw = ۶۰,\ ۶۸,\ ۷۶,\ ۸۴,\ ۹۲$$

$$opq = ۲۹۰,\ ۲۹۷,\ ۳۰۴,\ ۳۱۱,\ ۳۱۸$$

اکنون بسته به اینکه (;) برابر با ۸ باشد یا ۹، یا

$$@\# = ۶۰,\ ۶۸,\ ۷۶,\ ۸۴,\ ۹۲$$

یا

$$@\# = ۳۰,\ ۳۹,\ ۴۸,\ ۵۷,\ ۶۶$$

پس ده امکان را باید امتحان کنیم. از آخر به اول، یعنی از سطر نهم تا سطر سوم، جمعها را انجام می‌دهیم و درمی‌یابیم که فقط درصورتی‌که ٪ برابر با ۳ و (;) برابر با ۸ باشد رقم دوم از سمت راست در سطر سوم ۷ می‌شود. دراین صورت می‌بینیم که vw = ۸۴، nopq = ۶۳۳۱، hij = ۳۱۱، cde = ۹۴۴، XYZ!@# = ۰۰۳۷۸۴ و QRSTVU = ۱۰۱۷۷۸.

نهایتاً مسأله به‌صورت زیر درآمده است:

	A B ۷ C D E ۸ ۴ ۱ ۳	۱۲۵۴۷۳
	JKLMNO	: ۸۷۸۱
سطر سوم	۱۱۰۱۷۷۸	
سطر چهارم	۱۰۰۳۷۸۴	
سطر پنجم	۹۷۹۹۴۴	
سطر ششم = (مقسوم‌علیه)×۷	۸۷۸۳۱۱	
سطر هفتم	۱۰۱۶۳۳۱	
سطر هشتم	۱۰۰۳۷۸۴	
سطر نهم	۱۲۵۴۷۳	
سطر دهم	۱۲۵۴۷۳	

توجه کنید که بین همهٔ مضربهای D فقط $D \times ۵$ (با سطر سوم مقایسه کنید) رقم سوم از سمت راستش ۷ است. پس ۵ = :. همچنین نتیجه می‌شود JKLMNO = ۶۲۷۳۶۵ و ABVCDE = ۷۳۷۵۴۲. پس می‌توانیم نمودار را چنین بنویسیم

	۷۳۷۵۴۲۸۴۱۳	۱۲۵۴۷۳
	۶۲۷۳۶۵	۵۸۷۸۱
سطر سوم	۱۱۰۱۷۷۸	
سطر چهارم	۱۰۰۳۷۸۴	
سطر پنجم	۹۷۹۹۴۴	
سطر ششم = (مقسوم‌علیه)×۷	۸۷۸۳۱۱	
سطر هفتم	۱۰۱۶۳۳۱	
سطر هشتم	۱۰۰۳۷۸۴	
سطر نهم	۱۲۵۴۷۳	
سطر دهم	۱۲۵۴۷۳	

اکنون امتحان کنید که همهٔ مراحل تقسیم درست است. مرور مراحل راه‌حل نشان می‌دهد که همهٔ رقمها به‌طور یکتا تعیین شده‌اند. □

۵.۴ شگفتیها

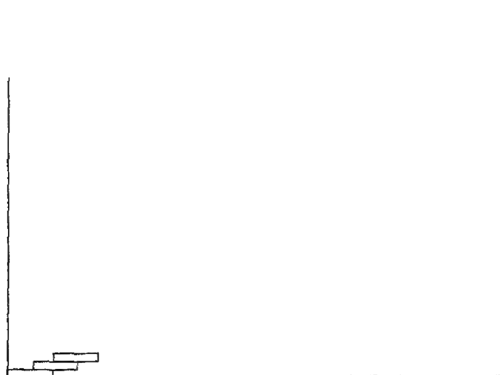
مسأله‌هایی هست که بسیاری، حتی مسأله حل‌کن‌های ماهر هم آنها را چرند می‌انگارند. قبلاً شمه‌ای از این مسأله‌ها را دیده‌ایم. در مسألهٔ ۴.۲.۳ دیدیم که اگر ۲۳ نفر در اتاقی باشند احتمال اینکه دو نفر یک روز تولد داشته باشند بیشتر از ۰٫۵ است. در مسألهٔ ۸.۱.۳ دیدیم که اگر ۵۲ کارت به سه دسته تقسیم شوند احتمال اینکه یکی از سه کارت رویی ۱۱، ۱۲ یا ۱۳ باشد بیشتر از ۰٫۵ است. در این بخش چند مسأله و پدیدهٔ دیگر را که چنین ماهیتی دارند بررسی می‌کنیم.

مسألهٔ ۱.۵.۴ (حسابان) تعداد زیادی دومینو به ابعاد ۱ اینچ در ۲ اینچ در اختیار دارید. در سالنی به طول ۱۰ فوت کار می‌کنید که سقف ندارد. از یک دیوار شروع می‌کنید، دومینویی را روی زمین می‌گذارید، دومینوی دیگری را روی اولی می‌گذارید (لزومی ندارد روی‌هم باشند) و این کار را ادامه می‌دهید (شکل ۱۳۱). آیا می‌توان این ستون را بدون اینکه بریزد به دیوار روبه‌رو رساند؟

راه‌حل. موضوع فیزیکی مهم در این مسأله این است که اگر jاُمین دومینو به اندازهٔ λ_j اینچ از انتهای $(j-1)$اُمین دومینو بیرون آمده باشد گشتاور ماند jاُمین دومینو چنین است

$$\int_0^{\lambda_j} \rho t\, dt$$

در اینجا ρ چگالی خطی دومینو است. برای ساده شدن محاسبات فرض می‌کنیم ρ برابر با ۱ باشد.



شکل۱۳۱

دراین‌صورت گشتاور ماند jاُمین دومینو $\frac{\lambda_j^2}{2}$ است.

اگر N دومینو را به‌صورتی که در شکل می‌بینید بچینیم، گشتاور ماند کلِّ سیستم چنین می‌شود:

$$M = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{2}$$

[توجه کنید که مجموع را از $j = 2$ شروع کردیم، چون اولین دومینو روی زمین قرار دارد و گشتاوری که به این مسأله مربوط باشد ندارد.]

فرض کنید c عدد ثابت مثبتی باشد. λ_2 را $\frac{c}{2}$، λ_3 را $\frac{c}{3}$ و به‌طور کلی λ_j را $\frac{c}{j}$ می‌گیریم. دراین‌صورت

$$M = \sum_{j=2}^{N} \frac{(c/j)^2}{2} = \frac{c^2}{2} \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j^2}$$

می‌دانیم که این مجموع به عددی متناهی وابسته به پارامتر c ولی مستقل از N همگراست. اما مجموع طولهایی از دومینوها که از دومینوهای قبلی بیرون آمده‌اند برابر است با

$$L = \sum_{j=2}^{N} \lambda_j = \sum_{j=2}^{N} \frac{c}{j} = c \cdot \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j}$$

وقتی N بزرگ و بزرگتر می‌شود این مجموع بی‌حد و مرز بزرگ می‌شود.

اگر c عدد مثبت کوچکی باشد می‌توانیم گشتاور ماند را به اندازهٔ دلخواه کوچک کنیم؛ مطمئناً می‌توانیم c را آنقدر کوچک بگیریم که دومینوها نیفتند. ولی چون مجموع L بدون حد بزرگ می‌شود، می‌توانیم ستون دومینوها را در سمت راست تا هرکجا که بخواهیم ادامه دهیم.

جواب مسأله «بله» است؛ ستون دومینوها را می‌توان به دیوار روبه‌رو در فاصلهٔ ۱۰ فوتی رساند. □

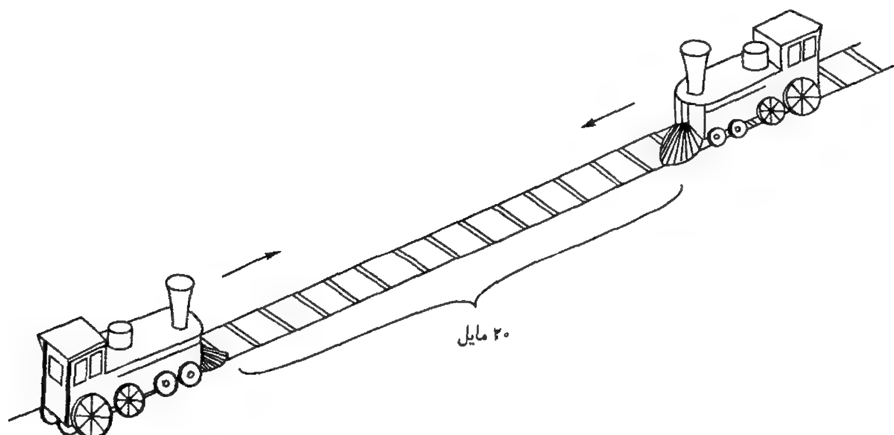
مسألهٔ پیکارجوی ۲.۵.۴ (این مسأله کمی بغرنج است) در مسألهٔ قبل تخمین بزنید که چند دومینو برای رسیدن به دیوار روبه‌رو لازم است. [راهنمایی: عدد مطلوب بسیار بزرگ است. ممکن است لازم

باشد از کامپیوتر به‌عنوان ابزار آزمایش استفاده کنید.]

مسألهٔ بعد پاسخ شگفت‌انگیزی ندارد، ولی راه‌حلش شگفتیهایی در بردارد.

مسألهٔ ۳.۵.۴ دو لوکوموتیو مانند شکل ۱۳۲ به طرف هم نزدیک می‌شوند. فاصلهٔ آنها از هم ۲۰ مایل است و هریک با سرعت ۱۰ مایل بر ساعت حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که دو لوکوموتیو شروع به حرکت می‌کنند مگسی از جلو یکی بلند می‌شود و با سرعت ۱۵ مایل بر ساعت به طرف لوکوموتیو دوم پرواز می‌کند. وقتی به جلو لوکوموتیو دوم می‌رسد بی‌درنگ برمی‌گردد و به طرف لوکوموتیو اول پرواز می‌کند. مگس آنقدر این حرکت رفت و برگشت را تکرار می‌کند تا وقتی که دو لوکوموتیو به هم می‌رسند بین آنها لِه می‌شود.

کلِّ مسافتی که مگس تا رسیدن دو لوکوموتیو به هم پیموده است چقدر است؟



شکل۱۳۲

این مسأله یکی از مسأله‌های مشهور است و دست‌کم پنجاه سال اینجا و آنجا به‌عنوان معما مطرح شده است. وقتی این مسأله را برای جان فون نویمان، یکی از باهوشترین و همه فن‌حریف‌ترین دانشمندان و مسأله حل‌کن‌های این قرن (یا همهٔ قرون)، طرح کردند پس از چند ثانیه جواب آن را داد. او بعداً فاش ساخت که درواقع مجموع فاصله‌هایی را که مگس در حرکتهای رفت و برگشتی پیموده حساب کرده است. ما در اینجا راه‌حلی عرضه می‌کنیم که با اهداف این کتاب بیشتر همخوانی دارد: سخت‌کوشی مهم است و جایگاه خود را دارد، ولی گاهی ایده‌ای زیبا جلو زحمت زیادی را می‌گیرد.

راه‌حل. هریک از دو لوکوموتیو تا لحظهٔ تصادف چه مسافتی می‌پیماید؟ جواب ساده است؛ چون فاصلهٔ آنها از هم ۲۰ مایل است و هریک با سرعت ۱۰ مایل بر ساعت حرکت می‌کند، پس هر لوکوموتیو تا لحظهٔ تصادف ۱۰ مایل می‌پیماید و هریک از آنها یک ساعت در راه است. مگس در طول این یک ساعت ۱۵ مایل می‌پیماید. □

مسألهٔ ۴.۵.۴ نواری فولادی را تصور کنید که محکم دور استوای زمین بسته شده باشد. طول چنین نواری حدود ۲۵۰۰۰ مایل است. اکنون فرض کنید این نوار را فقط به اندازه‌ای که به‌طور یکنواخت در فاصلهٔ ۱ فوت از سطح زمین باشد طولانی‌تر کنیم (البته سطح زمین را بدون پستی و بلندی فرض می‌کنیم). اکنون طول نوار چقدر است؟ [برای حل این مسأله فرض کنید زمین کاملاً کروی است و نوار فولادی در هر دو حالت دایره‌ای می‌سازد.]

راه‌حل. به‌نظر می‌آید که برای بلند کردن این نوار از سطح زمین فقط به اندازهٔ نیم اینچ، باید طول نوار را چندین مایل اضافه کنیم. راه‌حلی که اکنون می‌خوانید تفاوت بین شهود و اندیشهٔ تحلیلی را نشان می‌دهد. شهود جای خود را دارد، ولی فقط راهنمایی به سوی راه‌حل است.

شعاع زمین را در استوا R (برحسب فوت) و محیط دایرهٔ استوا را C می‌گیریم. دراین‌صورت، $C = ۲\pi R$. اکنون می‌خواهیم شعاع را ۱ فوت افزایش می‌دهیم، یعنی به‌جای R بگذاریم R' به‌طوری‌که $R' = R + ۱$. محیط جدید را C' بنامید. دراین‌صورت، $C' - C$ طولی است که باید به نوار فولادی اضافه شود تا نوار ۱ فوت بالای سطح زمین قرار گیرد.

توجه می‌کنیم که

$$C' = ۲\pi R' = ۲\pi(R + ۱) = ۲\pi R + ۲\pi$$

پس $C' - C = ۲\pi$. نتیجه می‌گیریم که باید ۲π فوت، یعنی حدود ۶٫۲۸۳۱۸ فوت، طول نوار را افزایش دهیم تا نوار برای هدف ما مناسب باشد. □

مسألهٔ پیکارجوی ۵.۵.۴ برای سادگی کار تصور کنید که سطح زمین کره است. تصور کنید که سطح زمین با لایه‌ای کروی از جنس پلاستیک پوشیده شده است. چند فوت مربع پلاستیک باید به این لایه اضافه کنیم تا ۱ فوت بالای سطح زمین قرار گیرد؟ [راهنمایی: می‌توانید شعاع زمین را ۴۰۰۰ مایل بگیرید.]

مسألهٔ پیکارجوی ۶.۵.۴ (این مسأله کمی بغرنج است) گوی واحد در فضای اقلیدسی N بعدی، $\mathbb{R}^N$، مجموعهٔ زیر است:

$$\{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leqslant ۱\}$$

حجم گوی واحد را V_N بگیرید. ثابت کنید وقتی $N \to \infty$، $V_N \to ۰$.

آیا در مورد مساحت سطح کرهٔ واحد در $\mathbb{R}^N$ هم می‌توان همین را گفت؟

مسألهٔ پیکارجوی ۷.۵.۴ (این مسأله ساده‌تر است) V_N را مانند مسألهٔ پیکارجوی قبل بگیرید. توضیح دهید که چرا وقتی N بزرگ می‌شود حجم گوی واحد بیشتر و بیشتر نزدیک سطح خارجی کره می‌شود.

تمرین فصل ۴

۱. مسأله‌های حسابی ـ رمزی زیر را حل کنید. در هر مسأله حرفهای مختلف نشانهٔ رقمهای مختلف و حرفهای یکسان نشانهٔ رقمهای یکسان‌اند.

الف)

$$\begin{array}{r} DONALD \\ +\ GERALD \\ \hline ROBERT \end{array}$$

ب)

$$\begin{array}{r} WRONG \\ +\ WRONG \\ \hline RIGHT \end{array}$$

ج)

$$\begin{array}{r} SEVEN \\ +\ EIGHT \\ \hline TWELVE \end{array}$$

د)

$$\begin{array}{r} ONE \\ +\ ONE \\ \hline TWO \end{array}$$

هـ)

$$\begin{array}{r} ONE \\ +\ FOUR \\ \hline FIVE \end{array}$$

و)

$$\begin{array}{r} ABC \\ +\ DEF \\ \hline GHI \end{array}$$

ز)

$$\begin{array}{r} GDA \\ +\ HEB \\ \hline IFC \end{array}$$

ح) $(ATOM)^{\frac{1}{2}} = A + TO + M$

ط) $AB \times CDE = FGHI$

۲. در هریک از مسأله‌های حسابی ـ رمزی زیر، xهای مختلف نشانهٔ رقمهای مختلف‌اند. به بیان دیگر، هیچ رقمی (برای جانشینی x) را نمی‌توان دوبار در یک مسأله به‌کار برد. همچنین باید تعیین کنید که در هر مسأله چه عمل حسابی انجام شده است.

الف)

```
  x x x
    x x
x x x x ۱
```

ب)

```
    x x ۲
      x x
x x x x x
```

ج)

```
    x x x
      x x
x x x ۸ x
```

د)

```
  ۲ x x
    x x
x x x x
```

ه)

```
  ۶ x x
  x x x
x x x x
```

۳. روز سال نو بیشتر به شنبه می‌افتد یا یکشنبه؟

۴. سی‌اُمین روز ماه بیشتر به کدام روز هفته می‌افتد؟

۵. بازی‌یی توسط دو بازیکن روی میز مستطیلی تختی صورت می‌گیرد. بازیکنان به نوبت سکه‌هایی هم‌اندازه را روی میز می‌گذارند. سکه‌ها را باید طوری روی میز گذاشت که تخت باشند، روی‌هم نباشند و از لبه‌های میز بیرون نزنند. برنده کسی است که آخرین سکه را روی میز بگذارد. راه‌کاری پیشنهاد کنید که بازیکن اول با آن همیشه برنده باشد.

۶. در قطار نیویورک به واشنگتن سه مسافر به نامهای اسمیت، براون و پیستیلگاگلیونی بین مسافران هستند. اتفاقاً نام خانوادگی مهندس، مدیر و پیشخدمت قطار هم اسمیت، براون و پیستیلگاگلیونی (البته نه لزوماً به همین ترتیب) است. همچنین می‌دانیم که:

۱. اسمیتِ مسافر در نیویورک زندگی می‌کند.

۲. مدیر قطار در نیمه راه بین نیویورک و واشنگتن زندگی می‌کند.

۳. مسافری که هم‌نام مدیر قطار است در واشنگتن زندگی می‌کند.

۴. مسافری که خانه‌اش از همه به خانهٔ مدیر نزدیکتر است ماهانه سه برابر مدیر درامد دارد.

۵. براونِ مسافر ماهی ۲۰۰۰ دلار درامد دارد.

۶. پیستیلگاگلیونیِ خدمهٔ قطار اخیراً پیشخدمت را در مسابقه‌ای شکست داده است. نام خانوادگی مهندس قطار چیست؟

۷. [این مسأله از اسکریپتا ماتمتیکا برداشته شده است.]

روزی در مدرسه کیف معلمی را دزدیدند. براساس شواهد به‌دست آمده، پنج نفر به نامهای A، B، C، D و E متهم می‌شوند. این پنج نفر چنین می‌گویند:

A: من کیفی برنداشتم. من هیچ‌وقت دزدی نکرده‌ام. کارِ **D** بود.

B: من کیفی برنداشتم. پدرم خیلی ثروتمند است و من خودم کیف دارم. **E** می‌داند دزد کیست.

C: من کیفی برنداشتم. من قبل از شروع سال تحصیلی **E** را نمی‌شناختم. کارِ **D** بود.

D: من این کار را نکردم. کارِ **E** بود. **A** دروغ می‌گوید که من کیف را دزدیده‌ام.

E: من کیفی برنداشتم. **B** کیف را برداشت. **C** حرف من را تأیید می‌کند، چون سالهاست مرا می‌شناسد.

بعداً اولیای مدرسه با تطمیع توانستند از این پنج نفر اعتراف بگیرند که هریک از آنها دو جملهٔ راست و یک جملهٔ دروغ گفته است. چه کسی کیف را دزدیده است؟

۸. در مسأله‌های حسابی ـ رمزی زیر حروف یکسان یک رقم را نشان می‌دهند و حروف متفاوت برای نمایش رقمهای متفاوت به‌کار رفته‌اند و * ممکن است هر رقمی باشد. این مسأله‌ها را حل کنید.

الف)

```
        A T O M
        A T O M
        -------
      * * * * *
    * * * * *
  * * * * *
* * * * *
---------------
* * * * A T O M
```

ب)

```
      A B C
      B A C
      -----
    * * * *
    * * A
* * * B
-----------
* * * * * *
```

ج)

```
DO + RE = MI;
FA + SI = LA;
RE + SI + LA = SOL
```

۹. دانش‌آموزان مدرسه‌ای را به اردو برده‌اند. قرار است فردا سه نفر دیگر به نامهای وینکن، بلینکن و ناد به اردو بیایند. نام کوچک این سه نفر بلوتزکی، شموتزکی و پلوتزکی، ولی نه لزوماً به همین ترتیب، است.

یکی از دانش‌آموزان به مربی اردو می‌گوید که به‌نظرش وینکن نام خانوادگیِ بلوتزکی است. مربی گوشزد می‌کند که نظر او درست نیست و چنین راهنمایی می‌کند:

۱. پدرِ ناد برادر مادر شموتزکی است.

۲. شموتزکی در سن ۷ سالگی به کلاس اول رفته است. او امسال کلاس ششم است.

۳. آقای بلینکنِ قصاب، پدربزرگ بلوتزکی است.

۴. بلینکن یک سال بزرگتر از شموتزکی است. بلوتزکی هم یک سال بزرگتر از شموتزکی است.

نام، نام‌خانوادگی و سن هریک از سه دانش‌آموزی را که فردا به اردو می‌آیند تعیین کنید.

۱۰. وقتی به سن فعلی پدرم برسم، سن من ۵ برابر سن فعلی پسرم خواهد بود. ولی در آن موقع سن پسرم ۸ سال بیشتر از سن فعلی من خواهد بود. در حال حاضر مجموع سن من و پدرم ۱۰۰ است. پسرم چند سال دارد؟

۱۱. جای عقربه‌های دقیقه‌شمار و ساعت‌شمار ساعتی را عوض کنید. این ساعت در طول شبانه‌روز چند زمان مختلف را درست نشان می‌دهد؟

۱۲. اولین روز قرن به چه روزهایی از هفته ممکن است بیفتد؟

۱۳. در بازی شطرنج، اسب حرکتی L شکل دارد: یا دو خانهٔ افقی و یک خانه به پایین یا بالا؛ یا یک خانهٔ افقی و دو خانه به پایین یا بالا. اگر حرکت اسب از گوشهٔ پایین سمت چپ صفحه شروع شود، چند حرکت لازم است تا در هریک از ۶۴ خانهٔ صفحهٔ شطرنج دست‌کم یک بار بنشیند؟

۱۴. درکشو میزی قدیمی تکه کاغذی پیدا شد. مطمئناً این تکه کاغذ صورت‌حساب است چون روی آن نوشته‌اند

۲۴ بوقلمون   ۶۷ * دلار و * ۹سنت

اولین رقم و آخرین رقم قیمت بر اثر مرور زمان پاک شده‌اند و ما به جای این دو رقم * گذاشته‌ایم. دو رقم پاک‌شده و قیمت هر بوقلمون چقدر است؟

۱۵. با سکه‌های ۱سنتی، ۵سنتی، ۱۰سنتی و ۲۵سنتی به چند طریق می‌توان ۵۰ سنت پرداخت؟ به چند طریق می‌توان ۱ دلار پرداخت (هر دلار ۱۰۰ سنت است)؟ به چند طریق می‌توان k دلار پرداخت؟

۱۶. چهار دوست می‌خواهند به گردش درکوههای اطراف شهر بروند. هریک از آنها دخترکوچک خود را هم همراه می‌آورد. هوا بسیارگرم است و این هشت نفر تعداد زیادی نوشابه می‌نوشند. سِلما ۲ نوشابه، هایاکنیت ۳ نوشابه، لوسیندا ۴ نوشابه و میرتل ۵ نوشابه نوشیده است. آقای مرگتروید به اندازهٔ دخترش نوشابه نوشیده است. ولی آقای آهنهوتپ دو برابر دخترش نوشابه نوشیده

است. آقای آتاتورک سه برابر دخترش و آقای هِرکیمر چهار برابر دخترش نوشابه نوشیده است. این هشت نفر کلاً ۴۴ بطری نوشابه مصرف کرده‌اند. نام خانوادگی هریک از چهار دختر چیست؟

۱۷. سام از دوستش ایروینگ پرسید «چند بچه داری و هرکدام از آنها چند سال دارد؟»
دوستش پاسخ داد «سه پسر دارم. حاصل‌ضرب سنشان ۷۲ است و مجموع سنشان شمارهٔ خیابانی است که در آن زندگی می‌کنیم». سام شمارهٔ خیابان را دید و گفت این مسأله مبهم است. دوستش گفت «بله مبهم است. ولی به هر حال امیدوارم روزی پسر بزرگم در تیم فوتبال دانشگاه بازی کند.»
سن هریک از سه پسر چقدر است؟

۱۸. آیا راه‌کار بردی برای بازیکن اول در بازی X-O وجود دارد؟ آیا می‌توانید طوری قواعد بازی را اصلاح کنید که راه‌کار بردی برای بازیکن اول وجود داشته باشد.

۱۹. به تمرین ۱۸ توجه کنید. ثابت کنید که اگر بازیکن اول در حرکت اول مربع مرکزی را نگیرد، بازیکن دوم می‌تواند بازی را به تساوی بکشد.

۲۰. شاید در بعضی نمایشها دیده باشید که کسی تعدادی توپ را به‌طور متناوب به هوا می‌اندازد و می‌گیرد. او هر توپ را ابتدا با دست چپ و سپس با دست راست پرتاب می‌کند و این چرخه تکرار می‌شود. توپی را که با دست چپ پرتاب کرده باشد با دست راست می‌گیرد، و برعکس. توضیح دهید که چرا در چنین نمایشهایی همیشه از ۳ یا ۵ توپ استفاده می‌شود. مسألهٔ زوجیتی که در اینجا مطرح است چیست؟

۲۱. مسألهٔ (یا خانوادهٔ مسأله‌های) فروشندهٔ دوره‌گرد شبیه بازی است ولی کاربردهای مهمی در تجارت، طراحی مدار و شاخه‌های دیگر فعالیت بشری دارد. اخیراً کاربردهای چشمگیری نیز در آنالیز مختلط یافته است.

فرض بر این است که فروشنده‌ای باید از محل کار خود حرکت کند و به k شهر برود. هزینهٔ اقامت در هر شهر، هزینهٔ سفر از هر شهر به هر شهر دیگر، یا هزینهٔ سفر از شهر محل سکونت به هریک از شهرها یا هزینهٔ سفر از هر شهر به شهر محل سکونت فروشنده را می‌دانیم. مسأله یافتن کم‌هزینه‌ترین مسیر است.

درواقع مسألهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد هنوز کامل حل نشده است و ما هم نمی‌خواهیم که شما حلش کنید. می‌خواهیم با اطلاعات بند قبل تعیین کنید که فروشنده از چند مسیر متفاوت می‌تواند سفر کند به‌طوری که از هر شهر دقیقاً یک‌بار بگذرد و نهایتاً به شهر خود برگردد.

۲۲. به مسألهٔ ۲۱ توجه کنید. فرض کنید فروشنده فقط به سه شهر باید سفر کند و سفر به شهر C_1 یا سفر از C_1 به شهر محل سکونت گرانتر از سفر به شهرهای C_2 و C_3 یا سفر از این دو شهر به شهر محل سکونت فروشنده است. بهترین راه‌کار برای فروشنده چیست؟

۲۳. به مسألهٔ ۲۱ توجه کنید. برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید که همهٔ داده‌های مربوط به سفر فروشنده را بگیرد و بهترین مسیر را حساب کند.

۲۴. بازی‌یی دو بازیکن دارد. بازیکن اول عددی (طبیعی) از ۱ تا ۱۰ می‌نویسد. بازیکن دوم عددی از ۱ تا ۱۰ می‌نویسد و دو عدد را با هم جمع می‌کند. بازیکن اول دوباره عددی از ۱ تا ۱۰ می‌نویسد و آن را با مجموع دو عدد قبلی جمع می‌کند. دو بازیکن یکی در میان این کار را تکرار می‌کنند.
هر بازیکنی که عددی بنویسد به‌طوری‌که مجموع دقیقاً ۱۰۰ شود برنده است. راه‌کار بردی برای بازیکن اول طراحی کنید. راه‌کار بردی برای بازیکن دوم طراحی کنید.

۲۵. اخیراً به دوستی نامه نوشتم. او جواب داد «امکان ندارد کمتر از این با تو عدم توافق داشته باشم». جملهٔ ساده‌ای بنویسید که منظور او را برساند.

۲۶. ده نفر دور میز گردی نشسته‌اند. ۱۰ دلار باید بین آنها تقسیم شود به‌طوری‌که هر کدام میانگین پولی را که دو نفر مجاورش می‌گیرند بگیرد. به چند طریق متفاوت می‌توان این کار را انجام داد؟

۲۷. سن ناخدای کشتی‌یی A، تعداد فرزندانش C، و طول کشتی او ℓ است. می‌دانیم که
الف) $A \cdot C \cdot \ell = ۳۲۱۱۸$؛
ب) ℓ بیشتر از ۱ فوت است؛
ج) ناخدا هم دختر دارد و هم پسر؛
د) $۱۰۰ > A > C$.
مقدار A، C و ℓ را تعیین کنید.

۲۸. در مسأله‌های حسابی ـ رمزی زیر، حروف یکسان نشانهٔ رقمهای یکسان و حروف متفاوت نشانهٔ رقمهای متفاوت‌اند. * ممکن است هر رقمی باشد. این مسأله‌ها را حل کنید.

الف)

```
FEARS | SHE
***     THE
****
TALK
****
****
```

ب)

```
RABBIT | RUN
****     RUN
 ****
 PUMA
  ****
  GRAB
     **
```

ج)

```
BUBBLE |GUM
 *C**   GUM
 ----
  *L**
   *U*
  ----
   **E*
   ****
  ----
```

د)

```
        Y  E  S
        Y  E  S
  -------------
     *  *  *  *
  S  O  R  T
*  *  O  F
  -------------
S  Q  U  A  R  E
```

ه)

```
        C  A  N
        C  A  N
     ----------
     *  *  *  *
  *  F  O  R
*  *  *  *
---------------
F  R  O  L  I  C
```

و)

```
      E  R  R  O  R
               O  R
     --------------
   *  *  *  A  *  *
*  *  *  *  *  *
-------------------
M  I  S  T  A  K  E
```

۲۹. می‌دانیم که در ساعت ۱۲ عقربه‌های ساعت بر هم منطبق می‌شوند. زمان بعدی که عقربه‌های ساعت بر هم منطبق می‌شوند چیست؟ زمان بعد از آن که باز هم عقربه‌های ساعت بر هم منطبق می‌شوند چیست؟

۳۰. تابع f از عددهای حقیقی به عددهای حقیقی در معادلهٔ

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

صدق می‌کند. اگر بدانیم که $f(۱) = ۱$، $f\left(\frac{۱}{۲}\right)$ را تعیین کنید.

۳۱. مسألهٔ حسابی ـ رمزی زیر (از ر. ج. لنکستر) را حل کنید:

$$\mathrm{NUDE} + \mathrm{NOT} + \mathrm{RUDE} + \mathrm{NOR} = \mathrm{CRUDE}$$

۳۲. مسألهٔ حسابی ـ رمزی زیر (از آلن وین) را حل کنید:

$$\mathrm{AYE} + \mathrm{AYE} + \mathrm{AYE} + \mathrm{AYE} = \mathrm{YES} + \mathrm{YES} + \mathrm{YES}$$

۳۳. دو قایق مستقیم به طرف هم حرکت می‌کنند. سرعت یکی ۱۲ مایل بر ساعت و سرعت دیگری ۱۷ مایل بر ساعت است. دو قایق در شروع حرکت ۲۰ مایل از هم فاصله داشته‌اند. فاصلهٔ آنها از هم یک دقیقه پیش از تصادف چقدر است؟ [این مسأله را ذهنی و درکمتر از یک دقیقه حل کنید.]

۳۴. عددی سه رقمی درنظر بگیرید. این عدد را روی تکه کاغذی بنویسید. همان عدد را دوباره کنار عددی که نوشته‌اید بنویسید. به این ترتیب عددی شش رقمی، مثل ۴۷۹۴۷۹، روی کاغذ نوشته‌اید.
این عدد شش رقمی را بر ۷ تقسیم کنید. باقیمانده صفر است. خارج‌قسمت را بر ۱۱ تقسیم کنید. باز هم باقیمانده صفر است. خارج‌قسمت به‌دست آمده را بر ۱۳ تقسیم کنید. باز هم باقیمانده صفر است. خارج‌قسمت همان عدد سه رقمی است که ابتدا انتخاب کرده بودید. چرا چنین است؟

۳۵. در ظرفی آب و در ظرف دیگر اسید ریخته‌ایم. مقدار مایع در هر دو ظرف یکی است و هر ظرف کمی سر خالی است. کمی آب در ظرف اسید می‌ریزیم و خوب هم می‌زنیم و سپس همان مقدار از مخلوط را در ظرف آب می‌ریزیم. اکنون اسید درصدی آب و آب هم درصدی اسید دارد. درصد ناخالصی کدام ظرف بیشتر است؟

۳۶. در مسألهٔ قبل فرض کنید دوباره مقداری از محتوای ظرف آب را در ظرف اسید بریزیم، مخلوط را خوب هم بزنیم، همان مقدار از این مخلوط را به ظرف آب برگردانیم، محتوای ظرف آب را خوب هم بزنیم و این کار را تکرار کنیم. آیا ممکن است با تکرار این کار به دفعات متناهی به جایی برسیم که مقدار اسید در هر دو ظرف یکی باشد؟

۳۷. برتراند راسل، فیلسوف و ریاضیدان بزرگ انگلیسی، ادعا کرد که به سبب بررسی پرسش زیر بود که خود را وقف مطالعهٔ منطق و ریاضیات کرد. تکه‌ای کاغذ بردارید. روی آن بنویسید «جملهٔ پشت این کاغذ دروغ است». پشت کاغذ هم همین جمله را بنویسید. اکنون راست یا دروغ بودن این جمله‌ها را تحلیل کنید.

۳۸. سه نفر در یک ردیف پشت سرهم نشسته‌اند. سومین نفر می‌تواند دو نفری را که جلو او نشسته‌اند ببیند. دومین نفر فقط می‌تواند نفر اول را که جلو او نشسته است ببیند. اولین نفر هیچ کس را نمی‌بیند. هر سه نفر چشمان خود را می‌بندند و روی سر هرکدام کلاهی قرمز یا سیاه می‌گذارند. همهٔ آنها می‌دانند که این کلاهها از جعبه‌ای شامل سه کلاه قرمز و دو کلاه سیاه برداشته شده‌اند.

وقتی که کلاهها را روی سر این سه نفر گذاشتند دو کلاه باقی‌مانده را از جلو دید برمی‌دارند. از نفر سوم می‌پرسند که رنگ کلاهش را می‌داند یا نه. پس از اینکه او جواب داد همین سؤال را از نفر دوم می‌پرسند. پس از اینکه او جواب داد، نفر اول جواب می‌دهد.

این بازی را کامل تحلیل کنید.

۳۹. پال اردوش، ریاضیدان مشهور مجارستانی ([TIE] را ببینید)، می‌گفت وقتی بچه بود دانشمندان می‌گفتند دو بیلیون سال از عمر زمین می‌گذرد؛ ولی اکنون می‌گویند چهاربیلیون سال از عمر زمین می‌گذرد. سپس استدلال می‌کرد که بنابراین خودش دو بیلیون سال عمر دارد. چه اشتباهی در استدلال او هست؟

۴۰. کاسپر گافمنِ ریاضیدان می‌گوید [GOF] هر ریاضیدانی عدد اردوش دارد (تمرین ۳۹ حاوی اطلاعاتی دربارهٔ پال اردوش است). این عدد چنین حساب می‌شود: اگر اردوش هستید عدد اردوش شما صفر است. اگر مقاله‌ای تحقیقی با ریاضیدانی که عدد اردوش او $k-1$ است نوشته باشید عدد اردوش شما k است.

عدد اردوش مؤلف این کتاب ۱ است. این یعنی چه؟ عدد اردوش یکی از ریاضیدانانی را که می‌شناسید تعیین کنید. کوچکترین عدد اردوشِ کسانی که می‌شناسید چند است؟

۴۱. صفحه‌ای شطرنجی را تصور کنید که ابعادش ۴ مربع در ۸ مربع باشد. آیا ممکن است حرکت اسب (مهره‌ای در شطرنج که حرکت L شکل دارد) از خانه‌ای شروع شود، در هر خانهٔ دیگر دقیقاً یک‌بار بنشیند و سرانجام دوباره در همان خانه‌ای که حرکت از آنجا شروع شده است قرار گیرد؟ [راهنمایی: صفحه را به‌گونه‌ای مناسب رنگ‌آمیزی کنید.]

۴۲. به تمرین ۴۱ توجه کنید. صفحه‌ای شطرنجیِ را تصور کنید که هفت مربع در هفت مربع باشد. آیا ممکن است اسب از خانه‌ای شروع به حرکت کند و بعد از ۴۹ حرکت در هر خانهٔ دیگر دقیقاً یک بار نشسته و دوباره به همان خانهٔ شروع حرکت برگشته باشد؟

۴۳. در یکی از قبایل افریقا افراد برای گفتن «بله» سر خود را از چپ به راست حرکت می‌دهند (یعنی همان حرکتی که بین ما در امریکا معنی «نه» می‌دهد). درواقع این حرکت ویژگی افراد این قبیله است؛ در هیچ قبیلهٔ افریقایی دیگری این حرکت به این معنی صورت نمی‌گیرد.

فرض کنید در جنگلهای افریقا گم شده‌اید و با شخصی مواجه می‌شوید که حدس می‌زنید از این قبیله است. از او می‌پرسید که عضو این قبیله هست یا نه. او سرش را از چپ به راست تکان می‌دهد (ولی چیزی نمی‌گوید). چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ چرا؟ آیا می‌توانید سؤال دیگری بپرسید که جوابش (فقط با تکان دادن سر) موضوع را فیصله دهد؟

۴۴. جو، باب و کرلی هنرپیشه‌اند، یکی از آنها همیشه نقش اول فیلم را بازی می‌کند. یکی همیشه نقش شخصیت منفی فیلم را بازی می‌کند. یکی هم نقش دیوانه را بازی می‌کند. در فیلم جدید

شخصیت منفی می‌خواهد نقش اول فیلم را داشته باشد و هنرپیشهٔ نقش اول را هم برای نقش دیوانه درنظر گرفته‌اند. این برای هنرپیشهٔ شخصیت منفی خوب است، چون او می‌داند که هر دو هنرپیشه‌های خوبی‌اند.

ولی هنرپیشهٔ شخصیت منفی به هنرپیشهٔ نقش دیوانه حسودی می‌کند، چون دیوانه پول بیشتری می‌گیرد. اگر باب بیشتر از جو پول بگیرد و کرلی اصلاً باب را نشناسد، کدام‌یک از این سه هنرپیشه نقش اول، کدام‌یک نقش شخصیت منفی و کدام‌یک نقش دیوانه را بازی می‌کند؟

۴۵. بازی مردمی و پرطرفداری در استرالیا رایج است که «دورو» نام دارد. این بازی چنین است: بازیکنی مبلغی شرط می‌بندد و سپس دو سکه را همزمان پرتاب می‌کند (این کار با دستگاهی انجام می‌شود تا پرتاب همزمان دو سکه منصفانه باشد). اگر هر دو سکه شیر بنشینند پرتاب را «شیر» می‌نامند. اگر هر دو سکه خط بنشینند، پرتاب را «خط» می‌نامند. اگر یک سکه شیر و یک سکه خط بنشیند، پرتاب را «شانس» می‌نامند. هدف بازی آوردن سه «شیر» متوالی است به‌طوری‌که هیچ «خط» یا پنج «شانس» متوالی نیاید. بازیکنی که شرط بسته است آنقدر بازی می‌کند تا (الف) «خط» بیاورد (و ببازد)؛ یا (ب) پنج‌بار متوالی «شانس» بیاورد (و ببازد)؛ یا (ج) سه بار متوالی «شیر» بیاورد (و ببرد).

اگر بازیکن ببرد ۷٫۵ به ۱ می‌گیرد و دوباره بازی را ادامه می‌دهد. اگر ببازد مبلغی را که شرط بسته است از دست می‌دهد.

آیا این بازی منصفانه است؟ اگر نیست می‌توانید نسبت برد را طوری اصلاح کنید که بازی منصفانه باشد؟

۴۶. بازی باستانی مورا این‌طور انجام می‌شود: دو بازیکن در بازی شرکت دارند. در یک لحظه هریک از آنها یک، دو یا سه انگشت خود را بلند می‌کند و هر دو همزمان می‌گویند که رقیب چه عددی را نشان داده است. اگر هر دو نفر درست یا هر دو نفر نادرست گفته باشند بازی مساوی می‌شود. اگر یک نفر درست و یک نفر نادرست گفته باشد، کسی که نادرست گفته است باید به اندازهٔ تعداد کلِّ انگشتان نشان داده شده دلار بپردازد. اگر در این بازی شرکت کنید بهترین راه‌کارتان چه خواهد بود؟

۴۷. ۱۳ کارت قرمز، ۱۳ کارت آبی، ۱۳ کارت سبز و ۱۳ کارت سفید را که کارتهای هر رنگ از ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند خوب درهم می‌کنیم. سپس به چهار نفر هریک ۱۳ کارت می‌دهیم. احتمال اینکه دست‌کم یک نفر کارتی با شمارهٔ بزرگتر از ۱۰ نداشته باشد چقدر است؟

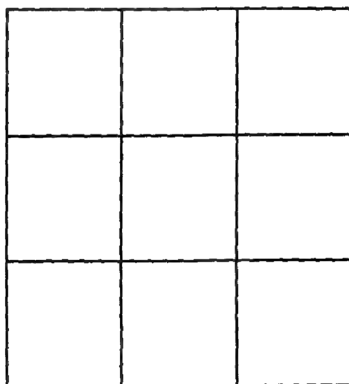
۵

ریاضیات در سرگرمیها

۱.۵ مربعهای وفقی و ایده‌های مرتبط با آن

مربع وفقی شکلها و گونه‌های مختلفی دارد. بررسی مربعهای وفقی را با یکی از ساده‌ترین گونه‌های آن شروع می‌کنیم.

مسألهٔ ۱.۱.۵ آرایه‌ای ۳ × ۳ از مربعها را مانند شکل ۱۳۳ درنظر بگیرید. باید عددهای طبیعی از ۱ تا ۹ را طوری در این مربعها بنویسیم که در هر مربع یک عدد باشد و مجموع عددهای هر سطر و هر ستون یکی باشد.



شکل۱۳۳

راه‌حل. ابتدا تعیین می‌کنیم مجموع مشترک، که آن را S می‌نامیم، چه باید باشد. اگر عددهای هر سه سطر را با هم جمع کنیم، عدد حاصل سه برابر S می‌شود. از طرف دیگر، هر یک از عددهای از ۱ تا ۹

	۵	
۴	۹	۲
	۱	

شکل۱۳۴

را یک‌بار به‌حساب آورده‌ایم. پس

$$۳S = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۹$$

با استفاده از فرمول مجموع عددهای طبیعی متوالی معادلهٔ بالا را چنین می‌نویسیم:

$$۳S = \frac{۹ \times ۱۰}{۲}$$

این معادله را برحسب S حل می‌کنیم و S را برابر با ۱۵ به‌دست می‌آوریم. پس باید عددهای از ۱ تا ۹ را طوری در مربعها قرار دهیم که مجموع هر سطر و مجموع هر ستون ۱۵ شود.

اغلب شروع کار با مقدار اکسترم راهگشاست؛ پس ۹ را در مربع مرکزی می‌نویسیم. با این کار محدودیت زیادی برای عددهایی که می‌توانیم در سمت چپ و راست ۹، یا در بالا و پایین ۹ بنویسیم ایجاد می‌کنیم. فقط گزینه‌های ۵ + ۱، ۴ + ۲ و ۳ + ۳ را داریم. گزینهٔ سوم به کارمان نمی‌آید، چون فقط یک‌بار می‌توانیم ۳ را به‌کار ببریم. پس ۴ و ۲ را در سمت چپ و سمت راست ۹، و ۵ و ۱ را در بالا و پایین ۹ می‌نویسیم. اکنون جدول مانند شکل ۱۳۴ است.

۳ را نمی‌توانیم در سطر پایین بنویسیم، چون ۳ + ۱ خیلی کوچک است و عددی نداریم که با آن جمع شود تا ۱۵ به‌دست آید. پس ۳ را در سطر بالا می‌نویسیم؛ البته با همین استدلال، ۳ را باید در مربع سمت چپ سطر اول بنویسیم. اکنون اجباراً باید ۷ را در مربع سمت راست سطر اول، سپس ۶ را در مربع سمت راست سطر سوم و بعد ۸ را در مربع سمت چپ سطر سوم بنویسیم.

با محاسبهٔ مجموع عددهای هر یک از سه سطر و مجموع عددهای هر یک از سه ستون می‌بینیم که اولین مربع وفقیمان را ساخته‌ایم. □

در بهترین شکلِ مربعهای وفقی، علاوه بر اینکه مجموع سطرها و مجموع ستونها یکی است، مجموع هر قطر نیز همان عدد است. شکل ۱۳۵ مربع وفقی ۳ × ۳ای را نشان می‌دهد که این ویژگی را دارد. چگونه باید چنین مربع وفقی‌یی را پیدا کنیم؟ یک راهِ همیشه باز آزمون و خطاست. به‌جای اینکه

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

شکل۱۳۵

در مربع مرکزی ۹ بنویسیم، می‌توانستیم کار را با عدد دیگری شروع کنیم و کار را مانند مثال قبل ادامه دهیم. نُه عدد داریم که می‌توانیم هر یک از آنها را در مربع مرکزی بنویسیم؛ همیشه می‌توان امیدوار بود که یکی از این ۹ آزمایش به موفقیت بینجامد.

وقتی با مربعهای وفقی بزرگتر از ۳ × ۳، مثلاً مربعهای ۵ × ۵ یا ۶ × ۶، سر وکار داریم این‌گونه روالهای اللّه‌بختکی نسبتاً دست وپا گیرند. بهتر است نوعی راه‌کار برای تولید مربعهای وفقی داشته باشیم. ابتدا باید ملاحظاتی انجام دهیم. گاهی وقتی نمی‌دانیم به کجا می‌رویم، فقط در یافتن اینکه چه چیزی می‌توانیم از آنچه در دست داریم بیاموزیم سودمند است.

کار را با مربع وفقی شکل ۱۳۵ شروع می‌کنیم. فرض کنید هر عدد را یک خانه «بالا» ببریم. با این کار سطر پایین خالی می‌شود. در عین حال، سطر بالا از جدول بیرون می‌رود. این سطر را در سطر پایین می‌نویسیم. نتیجه را در شکل ۱۳۶ می‌بینید.

۳	۵	۷
۴	۹	۲
۸	۱	۶

شکل۱۳۶

توجه کنید که باز هم مربعی وفقی با همان عدد وفق ۱۵ حاصل شده است. البته چندان هم تعجب ندارد، چون سطرها را تغییر نداده‌ایم، بلکه فقط جای آنها را با هم عوض کرده‌ایم و در ستونها هم فقط جای عضوها را عوض کرده‌ایم و محتوای ستونها را حفظ کرده‌ایم.

با همین ایده می‌توانیم هر عدد را یک واحد به راست منتقل کنیم. با این کار ستون سمت چپ خالی می‌شود و ستون سمت راست از جدول بیرون می‌رود. پس ستون بیرون افتاده را به جای ستون سمت چپ می‌گذاریم. این کار را امتحان و تحقیق کنید که باز هم مربعی وفقی با همان عدد وفق ۱۵ به‌دست می‌آید.

موفقیت دو تجربهٔ قبل جسارت جابه‌جایی قطری در شکل ۱۳۶ را به ما می‌دهد. مربع کامل شده را در شکل ۱۳۷ می‌بینید. مداد بردارید و با ما همراه شوید. می‌خواهیم در شکل ۱۳۶ هر عدد را یک خانه به راست و یک خانه به بالا منتقل کنیم. مربعهای سطر اول را $a_{۱۱}$ و $a_{۱۲}$ و $a_{۱۳}$، مربعهای سطر دوم را $a_{۲۱}$ و $a_{۲۲}$ و $a_{۲۳}$ و مربعهای سطر سوم را $a_{۳۱}$ و $a_{۳۲}$ و $a_{۳۳}$ می‌نامیم.

ابتدا عددهایی را که جای جدید آنها به‌روشنی معلوم است می‌نویسیم:

$$۴ \rightarrow a_{۱۲}$$
$$۹ \rightarrow a_{۱۳}$$
$$۸ \rightarrow a_{۲۲}$$
$$۱ \rightarrow a_{۲۳}$$

اکنون باید فکری برای عددهای دیگر بکنیم. قبلاً هنگام جابه‌جاییهای چپ-راست یا بالا-پایین از این ایده استفاده کردیم که وانمود کنیم لبهٔ بالا و لبهٔ پایین شکل، یا لبهٔ چپ و لبهٔ راست شکل بر هم منطبق‌اند. اکنون می‌خواهیم ببینیم که باز هم این ایده قابل استفاده است یا نه.

اگر عدد ۳ را یک خانه به راست و یک خانه به بالا منتقل کنیم، ظاهراً از جدول خارج می‌شود؛ ولی اگر وانمود کنیم که لبهٔ بالا و لبهٔ پایین شکل به هم متصل‌اند، ۳ در خانهٔ $a_{۳۲}$ قرار می‌گیرد. به همین ترتیب ۵ به $a_{۳۳}$، ۲ به $a_{۱۱}$ و ۶ به $a_{۲۱}$ منتقل می‌شود. فقط ۷ می‌ماند و جایی باقی نمانده است جز $a_{۳۱}$، پس ۷ به این خانه می‌رود.

آرایهٔ حاصل را که در شکل ۱۳۷ نشان داده شده است بررسی کنید. به آسانی می‌توانید تحقیق کنید که این آرایه هنوز هم مربع وفقی است. پس تاکنون پی‌برده‌ایم که جابه‌جاییهای چپ-راست، جابه‌جاییهای بالا-پایین و جابه‌جاییهای قطری وفقی بودن مربعها را حفظ می‌کنند. آیا ایدهٔ وحدت‌زایی پشت سر این تقارنها هست؟

اگر تکه کاغذ مربع شکلی بردارید و لبه‌های راست و چپش را به هم بچسبانید چه می‌شود؟ اگر نمی‌توانید نتیجه را تصور کنید، این کار را انجام دهید؛ استوانه به‌دست می‌آید. اکنون که لبه‌های چپ و راست کاغذ را به هم چسبانده‌اید، لبه‌های بالا و پایینش را به هم بچسبانید (البته این کار با کاغذ کمی دشوار است، ولی می‌توانید انجامش دهید). چیزی که به‌دست می‌آید سطح دونات یا به اصطلاح

۲	۴	۹
۶	۸	۱
۷	۳	۵

شکل۱۳۷

ریاضیدانان چنبره است. سه عملی که بررسی کردیم، یعنی جابه‌جایی چپ_راست، جابه‌جایی بالا_پایین و حرکت قطری، در چنبره بسیار طبیعی‌اند.

روی چنبره وقتی هر مربع را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم، نگران «بیرون افتادن» نیستیم، چون مرزها را با یکسان‌سازی لبه‌های چپ و راست مربع از بین برده‌ایم. همچنین وقتی مربعها را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم، نگران بیرون افتادن نیستیم، چون مرزها را با یکسان‌سازی لبه‌های بالا و پایین مربع از بین برده‌ایم. عمل جابه‌جایی قطری هم اگر روی چنبره درنظرگرفته شود کمتر مرموز به‌نظر می‌آید.

شاید چنبره جایی طبیعی‌تر برای ساختن مربعهای وفقی باشد. چون به دلخواه می‌توانیم از چپ به راست، از بالا به پایین یا در امتداد قطرها جابه‌جایی انجام دهیم، به‌نظر می‌آید چندان مهم نیست که ساختن مربع وفقی را ازکجا شروع کنیم. به‌نظر می‌آید که همهٔ خانه‌ها هم‌ارزند. اکنون چنبره را با قیچی می‌بریم و دوباره آن را به شکل مربع در می‌آوریم (شکل ۱۳۸).

	۱	

شکل۱۳۸

	۱	
۳		
		۲

شکل ۱۳۹

اکنون ساختن مربع وفقی ۳ × ۳ای را از خانهٔ $a_{۱۲}$ شروع می‌کنیم. در این خانه ۱ می‌نویسیم. هر یک از سطرها و ستونهای شکل سه عضو دارد. پس ۳ «دورهٔ تناوب» طبیعی این مسأله به‌نظر می‌رسد. کار را از $a_{۱۲}$ شروع می‌کنیم و ۱، ۲ و ۳ را قطری می‌نویسیم (نمی‌توانیم ۱، ۲ و ۳ را سطری یا ستونی بنویسیم، چون مجموع آنها ۱۵ نیست). اگر ساختار چنبره را در ذهن داشته باشیم، شکل ۱۳۹ را به‌دست می‌آوریم.

اکنون از دورهٔ تناوب طبیعی استفاده می‌کنیم. ۱، ۲ و ۳ را روی قطری که به بالا و سمت راست امتداد می‌یابد نوشتیم. اکنون قطرهایی را که به بالا و سمت چپ امتداد می‌یابند درنظر می‌گیریم. عددها را با استفاده از دورهٔ تناوب طبیعی ۳ روی چنین قطرهایی می‌نویسیم. ابتدا ۱ را در $a_{۱۲}$ می‌نویسیم، سپس ۴ را در $a_{۳۱}$ و بعد ۷ را در $a_{۲۳}$ می‌نویسیم. سپس ابتدا ۲ را در $a_{۳۳}$ می‌نویسیم، ۵ را در $a_{۲۲}$ و ۸ را در $a_{۱۱}$ می‌نویسیم. سرانجام ابتدا ۳ را در $a_{۲۱}$، ۶ را در $a_{۱۳}$ و ۹ را در $a_{۳۲}$ می‌نویسیم.

کاری که انجام دادیم از لحاظ هندسی معنی دارد، چون مربع را پرکردیم. از لحاظ نظریهٔ اعداد هم معنی دارد، چون همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا ۹ را به‌کار بردیم. از دیدگاه زوجیت هم معنی دارد، چون دورهٔ تناوب طبیعی مسأله، یعنی ۳، را به‌کارگرفتیم. حدس بزنید چه شد؟ مربعی وفقی ساختیم. شکل ۱۴۰ را

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

شکل ۱۴۰

ببینید. توجه کنید که درواقع مربع وفقی ویژه‌ای ساخته‌ایم که مجموع عددهای قطرهایش هم پانزده است.

مسألهٔ ۲.۱.۵ با استفاده از ایده‌هایی که تاکنون بسط داده‌ایم مربع وفقی ۵ × ۵ای بسازید.

راه‌حل. بدون تحلیل بیشتر، صرفاً از همان روشی که در مورد مربع وفقی ۳ × ۳ بسیار کارساز بود تقلید می‌کنیم.

		۱		

شکل ۱۴۱

کار را مانند شکل ۱۴۱ شروع می‌کنیم. جدولی ۵ × ۵ داریم و ۱ را در خانهٔ a_{13}، یعنی وسط سطر بالا، نوشته‌ایم. اکنون عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را روی قطری که به بالا و راست امتداد یافته است می‌نویسیم. شکل ۱۴۲ را ببینید. سپس قطرهایی را که در جهت عکس این قطر، یعنی بالا و چپ،

		۱		
	۵			
۴				
				۳
			۲	

شکل ۱۴۲

۱۰	۱۸	۱	۱۴	۲۲
۱۷	۵	۱۳	۲۱	۹
۴	۱۲	۲۵	۸	۱۶
۱۱	۲۴	۷	۲۰	۳
۲۳	۶	۱۹	۲	۱۵

شکل۱۴۳

امتداد یافته‌اند با عددهایی که دورهٔ تناوب ۵ دارند پر می‌کنیم. مثلاً ابتدا ۱ را در $a_{۱۳}$ می‌نویسیم، ۶ را در $a_{۵۲}$، ۱۱ را در $a_{۴۱}$، ۱۶ را در $a_{۳۵}$ و ۲۱ را در $a_{۲۴}$ می‌نویسیم. قطرهای دیگر را هم به همین‌گونه پر می‌کنیم. نتیجه را در شکل ۱۴۳ می‌بینید.

آرایهٔ شکل ۱۴۳ واقعاً مربعی وفقی است. عدد وفق آن ۶۵ است. در اینجا هم می‌توانستیم به همان شیوه‌ای که عدد وفق ۱۵ را در مسألهٔ ۱.۱.۵ به‌دست آوردیم، عدد وفق ۱۶۵ را پیشگویی می‌کنیم (این کار را به‌عنوان تمرین بکنید). □

مسألهٔ پیکارجوی ۳.۱.۵ الگوریتم ما را برای پر کردن جدولی ۳ × ۳ یا ۵ × ۵ به‌کار گیرید ولی کار را از خانهٔ وسط سطر بالا شروع نکنید. کار را از خانه‌ای دیگر شروع کنید. آیا باز هم مربعی وفقی حاصل می‌شود؟ آیا از نتیجه‌ای که به‌دست آوردید تعجب می‌کنید؟

مسألهٔ پیکارجوی ۴.۱.۵ الگوریتم بالا را برای پر کردن جدولی ۴ × ۴ به‌کار گیرید. کار را از کدام خانه شروع می‌کنید؟ چرا این روش کارساز نیست؟ [باید جواب هندسی بدهید: چنبره را به‌خاطر آورید.] چه تغییری می‌توانید در این روش بدهید تا در حالت ۴ × ۴ هم کارساز باشد؟

معلوم شده است که برای ساختن مربعهای وفقی با ابعاد زوج به فنون کاملاً متفاوتی نیاز داریم. درواقع حتی روشی که برای همهٔ عددهای زوج کارساز باشد نداریم. مثلاً در حالتی که ابعاد مربع مضرب ۴ است فنون خاصی داریم. وقتی که ابعاد مربع مضرب ۶ باشد فنون دیگری به‌کار می‌آید. چون کتاب ما کتابی دربارهٔ مربعهای وفقی نیست، بیش از این وقت صرف این ملغمهٔ شگردهای خاص نمی‌کنیم. خواننده را برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر به [SIM1] ارجاع می‌دهیم.

این بخش را با ذکر چند کلمه دربارهٔ مربعهای وفقی که طول ضلعهایشان مضرب ۴ هستند تمام می‌کنیم. جدول ۴ × ۴ای را مانند شکل ۱۴۴ درنظر بگیرید. عددهای از ۱ تا ۱۶ را به ترتیب طبیعی در این جدول بنویسید: از ۱ تا ۴ در سطر اول، از ۵ تا ۸ در سطر دوم، و غیره (شکل ۱۴۵). هنوز مربعی وفقی نساخته‌ایم! جای هر عددی را که روی یکی از قطرهاست با مکمل آن عدد عوض می‌کنیم. در اینجا منظور از مکمل عدد، عددی است که مجموعش با عدد اول برابر ۱۷ شود. مثلاً مکمل ۶ عدد ۱۱ و مکمل ۴ عدد ۱۳ است. ۶ و ۱۱ را به این دلیل مکمل می‌دانیم که «فاصلهٔ» ۶ از ۱ همان «فاصلهٔ» ۱۱ از ۱۶ است.

شکل۱۴۴

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶

شکل۱۴۵

۱۶	۲	۳	۱۳
۵	۱۱	۱۰	۸
۹	۷	۶	۱۲
۴	۱۴	۱۵	۱

شکل۱۴۶

بعد از تعویض همهٔ عناصر روی قطرها با مکملهای آنها به آرایهٔ شکل ۱۴۶ می‌رسیم که مربعی وفقی است!

مسألهٔ پیکارجوی ۵.۱.۵ روشی را که برای مربع ۴ × ۴ شرح دادیم برای مربع ۸ × ۸ به‌کار گیرید. [راهنمایی: مربع ۸ × ۸ را به قطعه‌های ۴ × ۴ تقسیم کنید و روش مربع ۴ × ۴ را در مورد هر یک از این قطعه‌ها به‌کار گیرید.]

مسألهٔ پیکارجوی ۶.۱.۵ چرا روشی که برای مربعهای ۴ × ۴ و ۸ × ۸ به‌کار گرفتیم کارساز است؟

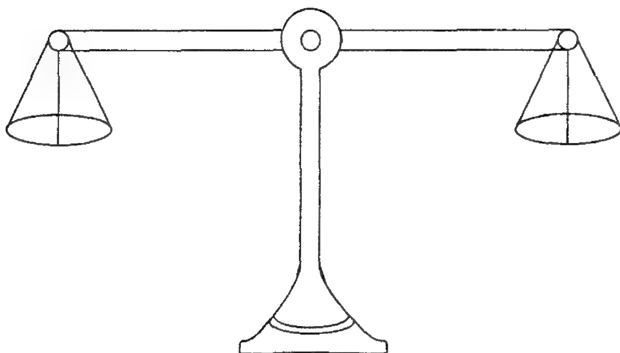
مدت ۱۸۰ سال تصور می‌شد که نمی‌توان با نوشتن عددهای از ۱ تا ۱۰۰ در جدولی ۱۰ × ۱۰ مربعی وفقی ساخت. اکنون می‌دانیم که این کار امکان‌پذیر است. آیا شما می‌توانید چنین مربعی بسازید؟

۲.۵ مسأله‌های مربوط به توزین

این بخش را با آوردن مسأله‌ای کلاسیک دربارهٔ اشیایی که ظاهراً یکسان‌اند ولی درواقع با هم فرق دارند شروع می‌کنیم.

مسألهٔ ۱.۲.۵ فرض کنید ۹ دانه مروارید دارید. همهٔ این مرواریدها به ظاهر یکسان‌اند، ولی وزن یکی از آنها با ۸تای دیگر فرق دارد. نمی‌دانید که مروارید استثنایی سبکتر از بقیه است یا سنگینتر. تنها ابزاری که دارید ترازویی شاهین‌دار (شکل ۱۴۷) است. چگونه می‌توانید فقط با سه بار توزین با این ترازو مروارید استثنایی را از بقیه جدا کنید؟

راه‌حل. توجه کنید که مقایسهٔ وزن یک مروارید با مروارید دیگر تقریباً وقت تلف‌کردن است. اگر ترازو متعادل نشود چه می‌فهمید؟ یکی از آنها مروارید استثنایی است، ولی کدام‌یک؟



شکل۱۴۷

اگر یک مروارید را با مروارید دیگری مقایسه کنید و ببینید هم‌وزن‌اند متوجه می‌شوید که هیچ‌کدام از آنها مروارید استثنایی نیست؛ مروارید استثنایی باید یکی از هفت مروارید دیگر باشد. اکنون دو مروارید دارید که می‌توانید به‌عنوان «محک» از آنها استفاده کنید، ولی هفت مروارید دیگر هست که باید وزن کنید.

به هر حال کار دیگری هم نمی‌توان با ترازوی شاهین‌دار انجام داد. چه باید کرد؟ می‌توانیم با تقسیم کردن ۹ مروارید به سه گروه سه‌تایی استفادهٔ مؤثرتری از تعداد محدود توزینهایمان بکنیم. البته ۳ را به این دلیل انتخاب کردیم که تنها مقسوم‌علیه ۹ است (غیر از ۹ یا ۱). می‌توانیم هر گروه سه‌تایی را یک «اَبَرمروارید» تصور کنیم. سه گروه را G_1، G_2 و G_3 می‌نامیم.

اکنون وزن G_1 را با وزن G_2 مقایسه می‌کنیم.

۱. اگر G_1 و G_2 هم‌وزن باشند، هر شش مروارید گروههای G_1 و G_2 محک‌اند. مروارید استثنایی یکی از مرواریدهای گروه G_3 است.

۲. اگر G_1 و G_2 هم‌وزن نباشند، هر یک از سه مروارید گروه G_3 محک است. مروارید استثنایی یا در G_1 است یا در G_2، ولی نمی‌دانیم در کدام‌یک.

ابتدا حالت ۱ را بررسی می‌کنیم. در مرحلهٔ دوم G_1 و G_3 را مقایسه می‌کنیم. روشن است که این دو هم‌وزن نیستند. G_3 یا سبکتر از G_1 است یا سنگینتر. مثلاً فرض کنید G_3 سنگینتر باشد. پس مروارید استثنایی سنگینتر از مرواریدهای دیگر و در G_3 است. اکنون دو مروارید از گروه G_3 بردارید و آنها را با هم مقایسه کنید. اگر هم‌وزن باشند، مروارید دیگر گروه G_3 مروارید استثنایی است. اگر هم‌وزن نباشند، مروارید سنگینتر مروارید استثنایی است.

اکنون حالت ۲ را بررسی می‌کنیم. توجه می‌کنیم که G_1 سنگینتر است یا G_2 . مثلاً فرض کنید G_1 سنگینتر باشد. اکنون G_1 و G_3 را با هم مقایسه کنید. اگر هم‌وزن باشند مروارید استثنایی در گروه G_2 و سبکتر از بقیه است. دو مروارید از گروه G_2 بردارید و آنها را با هم مقایسه کنید. اگر هم‌وزن باشند مروارید استثنایی مروارید سوم گروه G_2 و سبکتر از بقیه است. اگر هم‌وزن نباشند، مروارید سبکتر مروارید استثنایی است.

اگر G_1 و G_2 هم‌وزن نباشند، تنها امکان این است که G_1 سنگینتر از G_2 باشد (اگر نباشد هیچ دو گروهی از سه گروه هم‌وزن نیستند و این ناممکن است). دراین صورت مروارید استثنایی در G_1 و سنگینتر از بقیهٔ مرواریدهاست. در آخرین مرحله دو مروارید از G_1 بردارید و آنها را با هم مقایسه کنید و مانند حالتهای قبل مروارید استثنایی را تعیین کنید. □

توجه کنید که وقتی فهمیدیم بهترین راه‌کار تقسیم کردن مرواریدها به گروههای سه‌تایی است، مراحل بعدی تقریباً خودبه‌خود انجام شد. اگر مرواریدها را مثلاً به گروههای $\{۲,۲,۵\}$ یا $\{۱,۴,۴\}$ تقسیم کرده بودیم نمی‌دانستیم بعد از مرحلهٔ ۱ چه باید بکنیم.

مسألهٔ ۲.۲.۵ اکنون فرض کنید ۱۲ دانه مروارید دارید که به‌ظاهر همه یکسان‌اند ولی یکی از آنها وزنش با بقیه فرق دارد. نمی‌دانید که مروارید استثنایی سنگینتر از بقیه است یا سبکتر. چند بار توزین برای تعیین مروارید استثنایی لازم است؟

راه‌حل. راه‌حلی که برای مسألهٔ ۱.۲.۵ عرضه کردیم «انعطاف‌ناپذیر» به‌نظر می‌رسد، و تا جایی که استفاده از ایده‌های قبلی مطرح است چنین است. بنابراین اگر بخواهیم مروارید استثنایی را بین ۱۲ مروارید، فقط با سه بار توزین، تعیین کنیم به ایدهٔ جدیدی نیاز داریم.

کار را با استفاده از ایدهٔ «اَبَرمروارید» شروع می‌کنیم. دوازده مروارید را به سه گروه ۴تایی تقسیم کنید. این گروهها را G_1، G_2 و G_3 بنامید. در مرحلهٔ اول G_1 را با G_2 مقایسه کنید.

۱. اگر G_1 و G_2 هم‌وزن باشند، هر هشت مروارید گروههای G_1 و G_2 محک‌اند. مروارید استثنایی یکی از مرواریدهای گروه G_3 است.

۲. اگر G_1 و G_2 هم‌وزن نباشند، هریک از مرواریدهای گروه G_3 محک است. مروارید استثنایی یا درگروه G_1 است یا درگروه G_2، ولی نمی‌دانیم درکدام‌یک.

ابتدا حالت ۱ را (که نسبتاً ساده است) بررسی می‌کنیم. سه مروارید ازگروه G_1 بردارید و آنها را با سه مروارید ازگروه G_3 مقایسه کنید. اگر هم‌وزن باشند، مروارید استثنایی مروارید چهارم گروه G_3 است. با مقایسهٔ این مروارید با یکی از مرواریدهای G_1 معلوم می‌شود که مروارید استثنایی سبکتر از بقیه است یا سنگینتر. اگر سه مروارید G_1 با سه مروارید G_3 هم‌وزن نباشند، مروارید استثنایی یکی از سه مروارید برداشته‌شده از G_3 است و می‌توانیم تشخیص دهیم که سبکتر از بقیه است یا سنگینتر (چون مرواریدهای G_1 محک‌اند). اکنون، طبق معمول، با توزین سوم می‌توانیم مروارید استثنایی را بین سه مروارید برداشته‌شده از G_3 تعیین کنیم.

در حالت ۲ فرض می‌کنیم G_1 سنگینتر و G_2 سبکتر باشد. مرواریدهای G_1 را a، b، c، d و مرواریدهای G_2 را a'، b'، c' و d' می‌نامیم. در توزین دوم $\{a, b, a'\}$ را با $\{c, d, b'\}$ مقایسه می‌کنیم.

الف) اگر این دو هم‌وزن باشند، مروارید استثنایی یکی از مرواریدهای c' و d' (مرواریدهایی از گروه

G_2 که در توزین دوم وارد نکردیم) است. البته c' و d' از گروه سبکترند؛ پس می‌دانیم که مروارید استثنایی سبکتر از بقیه است. در توزین سوم c' را با d' مقایسه می‌کنیم. هرکدام که سبکتر باشد مروارید استثنایی است.

ب) اگر این دو هم‌وزن نباشند، مثلاً فرض کنید $\{a, b, a'\}$ سنگینتر باشد. دراین صورت c و d و بنابراین a' محک‌اند، چون اگر یکی از c و d مروارید استثنایی بود، $\{a, b, a'\}$ بایست سبکتر می‌بود. پس مروارید استثنایی یا a یا b یا b' است. سرانجام a را با b مقایسه می‌کنیم. اگر هم‌وزن باشند، مروارید استثنایی b' و سبکتر از بقیه است. اگر a و b هم‌وزن نباشند، هرکدام سنگینتر باشد مروارید استثنایی است (چون مروارید استثنایی از G_1 است).

ج) حالتی که $\{c, d, b'\}$ سنگینتر باشد درست مانند حالت (ب) تحلیل می‌شود.

□

مسألهٔ پیکارجوی ۳.۲.۵ ثابت کنید که یک مروارید استثنایی بین ۱۳ مروارید را هم می‌توان با سه توزین از بقیه جدا کرد، ولی نمی‌توان تعیین کرد که مروارید استثنایی سنگینتر از بقیه است یا سبکتر.

مسألهٔ پیکارجوی ۴.۲.۵ ثابت کنید که یک مروارید استثنایی بین ۱۴ مروارید را نمی‌توان فقط با سه توزین مشخص کرد.

مسألهٔ ۵.۲.۵ ۸۰ مروارید دارید. یکی سبکتر از بقیه است. مروارید استثنایی را فقط با چهار توزین با ترازوی شاهین‌دار مشخص کنید.

راه‌حل. طبیعی‌ترین کاری که ممکن است انجام دهیم تقسیم ۸۰ مروارید به دو گروه ۴۰تایی و سپس مقایسهٔ وزن این دو گروه است. گروه سبکتر حاوی مروارید استثنایی است. سپس می‌توان این گروه ۴۰تایی را به دو گروه ۲۰تایی تقسیم و آنها را با هم مقایسه کرد. گروه ۲۰تایی سبکتر حاوی مروارید استثنایی است. این شیوه را می‌توان ادامه داد.

اشکال این راه‌کار این است که بعد از چهار توزین ۵ مروارید داریم که مروارید استثنایی یکی از آنهاست. چه اشتباهی کرده‌ایم. از این واقعیت که مروارید استثنایی سبکتر از بقیه است کامل استفاده نکرده‌ایم. می‌توانیم مرواریدها را به سه گروه ۲۷، ۲۷ و ۲۶تایی تقسیم کنیم.

دوگروه ۲۷تایی را با هم مقایسه کنید. اگر هم‌وزن باشند، مروارید استثنایی درگروه ۲۶تایی است. اگر دو گروه ۲۷تایی هم‌وزن نباشند، مروارید استثنایی در گروه سبکتر است. توجه کنید که با یک بار توزین جستجوی مروارید استثنایی را به یک گروه ۲۶ یا ۲۷تایی محدود کردیم، چون از سبکتر بودن مروارید استثنایی استفادهٔ مؤثری کردیم.

در حالت اول (که دو گروه ۲۷تایی هم‌وزن‌اند)، ۲۶ مروارید دیگر را به سه گروه ۹، ۹ و ۸تایی

تقسیم کنید. دو گروه ۹تایی را با هم مقایسه کنید، و کار را مانند قبل ادامه دهید. می‌بینید که بعد از محدود کردن جستجو به گروه ۹تایی، جستجو را به گروهی ۳تایی محدود می‌کنیم و اینجا کار تمام است.

در حالتی که دوگروه ۲۷تایی هم‌وزن نباشند، توجه خود را به گروه ۲۷تایی سبکتر معطوف می‌کنیم. این ۲۷ مروارید را به سه گروه ۹تایی تقسیم و دو تا از این گروههای ۹تایی را با هم مقایسه می‌کنیم. اگر هم‌وزن باشند به گروه ۹تایی سوم می‌پردازیم. اگر هم‌وزن نباشند، گروه ۹تایی سبکتر را بررسی می‌کنیم. سپس جستجو را به گروهی ۳تایی محدود می‌کنیم و باز هم با یک بار توزین دیگر کار تمام است.

مسأله کامل حل شد. □

مسألهٔ ۶.۲.۵ ۲۴ مهره دارید که همه به ظاهر یکسان‌اند. ولی تعدادی از آنها شیشه‌ای‌اند و تعدادی از آنها از کوارتز ساخته شده‌اند. مهره‌های شیشه‌ای سنگینترند. همهٔ مهره‌های شیشه‌ای هم‌وزن‌اند و همهٔ مهره‌های کوارتزی نیز هم‌وزن‌اند. چند بار توزین، با ترازوی شاهین‌دار، برای تعیین تعداد مهره‌های شیشه‌ای و تعداد مهره‌های کوارتزی لازم است؟

راه‌حل. یک راه این است که یک مهره را به‌عنوان «مهرهٔ آزمون» مشخص و همهٔ مهره‌های دیگر را یکی‌یکی با این مهره مقایسه کنیم. مثلاً فرض کنید kامین مهره‌ای که مقایسه می‌کنیم اولین مهره‌ای باشد که با مهرهٔ آزمون هم‌وزن نیست. اگر ابتدا چندین مهره با مهرهٔ آزمون هم‌وزن باشند ولی مهرهٔ kاُم (به‌ازای عددی مانند k) سنگینتر باشد، مهرهٔ kاُم شیشه‌ای است؛ در ضمن، مهرهٔ آزمون و همهٔ مهره‌های تا مهرهٔ $(k-1)$اُم، و خود مهرهٔ $(k-1)$اُم، کوارتزی‌اند. سپس می‌توانیم مهرهٔ $(k+1)$اُم را با مهرهٔ آزمون مقایسه کنیم، سپس مهرهٔ $(k+2)$اُم را با مهرهٔ آزمون مقایسه کنیم، و این مقایسه‌ها را همچنان ادامه دهیم. هر مهره‌ای که سنگینتر از مهرهٔ آزمون باشد شیشه‌ای است و هر مهره‌ای که با مهرهٔ آزمون هم‌وزن باشد کوارتزی است. پس بعد از ۲۳ بار توزین همهٔ مهره‌ها طبقه‌بندی می‌شوند (نیازی نیست، و حتی امکان‌پذیر نیست، که مهرهٔ آزمون را با خودش مقایسه کنیم). توجه کنید که اگر اولین مهره‌ای که با مهرهٔ آزمون هم‌وزن نیست سبکتر از آن باشد، مهرهٔ آزمون کوارتزی است و همهٔ مهره‌های قبلی (و مهرهٔ آزمون) شیشه‌ای‌اند. در این حالت هم به همان نتیجه می‌رسیم.

راه‌حلی که عرضه کردیم هیچ تخیل یا ایده‌ای در برندارد. می‌خواهیم ببینیم می‌توانیم الگوریتم مؤثرتری بیابیم؟ مانند قبل عمل می‌کنیم. دو مهره بردارید و آنها را با هم مقایسه کنید. دو امکان هست:

۱. دو مهره هم‌وزن نیستند. پس یکی (مهرهٔ سنگینتر) شیشه‌ای و دیگری (مهرهٔ سبکتر) کوارتزی است. این دو مهره را با هم در یک کفهٔ ترازو بگذارید. دو مهرهٔ دیگر بردارید و آنها را با هم در کفهٔ دیگر بگذارید. اگر دو مهرهٔ جدید سنگینتر باشند هر دو شیشه‌ای‌اند. اگر دو مهرهٔ جدید سبکتر باشند، هر دو کوارتزی‌اند. اگر دو مهرهٔ جدید با دو مهرهٔ اول هم‌وزن باشند، یکی از آنها شیشه‌ای و دیگری کوارتزی است. در هر یک از این سه حالت می‌توانیم تعداد مهره‌های شیشه‌ای

و تعداد مهره‌های کوارتزی بین دو مهرهٔ جدید را بشماریم (توجه کنید که مسأله نخواسته است مهره‌ها را شناسایی کنیم، و فقط تعداد آنها اهمیت دارد). پس این دو مهره را کنار می‌گذاریم و تعداد مهره‌های شیشه‌ای و کوارتزی را جایی می‌نویسیم. سپس دو مهرهٔ دیگر روی کفهٔ دوم ترازو می‌گذاریم و آنها را با دو مهرهٔ اول مقایسه می‌کنیم. کار را به این روش ادامه می‌دهیم. می‌بینیم که همهٔ مهره‌ها بعد از $\frac{۲۲}{۲} + ۱$ بار توزین، یعنی بعد از ۱۲ بار توزین شمارش می‌شوند. این پیشرفت بزرگی است!

۲. **دو مهره هم‌وزن‌اند.** در این حالت یا هر دو مهره شیشه‌ای‌اند یا هر دو کوارتزی. اکنون، مانند حالت اول، این دو مهره را به‌عنوان جفت آزمون به‌کار می‌گیریم. دو مهرهٔ دیگر برمی‌داریم و آنها را با جفت آزمون مقایسه می‌کنیم. اگر هم‌وزن باشند، این دو مهره هم از همان نوع‌اند (یا شیشه‌ای یا کوارتزی)، ولی هنوز نمی‌دانیم این چهار مهره از چه جنس‌اند. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا جفتی بیابیم که با جفت آزمون هم‌وزن نباشد. مثلاً فرض کنید جفت kام چنین باشد. اگر جفت kام سنگینتر از جفت آزمون باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که جفت آزمون و همهٔ جفتهای قبل از جفت kام کوارتزی‌اند. اگر جفت kام سبکتر از جفت آزمون باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که جفت آزمون و همهٔ جفتهای قبل از جفت kاُم شیشه‌ای‌اند.
فرض کنید که جفت kام سنگینتر باشد (حالتی نیز که جفت kام سبکتر باشد به همین شیوه تحلیل می‌شود). دو مهرهٔ جفت kام را از هم جدا و با هم مقایسه کنید. اگر هم‌وزن باشند، هر دو شیشه‌ای‌اند. اگر هم‌وزن نباشند، مهرهٔ سنگینتر شیشه‌ای و مهرهٔ سبکتر کوارتزی است. به هر حال، مهرهٔ شیشه‌ای جفت kام و یکی از مهره‌های کوارتزی جفت آزمون را بردارید و این دو را به‌عنوان جفت آزمون جدید به‌کار گیرید. مانند حالت اول، بقیهٔ مهره‌ها را دو به‌دو با این جفت آزمون جدید مقایسه کنید. روی هم تعداد توزینهای انجام شده برابر است با

$$۱ + (k - ۱) + ۱ + \frac{۲۴ - ۲k}{۲} = ۱۳$$

می‌بینید که با گروهبندی مهره‌ها به گروههای ۲تایی می‌توانیم تعداد مهره‌های شیشه‌ای و تعداد مهره‌های کوارتزی را با حداکثر ۱۳ بار توزین تعیین کنیم. آیا اگر از گروههای سه‌تایی یا چهارتایی استفاده کنیم می‌توانیم تعداد توزینها را کمتر کنیم؟ فقط یکی از اشکالات کار با گروههای چهارتایی زیاد بودن تعداد امکانات (دقیقاً پنج تا) است. ممکن است هر چهار مهره شیشه‌ای، یا سه تا شیشه‌ای و یکی کوارتزی، یا دو تا شیشه‌ای و دو تا کوارتزی، یا یکی شیشه‌ای و سه تا کوارتزی یا هر چهار مهره کوارتزی باشند. پس اگر مثلاً چهارتایی آزمونی متشکل از دو مهرهٔ شیشه‌ای و دو مهرهٔ کوارتزی داشته باشیم و چهارتایی دیگری را با آن مقایسه کنیم چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ اگر چهارتایی جدید با چهارتایی آزمون هم‌وزن باشد مطمئن می‌شویم که شامل دو مهرهٔ شیشه‌ای و دو مهرهٔ کوارتزی است. اگر چهارتایی جدید سبکتر باشد، ممکن است شامل چهار مهرهٔ کوارتزی یا شامل سه مهرهٔ کوارتزی و یک مهرهٔ شیشه‌ای

باشد. اگر چهارتایی جدید سنگینتر باشد باز هم همین مشکل وجود دارد. هر بار به دو بار توزین دیگر نیاز داریم تا بفهمیم کدام‌یک از این حالتها پیش آمده است. جدا کردن چهار مهره برای چهارتایی آزمون هم به چند بار توزین نیاز دارد. خودتان تحقیق کنید که با استفاده ازگروههای چهارتایی پیشرفتی حاصل نمی‌شود. می‌توانید تحقیق کنید که استفاده ازگروههای سه‌تایی نیزکمکی نمی‌کند. اگر بخواهیم گروههای پنج یا شش‌تایی را بررسی کنیم موضوع به سرعت بسیار پیچیده می‌شود.

ممکن است بتوان راه‌کارهای ماهرانه‌تری یافت و تعداد مهره‌های شیشه‌ای و تعداد مهره‌های کوارتزی را با کمتر از ۱۳ بار توزین تعیین کرد. در اینجا وقت خود را صرف بررسی کامل این موضوع نمی‌کنیم. □

مسألهٔ ۷.۲.۵ (باشه) در این مسأله با ترازوی شاهین‌دار کار می‌کنیم ولی تعدادی وزنهٔ برنجی استاندارد نیز که وزن هر کدام رویش نوشته شده است داریم. در مغازه‌های قدیمی معمولاً مغازه‌دار چند وزنهٔ استاندارد داشت: یک وزنهٔ ۱ اونسی، دو وزنهٔ ۲ اونسی، یک وزنهٔ ۵ اونسی، دو وزنهٔ ۱۰ اونسی، یک وزنهٔ ۲۰ اونسی و یک وزنهٔ ۵۰ اونسی. آشکارا می‌توان دید که با ترکیب این وزنه‌ها هر وزنی از ۱ اونس تا ۱۰۰ اونس به‌دست می‌آید. مثلاً

$$۸۸ = ۵۰ + ۲۰ + ۱۰ + ۵ + ۲ + ۱$$

کمترین تعداد وزنه‌هایی که با آنها بتوان هر وزنی از ۱ اونس تا ۴۰ اونس را اندازه گرفت چندتاست؟

راه‌حل. چرا فقط به مبنای ۱۰ متکی باشیم؟ چرا از مبنای ۲ استفاده نکنیم؟ می‌توانیم از وزنه‌هایی به وزن ۱ اونس، ۲ اونس، ۴ اونس، ۸ اونس، ۱۶ اونس و ۳۲ اونس، یعنی فقط ۶ وزنه، استفاده کنیم. چون هر عددی از ۱ تا ۴۰ را می‌توان در مبنای ۲ نوشت، این وزنه‌ها شرایط لازم را دارند. مثلاً عددی که در زبان دهدهی ۲۷ نام دارد در مبنای ۲ به‌صورت ۱۱۰۱۱ نوشته می‌شود. یعنی اینکه باید از وزنه‌های ۱۶ اونسی، ۸ اونسی، ۲ اونسی و ۱ اونسی استفاده کنیم.

آیا می‌توانیم با تعداد کمتری از وزنه‌ها به این هدف برسیم؟ فرض کنید پنج وزنه داشته باشیم. چند وزن را می‌توانیم با این پنج وزنه اندازه‌گیری کنیم؟ مجموعه‌ای پنج عضوی چند زیرمجموعه دارد؟ جواب (که از فصل ۱ می‌دانیم) 2^5، یعنی ۳۲، است. چون هدف ما این است که ۴۰ وزن از ۱ تا ۴۰ را اندازه‌گیری کنیم، روشن است که پنج وزنه کافی نیست. کمترین تعداد وزنه‌های لازم شش است و این کار را با شش وزنه انجام دادیم. □

اگر کمی موذی شویم و پارامترهای مسأله را تغییر دهیم چه می‌شود؟ فرض کنید مجاز باشیم وزنه‌ها را در هر دو کفهٔ ترازو بگذاریم. مثلاً وزنه‌های ۱، ۳ و ۹ برای اندازه‌گیری همهٔ وزنهای از ۱ تا ۱۳ کافی‌اند (واحدها را برای حفظ ظرافت ننوشته‌ایم). روش کار چنین است: فرض کنید می‌خواهیم بستهٔ S

را وزن کنیم. جدول ۱ نشان می‌دهد که چگونه باید هریک از وزنهای از ۱ تا ۱۳ را اندازه‌گیری کنیم. باید متوجه شده باشید که در شش سطر از این جدول برای ساختن وزن مورد نیاز از تفریق استفاده کرده‌ایم.

وزن	کفهٔ چپ	کفهٔ راست
۱	۱	S
۲	۳	۱+S
۳	۳	S
۴	۱+۳	S
۵	۹	۱+۳+S
۶	۹	۳+S
۷	۱+۹	۳+S
۸	۹	۱+S
۹	۹	S
۱۰	۱+۹	S
۱۱	۳+۹	۱+S
۱۲	۳+۹	S
۱۳	۱+۳+۹	S

جدول۱

مسألهٔ پیکارجوی ۸.۲.۵ ثابت کنید که هیچ راهی برای اندازه‌گیری همهٔ وزنه‌های از ۱ اونس تا ۱۳ اونس فقط با دو وزنه وجود ندارد.

مسألهٔ پیکارجوی ۹.۲.۵ با استفاده از ایدهٔ گذاشتن وزنه‌ها در هر دو کفهٔ ترازوی شاهین‌دار، کمترین تعداد وزنه‌هایی که برای توزین هر وزن (برحسب عددهای طبیعی) از ۱ تا ۴۰ اونس لازم است چندتاست؟ باید تحقیق کنید که هم سیستم پیشنهادی شما کارساز است و هم با تعداد کمتری از وزنه‌ها نمی‌توان چنین کاری کرد.

مسألهٔ پیکارجوی ۱۰.۲.۵ الگوریتمی برای تعیین کمترین تعداد وزنه‌های لازم بر اندازه‌گیری هر وزن (برحسب عددهای طبیعی) از ۱ اونس تا N اونس (N عددی طبیعی است) به‌دست دهید. باید الگوریتمی برای روش «یک کفه» و الگوریتم دیگری برای روش «دوکفه» بدهید.

مسألهٔ ۱۱.۲.۵ فرض کنید ۱۳ دانه مروارید و یک ترازوی شاهین‌دار در اختیارتان هست. فرض کنید که هر وقت ۶ مروارید را در یک کفه و ۶ مروارید را در کفهٔ دیگر می‌گذارید ترازو متعادل می‌شود. توضیح دهید که چرا هر ۱۳ مروارید هم‌وزن‌اند.

راه‌حل. فرض کنید هر ۱۳ مروارید هم‌وزن نباشند. پس دست‌کم یک مروارید هست که وزنش با بقیه

فرق دارد. اکنون مرواریدها را طوری بچینید که سنگینترین مروارید در سمت چپ باشد و از چپ به راست وزن هیچ مرواریدی کمتر از مروارید بعدی نباشد. اکنون مرواریدها را از چپ به راست $P_۱$، $P_۲$، ... و $P_{۱۳}$ بنامید.

دراین صورت یا وقتی که $\{P_۱, P_۲, \ldots, P_۶\}$ در یک کفه و $\{P_۷, P_۸, \ldots, P_{۱۲}\}$ در کفهٔ دیگر باشد، یا وقتی که $\{P_۲, P_۳, \ldots, P_۷\}$ در یک کفه و $\{P_۸, P_۹, \ldots, P_{۱۳}\}$ در کفهٔ دیگر باشد ترازو متعادل نمی‌شود (چون مرواریدی هست که بیشتر از مروارید مجاورش وزن دارد). این تناقض است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۱۲.۲.۵ در مسألهٔ قبل عددهای ۶ و ۱۳ چه ویژگی خاصی دارند؟ آیا می‌توانید مثالی با عددهایی دیگر بیاورید که نتیجه‌گیری مسألهٔ قبل درست نباشد؟

تمرین فصل ۵

۱. فرض کنید ۲۷ وزنهٔ برنجی به وزنهای $۱^۲$، $۲^۲$، $۳^۲$، ... و $۲۷^۲$ گرم دارید. چگونه می‌توانیم این وزنه‌ها را به سه گروه تقسیم کنیم به‌طوری‌که وزن هر سه گروه یکی باشد؟

۲. پنج وزنهٔ برنجی به ظاهر یکسان دارید که وزن همهٔ آنها با هم فرق دارد. چگونه می‌توانید با ترازوی شاهین‌دار و با کمترین تعداد توزینهای ممکن این وزنه‌ها را از سبک به سنگین مرتب کنید؟

۳. جیپی باید ۱۰۰ گالن بنزین را به ۵۰۰ مایل دورتر در طرف دیگر صحرا برساند. مخزن بنزین ۱۰ گالنی جیپ فقط برای پیمودن ۲۰۰ مایل کفایت می‌کند. جیپ می‌تواند سه بشکهٔ ۱۰ گالنی بنزین را حمل کند. راه‌کاری طراحی کنید که رانندهٔ جیپ مقداری در صحرا پیش برود، مقداری بنزین در جاهایی بگذارد، برگردد و دوباره بنزین بردارد، در نقاطی استراتژیک مخزن بنزین جیپ را پر کند و نهایتاً ۱۰۰ گالن بنزین را به طرف دیگر صحرا برساند. آیا می‌توانید راه‌کار اپتیمالی طراحی کنید؟

۴. در مسألهٔ ۳ اگر پمپ بنزینی در صحرا در فاصلهٔ ۳۵۰ مایلی باشد (که فقط بتوان برای پر کردن مخزن بنزین جیپ از آن استفاده کرد و نتوان بشکه‌ها را پر کرد) راه‌کار شما چه تغییری می‌کند؟

۵. در مسألهٔ ۳ اگر مخزن بنزین جیپ ۲۰ گالنی باشد، و باز هم برای پیمودن هر ۲۰ مایل ۱ گالن بنزین لازم باشد، ولی فقط دو بشکهٔ ۱۰ گالنی در قسمت بار جیپ جا بگیرد، راه‌کار شما چه تغییری می‌کند؟

۶. در مسابقه‌ای تلویزیونی شرکت کرده‌اید. مجری برنامه دو پاکت به شما می‌دهد و می‌گوید یکی را انتخاب کنید (می‌دانید که در هر پاکت مقداری پول هست). بعد از اینکه پاکتی را انتخاب کردید مجری به شما می‌گوید که در یکی از پاکتها سه برابر پاکت دیگر پول هست ولی نمی‌دانید

که این پاکت کدام است. شما پاکتی را که انتخاب کرده‌اید باز می‌کنید و می‌بینید ۱۵۰۰ تومان در آن است. پس در پاکت دیگر یا ۴۵۰۰ تومان هست یا ۵۰۰ تومان. اکنون مجری این امکان را به شما می‌دهد که پاکت دوم را بردارید. آیا این کار را می‌کنید؟ چرا؟ اگر به جای «سه برابر»، «دو برابر» یا «یک‌ونیم برابر» باشد چه می‌کنید؟

۷. ده دانه مروارید دارید که همه به‌ظاهر یکسان‌اند ولی سه وزن مختلف دارند. هشت تا از آنها هم‌وزن‌اند، یکی از آنها سبکتر است و یکی سنگینتر. چند توزین با ترازوی شاهین‌دار لازم است تا دو مرواریدی را که با بقیه فرق دارند جدا کنیم؟

۸. منبع این مسأله [BAL] است. ده مهره را در یک ردیف روی میز می‌چینیم. هر حرکت مجاز برداشتن یک مهره، رد کردن آن از روی دو مهرهٔ سمت چپ یا سمت راست آن و گذاشتن مهرهٔ موردنظر روی مهرهٔ بعد از آن دو مهره است. چگونه می‌توان طوری این حرکتها را انجام داد که نهایتاً پنج ستون دوتایی به فاصله‌های مساوی از هم داشته باشیم؟

۹. آیا می‌توانید با اولین نُه عدد فرد مربعی وفقی به اندازهٔ ۳ × ۳ بسازید؟

۱۰. آیا می‌توانید با اولین نُه عدد زوج مربعی وفقی به اندازهٔ ۳ × ۳ بسازید؟

۱۱. آیا می‌توانید با هر نُه عدد طبیعی متوالی مربعی وفقی به اندازهٔ ۳ × ۳ بسازید؟

۱۲. ترازوی شاهین‌دار تازه‌ای خریده‌اید. این ترازو سه کفه دارد. با این ترازو می‌توانید سه بسته را همزمان وزن کنید. اگر هر سه هم‌وزن باشند، ترازو این را نشان می‌دهد؛ اگر دو بسته هم‌وزن باشند و سومی سنگینتر یا سبکتر باشد، ترازو این را نشان می‌دهد. اگر وزن هر سه بسته با هم متفاوت باشند، ترازو نشان می‌دهد که کدام از همه سنگینتر و کدام از همه سبکتر است. نه مروارید دارید که یکی از آنها، مانند مسألهٔ ۱.۲.۵، وزنش با بقیه فرق دارد. ثابت کنید که با دو بار توزین می‌توانید مروارید استثنایی را مشخص کنید.

۱۳. ترازوی شاهین‌دار تمرین ۱۲ را در اختیار دارید. برای مشخص کردن مروارید استثنایی بین دوازده دانه مروارید (یک مروارید استثنایی هست که ممکن است سبکتر یا سنگینتر از بقیه باشد) چند بار توزین لازم است؟ اگر پانزده مروارید باشد چطور؟

۱۴. مسأله‌های ۱۲ و ۱۳ درصورتی‌که از قبل بدانید مروارید استثنایی سنگینتر از بقیه است چه فرقی می‌کنند؟

۱۵. مربع لاتین جدولی $n \times n$ است که در آن n نوع شیء مختلف، مثلاً گیلاس، فندق، نخود، سکه و غیره قرار می‌دهیم، به‌طوری‌که در هر سطر و هر ستون از هریک از این n نوع شیء متمایز فقط یکی، نه بیشتر، باشد.

مربع لاتین ۲ × ۲ای بسازید. چند مربع لاتین ۲ × ۲ی متفاوت وجود دارد؟

مربع لاتین ۳ × ۳ای بسازید. چند مربع لاتین ۳ × ۳ی متفاوت وجود دارد؟

معلوم شده است که تعداد مربعهای لاتین ۸ × ۸ متفاوت بیشتر از 10^{21} و کمتر از 10^{22} است. اثبات این تخمینها نسبتاً دشوار است. آیا می‌توانید کران بالایی (هر چند بی‌دقت) برای تعداد مربعهای لاتین ۸ × ۸ به‌دست آورید؟

مربعهای لاتین موضوع پژوهشِ روز در ریاضیات‌اند. مثلاً معلوم شده است که مربعهای لاتین در طراحی آزمایشهای بدون پیش‌فرض در پژوهشهای کشاورزی کاربرد دارند.

۱۶. عنصر بعدی دنبالهٔ زیر چیست؟

۹, ۶۱, ۵۲, ۶۳, ۹۴, ۴۶, ۱۸, ?

۱۷. بازی زندگی (که جان هورتون کانوِی آن را ابداع کرده است) روی صفحه‌ای که به تعدادی مربع تقسیم شده است (مانند کاغذ شطرنجی بزرگ) انجام می‌شود. بازی با نوشتن x در تعدادی از مربعها شروع می‌شود. این مربعها «افراد» جمعیت شما هستند. دو نفر (مربع) «همسایه»اند اگر ضلع یا رأسی مشترک داشته باشند. پس هر مربع هشت همسایه دارد: چهار مربع در سمت راست، چپ، بالا و پایین، و چهار مربع در امتداد قطرها.

قاعده‌های بازی چنین است: (الف) اگر سه نفر با مربع خالی یکسانی همسایه باشند، شخص جدیدی در مربع خالی ساکن می‌شود؛ (ب) اگر شخصی چهار یا بیشتر از چهار همسایه داشته باشد از ازدحام می‌میرد؛ (ج) اگر شخصی یک یا کمتر از یک همسایه داشته باشد از تنهایی می‌میرد. برای هر آرایش جمعیتی مفروضی، این سه قاعده آنی اعمال می‌شوند و آرایش جدید تولید می‌شود.

آیا جمعیت اولیه‌ای هست که جمعیتی متناوب تولید کند (یعنی الگوی جمعیت بعد از تعدادی متناهی از مرحله‌ها تکرار شود. مثلاً سه مربع در یک ردیف افقی را امتحان کنید)؟ آیا جمعیت اولیه‌ای هست که ثابت بماند و هیچ‌وقت کم یا زیاد نشود؟ آیا جمعیت اولیه‌ای هست که در دم، یا بی‌درنگ، بمیرد؟ آیا جمعیت اولیه‌ای هست که مرتباً افزایش یابد و بی‌کران بزرگ شود؟

۱۸. تاسی (شش‌وجهی) را می‌ریزیم. وجه‌های تاس از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری شده است. اگر در اولین ۳۰ بار ریختن تاس ۶ نیاید یک میلیون دلار می‌گیرید. ولی اگر در اولین ۳۰ بار ریختن تاس ۶ بیاید باید ۱۰۰ دلار بدهید. آیا تن به این بازی می‌دهید؟

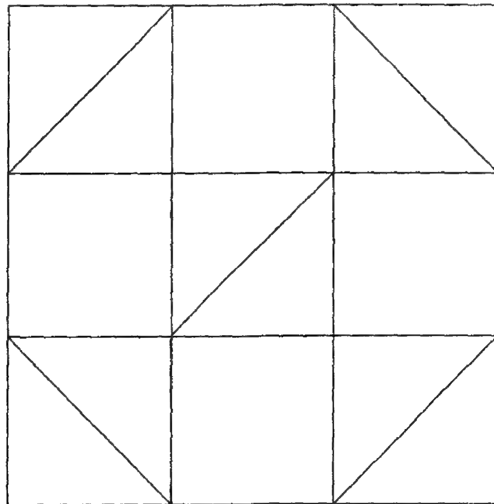
۱۹. این مسأله از [BAL] است. مردی همراه گرگ و بز خود سفر می‌کند و سبدی پر از کلم در دست دارد. بز را نمی‌توان با گرگ تنها گذاشت چون گرگ بز را می‌خورد. به همین دلیل کلمها را نمی‌توان با بز تنها گذاشت. اما گرگ علاقه‌ای به کلم ندارد. مرد به رودخانه‌ای می‌رسد و برای عبور از آن قایق کوچکی پیدا می‌کند که فقط جای یکی از گرگ، بز یا سبد کلم را همراه با مرد دارد. مرد چگونه می‌تواند حیوانها و سبد کلمش را از رودخانه رد کند؟ کمترین دفعاتی که مرد باید عرض رودخانه را طی کند تا همه را به سلامت به طرف دیگر رودخانه برساند چقدر است؟

۲۰. این مسأله نیز از [BAL] است. سه مرد و سه پسر باید از رودخانه‌ای بگذرند. تنها قایقی که در اختیار دارند گنجایش فقط یک مرد و فقط یک پسر را دارد. همه می‌توانند پارو بزنند. آنها چگونه می‌توانند از رودخانه رد شوند و کمترین تعداد رفت و برگشتهای قایق چقدر است؟

۲۱. در بازی شطرنج شاه را می‌توان از خانه‌ای که در آن است به هر خانهٔ مجاور در سمت چپ، راست، بالا، پایین یا در امتداد قطرها حرکت داد. هر مهره درصورتی از بازی خارج می‌شود که مهرهٔ دیگری بتواند به خانه‌ای که مهرهٔ اول در آن است بیاید. حداکثر چند شاه می‌توان در صفحهٔ شطرنج قرار داد به‌طوری‌که هیچ شاهی نتواند شاه دیگری را از صفحه خارج کند؟

۲۲. در شطرنج، وزیر را می‌توان به‌طور مستقیم در هر جهت و به هر اندازهٔ دلخواه حرکت داد. کمترین تعداد وزیرهایی که می‌توان در صفحهٔ شطرنج قرار داد به‌طوری‌که همهٔ خانه‌ها مورد تهدید باشند چندتاست؟ [توجه: خانه‌ای که وزیری در آن قرار دارد توسط خود آن وزیر تهدید نمی‌شود.]

۲۳. شکل هندسی نشان داده شده در شکل ۱۴۸ را ببینید. ثابت کنید که می‌توان این شکل را بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم کرد به‌طوری‌که هر پاره‌خط فقط و فقط یک‌بار رسم شود. [راهنمایی: به زوجیت رأسها توجه کنید.]

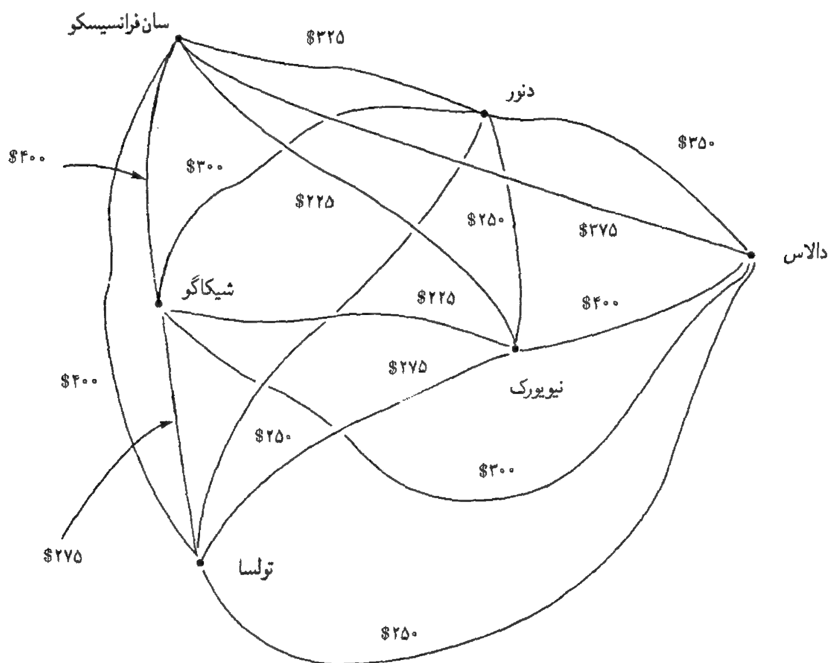


شکل۱۴۸

۲۴. عددهای ۱، ۲، ۳، ... را پشت سر هم می‌نویسیم. ۴۰۰۰۰امین رقمی که می‌نویسیم چیست؟

۲۵. بازرگانی ۲۴ اونس از مایعی گران‌قیمت در اختیار دارد. او برای معامله‌ای باید این مایع را به سه قسمت مساوی تقسیم کند، ولی فقط ظرفهایی به گنجایش ۵ اونس، ۱۱ اونس و ۱۳ اونس دارد؟ چگونه می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۲۶. شکل ۱۴۹ را ببینید. در این شکل هزینهٔ سفر بین شهرهای مختلف نشان داده شده است. با



شکل۱۴۹

فرض اینکه مسافری بخواهد از سان‌فرانسیسکو سفر خود را شروع کند و بعد از دست‌کم یک بار عبور از هر شهر نهایتاً دوباره به سان‌فرانسیسکو برگردد، ارزان‌ترین مسیر برای او کدام است؟

این مسأله حالت خاصی از مسألهٔ مهم فروشندهٔ دوره‌گرد است. مسألهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد هنوز کامل حل نشده است؛ قبلاً در تمرینهای انتهای فصل ۴ با این مسأله آشنا شده‌اید.

۲۷. چند ماتریس $k \times m$ وجود دارد که درایه‌هایشان همگی ۱± اند و حاصل‌ضرب درایه‌های هر سطر و یا ستون آنها ۱− است؟



جبر و آنالیز

۱.۶ کمی جبر

جبر مقدماتی راهی خودبسنده برای تمرین مهارتهای مسأله حل‌کردن است. در این بخش به تمرین این فنون می‌پردازیم.

مسألهٔ ۱.۱.۶ ثابت کنید که اگر n عددی طبیعی باشد، $n^۳ - n$ همیشه بر ۳ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. عدد $n^۳ - n$ به‌صورت $(n-۱)n(n+۱)$ تجزیه می‌شود. عاملهای این عدد سه عدد درست متوالی‌اند. بنابراین یکی از این عاملها مضرب ۳ است. در نتیجه $n^۳ - n$ مضرب ۳ است. □

مسألهٔ ۲.۱.۶ ثابت کنید که اگر n عددی طبیعی باشد، $n^۵ - n$ همیشه بر ۵ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. اگر بخواهیم به تقلید از مسألهٔ قبل $n^۵ - n$ را تجزیه کنیم نتیجه می‌گیریم

$$n^۵ - n = n(n^۴ - ۱) = n(n^۲ - ۱)(n^۲ + ۱) = n(n-۱)(n+۱)(n^۲ + ۱)$$

نتیجه به اندازهٔ مسألهٔ قبل ساده نیست، چون عاملها پنج عدد صحیح متوالی نیستند.

توجه کنید که اگر n عددی صحیح مختوم به یکی از رقمهای ۰، ۱، ۴، ۵، ۶ یا ۹ باشد، یکی از عددهای $n - ۱$، n، و $n + ۱$ بر ۵ بخش‌پذیر است. اما اگر n عددی صحیح مختوم به یکی از رقمهای ۲، ۳، ۷ یا ۸ باشد، $n^۲$ به ۴ یا ۹ ختم می‌شود و بنابراین $n^۲ + ۱$ بر ۵ بخش‌پذیر است. بنابراین، حاصل‌ضرب بر ۵ بخش‌پذیر است. پس بدون توجه به اینکه عدد طبیعی n چه باشد، $n^۵ - n$ بر ۵ بخش‌پذیر است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۳.۱.۶ ثابت کنید که اگر n عددی طبیعی باشد، $n^۷ - n$ همیشه بر ۷ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۴.۱.۶ درستیِ اتحاد ترکیبیاتی زیر را تحقیق کنید:

$$\binom{k}{m} + \binom{k}{m+۱} = \binom{k+۱}{m+۱}$$

راه‌حل. طرف چپ را باز می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\binom{k}{m} + \binom{k}{m+۱} &= \frac{k!}{m!(k-m)!} + \frac{k!}{(m+۱)!(k-m-۱)!} \\ &= \frac{(m+۱)k!}{(m+۱)!(k-m)!} + \frac{(k-m)k!}{(m+۱)!(k-m)!} \\ &= \frac{(k+۱)k!}{(m+۱)!(k-m)!} \\ &= \frac{(k+۱)!}{(m+۱)!((k+۱)-(m+۱))!} \\ &= \binom{k+۱}{m+۱}\end{aligned}$$

این همان نتیجهٔ مطلوب است. □

مسألهٔ ۵.۱.۶ دستور دوجمله‌ای را تحقیق کنید:

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{۱}a^{k-۱}b + \binom{k}{۲}a^{k-۲}b^۲ + \cdots + \binom{k}{k-۲}a^۲b^{k-۲} + \binom{k}{k-۱}ab^{k-۱} + b^k$$

راه‌حل. محاسبهٔ $(a+b)^k$ به‌ازای هر عدد دلخواه مانند k عملی نیست. ولی به‌ازای مقادیر کوچک k محاسبهٔ این عبارت ساده است. پس به‌نظر می‌رسد که می‌توانیم از استقرا استفاده کنیم.

وقتی $k = ۱$، دستور دوجمله‌ای تبدیل می‌شود به

$$a + b = a + b$$

این تساوی آنقدر ساده است که چندان روشنگر نیست. فقط برای تمرین، حالت $k = ۲$ را حساب می‌کنیم:

$$(a+b)^۲ = a^۲ + \binom{۲}{۱}ab + b^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ = a^۲ + \binom{۲}{۱}a^{۲-۱}b + b^۲$$

رابطهٔ بالا اتحادی آشناست و با دستور مطلوب ما سازگار است.

اکنون فرض می‌کنیم که درستیِ دستور مطلوب را به‌ازای k تحقیق کرده باشیم. از این اطلاعات برای تحقیق درستی دستور به‌ازای $k + ۱$ استفاده می‌کنیم. پس فرض می‌کنیم که

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{۱}a^{k-۱}b + \binom{k}{۲}a^{k-۲}b^۲ + \cdots + \binom{k}{k-۲}a^۲b^{k-۲} + \binom{k}{k-۱}ab^{k-۱} + b^k$$

هر دو طرف این معادله را در $a + b$ ضرب می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$(a+b)^{k+۱} = (a+b)\left[a^k + \binom{k}{۱}a^{k-۱}b + \binom{k}{۲}a^{k-۲}b^۲ + \cdots + \binom{k}{k-۲}a^۲b^{k-۲} + \binom{k}{k-۱}ab^{k-۱} + b^k\right]$$

اکنون طرف راست را باز می‌کنیم. توجه کنید که بجز $a^{k+۱}$ و $b^{k+۱}$، هر جمله مانند a^mb^b دو بار ظاهر می‌شود. پس

$$(a+b)^{k+۱} = a^{k+۱} + \left[۱ + \binom{k}{۱}\right]a^kb + \left[\binom{k}{۱} + \binom{k}{۲}\right]a^{k-۱}b^۲ + \left[\binom{k}{۲} + \binom{k}{۳}\right]a^{k-۲}b^۳ + \cdots + \left[\binom{k}{k-۲} + \binom{k}{k-۱}\right]a^۲b^{k-۱} + \left[\binom{k}{k-۱} + \binom{k}{k}\right]ab^k + b^k$$

با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ قبل در مورد ضرایب دوجمله‌ای می‌توانیم بنویسیم

$$(a+b)^{k+۱} = (a+b)\left[a^k + \binom{k}{۱}a^{k-۱}b + \binom{k}{۲}a^{k-۲}b^۲ + \cdots + \binom{k}{k-۲}a^۲b^{k-۲} + \binom{k}{k-۱}ab^{k-۱} + b^k\right]$$

این همان اتحاد مطلوب به‌ازای $k + ۱$ است. پس استقرا کامل است. درستیِ دستور دوجمله‌ای را ثابت کرده‌ایم. □

مسألهٔ ۶.۱.۶ کدام بزرگتر است، $\alpha = (۱ + ۰٫۰۰۰۰۰۱)^{۱۰۰۰۰۰۰}$ یا ۲؟

راه‌حل. پیش از مطالعهٔ راه‌حل این مسأله کمی با ماشین‌حساب وقت بگذرانید. به چه مشکلی برمی‌خورید؟ همین مشکل در بیشتر سیستمهای کامپیوتر نیز روی می‌دهد: نمی‌توانید حساب این همه رقم اعشاری را نگاه دارید. اکنون راه‌حلی تحلیلی برای این مسأله عرضه می‌کنیم.

برای راهنمایی یادآوری می‌کنیم که $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ به عدد e، یعنی ...۲٫۷۱۸، میل می‌کند. عدد α چیزی نیست جز همین عبارت به‌ازای $k = 1000000$. پس نتیجه می‌گیریم α بزرگتر از ۲ است.

برای درک بهتر این مفهوم، دستور دوجمله‌ای را برای α به‌کار می‌گیریم:

$$\alpha = (1 + 0{,}000001)^{1000000}$$

$$= 1^{1000000} + 1000000 \times 1^{999999} \times 0{,}000001 + \text{جمله‌های مثبت دیگر}$$

$$= 1 + 1 + \text{جمله‌های مثبت}$$

$$> 2$$

و این حدس ما را تأیید می‌کند. درواقع $\alpha > 2$. □

مسألهٔ ۷.۱.۶ کدام بزرگتر است، 1000^{1000} یا 1001^{999}؟

راه‌حل. باز هم قضیهٔ دوجمله‌ای را به‌کار می‌گیریم:

$$1001^{999} = [1000 + 1]^{999}$$

$$= 1000^{999} + 999 \times 1000^{998} \times 1 + \binom{999}{2} \times 1000^{997} \times 1^2$$

$$+ \binom{999}{3} \times 1000^{996} \times 1^3 + \cdots$$

$$+ \binom{999}{997} \times 1000^2 \times 1^{997} + \binom{999}{998} \times 1000 \times 1^{998} + 1$$

$$< \underbrace{1000^{999} + 1000^{999} + \cdots + 1000^{999}}_{\text{۱۰۰۰ بار}}$$

$$= 1000^{1000}$$

می‌بینیم که 1000^{1000} بزرگتر است. □

نکتهٔ مهم در مسألهٔ اخیر این است که این مسأله اساساً محاسبه‌پذیر نیست. در زبانهای رایج کامپیوتر مانند FORTRAN، حتی در حالت دقت دوگانه، نمی‌توان عددهایی به بزرگی 1000^{1000} را

در محاسبات وارد کرد. می‌توان از نماد علمی استفاده کرد، یعنی

$$۱۰۰۰^{۱۰۰۰} = ۱ \times ۱۰^{۳۰۰۰}$$

اما در این حالت دقت لازم برای مقایسهٔ موردنظر مسأله وجود ندارد. از طرف دیگر می‌توان سیستمهای جبری کامپیوتری مانند MATHEMATICA یا MAPLE یا AXIOM را به‌کار گرفت. ولی به هر حال محاسبهٔ عددی مانند $۱۰۰۱^{۱۹۹۹}$، که حدود سه‌هزار رقم دارد، واقعاً دشوار است. البته اگر کامپیوترباز واقعی باشید همواره می‌توانید صافی‌یی بنویسید که با آن هر عدد مفروضی را با هر عدد دیگری مقایسه کنید. ولی این کار وقت زیادی می‌گیرد.

ما به جای این روشهای عادی برای حل کردن مسأله، ایده‌هایی مقدماتی ولی مهم از آنالیز ترکیبیاتی را به‌کار گرفتیم. بنابراین راه‌حل ساده و سر راست و درک و بررسی آن آسان است.

مسألهٔ ۸.۱.۶ فرض کنید k عددی طبیعی باشد. عبارت زیر را حساب کنید:

$$\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \cdots + \frac{۱}{(k-۱)k} + \frac{۱}{k(k+۱)}$$

راه‌حل. یک روش این است که مجموع را به‌ازای مقادیر کوچک k، مانند $k = ۱, ۲, ۳, ۴$، حساب کنیم و ببینیم الگویی وجود دارد یا نه. ابتدا این روش را امتحان می‌کنیم. مجموع را S_k بنامید. اکنون

$$S_۱ = \frac{۱}{۲}$$

$$S_۲ = \frac{۲}{۳}$$

$$S_۳ = \frac{۳}{۴}$$

$$S_۴ = \frac{۴}{۵}$$

آشکارا الگویی وجود دارد. چنین الگویی استفاده از استقرا را پیش می‌کشد.

گزاره‌ای که باید آن را ثابت کنیم این است که به‌ازای هر عددی مانند k،

$$S_k = \frac{k}{k+۱}$$

درستی $S_۱$ را تحقیق کرده‌ایم. اکنون فرض می‌کنیم که S_j درست باشد. پس فرض کرده‌ایم که

$$S_j = \frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \cdots + \frac{۱}{(j-۱) \times j} + \frac{۱}{j \times (j+۱)} = \frac{j}{j+۱}$$

$\frac{۱}{(j+۱)(j+۲)}$ را به دو طرف اضافه می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$S_{j+۱} = \frac{j}{j+۱} + \frac{۱}{(j+۱)(j+۲)} = \frac{j+۱}{j+۲}$$

این دقیقاً همان عبارتی است که می‌خواستیم برای $S_{j+۱}$ به‌دست آید. استقرا کامل است و درستی فرمولی را که برای S_k حدس زده بودیم تحقیق کرده‌ایم.

می‌خواهیم فنِّ دیگری برای حل کردن سریع این مسأله عرضه کنیم. این فن ترفند است، ولی ترفندی مهم است که باید بدانید: روشی را برای «ادغام» و در نتیجه ساده کردن مجموع می‌آموزیم.

می‌نویسیم

$$S_k = \frac{۱}{۱\times ۲} + \frac{۱}{۲\times ۳} + \cdots + \frac{۱}{(k-۱)k} + \frac{۱}{k(k+۱)}$$
$$= \left[\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲}\right] + \left[\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}\right] + \left[\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}\right]$$
$$+ \cdots + \left[\frac{۱}{k} - \frac{۱}{k+۱}\right]$$

توجه کنید که همهٔ جمله‌ها، بجز جملهٔ اول و جملهٔ آخر، حذف می‌شوند. بنابراین

$$S_k = ۱ - \frac{۱}{k+۱} = \frac{k}{k+۱}$$

و این البته همان جوابی است که قبلاً به‌دست آوردیم. ولی اکنون این جواب را به‌گونه‌ای زیباتر از قبل به‌دست آوردیم. □

مسألهٔ پیکارجوی ۹.۱.۶ مجموع زیر را حساب کنید:

$$\frac{۱}{۱\times ۲\times ۳} + \frac{۱}{۲\times ۳\times ۴} + \frac{۱}{۳\times ۴\times ۵} + \cdots + \frac{۱}{(k-۲)(k-۱)k}$$

این مسأله را به هر دو روشی که در راه‌حل مسألهٔ قبل عرضه کردیم حل کنید.

مسألهٔ ۱۰.۱.۶ مجموع زیر را حساب کنید:

$$۱\times ۲ + ۲\times ۳ + ۳\times ۴ + \cdots + n(n+۱)$$

راه‌حل. باز هم کار را با جست‌وجوی الگو شروع می‌کنیم. مجموع را T_n بنامید. دراین صورت

$$T_۱ = ۲$$
$$T_۲ = ۸$$
$$T_۳ = ۲۰$$
$$T_۴ = ۴۰$$
$$T_۵ = ۷۰$$

کم‌کم با محدودیتهای این روش مواجه می‌شویم. هیچ الگویی دیده نمی‌شود.

فنِ «ادغام» را که در قسمت دوم راه‌حل مسألهٔ ۸.۱.۶ به‌کار گرفتیم امتحان می‌کنیم. چگونه می‌توانیم از این واقعیت که هر دو جملهٔ متوالی عامل مشترکی دارند استفاده کنیم؟ سعی می‌کنیم این‌طور بنویسیم:

$$T_n = ۲(۱+۳)+۳(۲+۴)+۴(۳+۵)+\cdots+n[(n-۱)+(n+۱)] \qquad (*)$$

البته برابری (*) نادرست است. توجه کنید که جمله‌های ۳ × ۲، ۴ × ۳ و مانند آنها هر کدام دو بار به‌حساب آمده‌اند. فقط جمله‌های اول و دوم به‌حساب نیامده‌اند. بنابراین اگرچه باز هم تأکید می‌کنیم که برابری (*) نادرست است، ایده‌ای می‌گیریم.

از اشتباهمان درس می‌گیریم. می‌نویسیم

$$\begin{aligned} &۲(۱+۳)+۳(۲+۴)+۴(۳+۵)+\cdots+n((n-۱)+(n+۱)) \\ &= ۲\,[۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴ \;+\cdots+n(n+۱)] - ۱\times۲ - n(n+۱) \end{aligned}$$

توجه کنید که در طرف راست جمله‌های ۲ × ۱ و $n(n+۱)$ را کم کرده‌ایم، چون این جمله‌ها نباید دوبار حساب شوند. پس

$$۲\times۴+۳\times۶+۴\times۸+\cdots+n\times۲n = ۲T_n - ۲ - n(n+۱)$$

به بیان دیگر

$$۲\left[۲^۲+۳^۲+۴^۲+\cdots+n^۲\right] = ۲T_n - (n^۲+n+۲) \qquad (**)$$

مجموع مربعهای طرف چپ را قبلاً حساب کرده‌ایم. می‌دانیم که

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲ = \frac{۲n^۳+۳n^۲+n}{۶}$$

بنابراین

$$۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲ = \frac{۲n^۳+۳n^۲+n-۶}{۶}$$

با استفاده از این اطلاعات در (**) می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{۲n^۳+۳n^۲+n-۶}{۳} = ۲T_n - (n^۲+n+۲)$$

با حل این معادله برحسب T_n نتیجه می‌شود

$$T_n = \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$$

و حل مسأله کامل می‌شود. □

مسألهٔ پیکارجوی ۱۱.۱.۶ مجموع زیر را حساب کنید:

$$۱ \times ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ \times ۴ + ۳ \times ۴ \times ۵ + \cdots + n(n+۱)(n+۲)$$

از هر روشی که می‌خواهید مسأله را حل کنید (از جمله براساس راه‌حل مسألهٔ قبل).

۲.۶ نابرابریها

نابرابریها بخشی بنیادی از آنالیز ریاضی‌اند. برای حل مسأله‌های مربوط به نابرابریها ترکیب زیرکانه‌ای از استدلالهای کمّی و کیفی به‌کار می‌آید. در این بخش کمی در اثبات نابرابریها تمرین می‌کنیم.

مسألهٔ ۱.۲.۶ اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید

$$ab \leqslant \frac{a^۲ + b^۲}{۲}$$

راه‌حل. نابرابری را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$۲ab \leqslant a^۲ + b^۲$$

در نابرابری بالا همهٔ جمله‌های قضیهٔ دوجمله‌ای را می‌بینیم. نابرابری را چنین می‌نویسیم:

$$\circ \leqslant a^۲ - ۲ab + b^۲$$

اکنون توجه کنید که طرف راست مربع کامل است؛ پس می‌توانیم نابرابری را چنین بنویسیم:

$$\circ \leqslant (a-b)^۲$$

این نابرابری مطمئناً درست است، چون مربع هر عدد حقیقی بزرگتر از یا برابر با صفر است.

نابرابری مطلوب را با استدلال معکوس به چیزی تبدیل کردیم که می‌دانیم درست است. اکنون کار خود را با استدلال مستقیم کنترل می‌کنیم: می‌دانیم که $(a-b)^۲ \geqslant \circ$ به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند a و b برقرار است. بنابراین

$$a^۲ - ۲ab + b^۲ \geqslant \circ$$

این نابرابری را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$a^۲ + b^۲ \geqslant ۲ab$$

و سرانجام دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$\frac{a^۲ + b^۲}{۲} \geqslant ab$$

و این همان نتیجهٔ مطلوب است. □

در بعضی از مسأله‌های زیر، راه‌حلی را با استدلال معکوس عرضه می‌کنیم ولی بیان مجدد ایده‌ها با استدلال مستقیم را، به‌صورتی‌که در مسألهٔ قبل انجام دادیم، به عهدهٔ شما می‌گذاریم.

مسألهٔ ۱.۲.۶ نمونه‌ای خاص از پدیده‌ای کلی است که معمولاً چنین بیان می‌شود: «میانگین حسابی بر میانگین هندسی غالب است». اکنون چند اصطلاح را معرفی می‌کنیم. اگر a_1، a_2، ... و a_k عددهایی مثبت باشند «میانگین حسابی» آنها برابر است با

$$M = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$$

در تداول عام گاهی عدد M را «میانگین» a_1، a_2، ... و a_k می‌نامند. از طرف دیگر، «میانگین هندسی» این عددها برابر است با

$$G = [a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_k]^{\frac{1}{k}}$$

هر دو این روشها برای میانگین‌گیری از k عدد مثبت معقول‌اند؛ یک روش براساس جمع است و روش دیگر براساس ضرب. معقول است که بخواهیم رابطهٔ بین M و G را بدانیم.

مسألهٔ ۲.۲.۶ ثابت کنید که به‌ازای هر k عدد مثبت مانند a_1، a_2، ... و a_k نابرابری زیر برقرار است:

$$G \leqslant M$$

راه‌حل. روشی برای حل این مسأله، استقرا روی تعداد عددهایی است که از آنها میانگین می‌گیریم. این نابرابری را قبلاً در اولین مسألهٔ این بخش برای دو عدد ثابت کرده‌ایم.

اکنون فرض کنید که نابرابری برای j عدد ثابت شده باشد. یعنی فرض کنید می‌دانیم که

$$[a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_j]^{\frac{1}{j}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_j}{j} \tag{*}$$

نام عددها را عوض می‌کنیم: $a_1 = b_1^j$، $a_2 = b_2^j$، ... و $a_j = b_j^j$. دراین صورت، فرض استقرا، یعنی نابرابری (*)، تبدیل می‌شود به

$$b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_j \leqslant \frac{b_1^j + b_2^j + \cdots + b_j^j}{j}$$

و یا

$$j \times [b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_j] \leqslant b_1^j + b_2^j + \cdots + b_j^j \tag{†}$$

با نمادهای جدید می‌توانیم بگوییم که هدفمان ثابت کردن نابرابری زیر به استقراست:

$$(j+1) \times [b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_{j+1}] \leqslant b_1^{j+1} + b_2^{j+1} + \cdots + b_{j+1}^{j+1} \tag{‡}$$

اکنون نابرابری (‡) را بررسی می‌کنیم. فرض کنید bها صفر نباشند (می‌توانیم چنین فرض کنیم، چون اگر یکی از آنها صفر باشد، G صفر می‌شود و نابرابری مطلوب آشکارا برقرار است). دو طرف نابرابری را بر

b_{j+1}^{j+1} تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم $c_1 = \frac{b_1}{b_{j+1}}$، $c_2 = \frac{b_2}{b_{j+1}}$، ... و $c_j = \frac{b_j}{b_{j+1}}$. دراین صورت (‡) تبدیل می‌شود به

$$(j+1) \times [c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_j] \leqslant c_1^{j+1} + c_2^{j+1} + \cdots + c_j^{j+1} + 1$$

و یا

$$(j+1) \times [c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_j] - 1 \leqslant c_1^{j+1} + c_2^{j+1} + \cdots + c_j^{j+1} \qquad (**)$$

باید تحقیق کنیم که این نابرابری به‌ازای هر j عدد مثبت مانند c_1، ... و c_j برقرار است. می‌توانیم فرض استقرا، یعنی (†) را در مورد $c_1^{\frac{j+1}{j}}$، $c_2^{\frac{j+1}{j}}$، ... و $c_j^{\frac{j+1}{j}}$ اِعمال کنیم. معلوم می‌شود که

$$j \times \left[c_1^{\frac{j+1}{j}} \times c_2^{\frac{j+1}{j}} \times \cdots \times c_j^{\frac{j+1}{j}}\right] \leqslant c_1^{j+1} + c_2^{j+1} + \cdots + c_j^{j+1}$$

این اطلاعات را در (**) قرار می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم کافی است ثابت کنیم

$$(j+1) \times [c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_j] - 1 \leqslant j \times \left[c_1^{\frac{j+1}{j}} \times c_2^{\frac{j+1}{j}} \times \cdots \times c_j^{\frac{j+1}{j}}\right]$$

با قرار دادن $m = [c_1 c_2 \cdots c_j]^{\frac{1}{j}}$ می‌توانیم این نابرابری را بیشتر ساده کنیم. پس باید ثابت کنیم که به‌ازای هر عدد مثبت مانند m و هر عدد طبیعی مانند j،

$$(j+1)m^j - 1 \leqslant jm^{j+1}$$

[توجه کنید که این نابرابری چقدر ساده‌تر از نابرابری اصلی است؛ در اینجا غیر از اندیس j، فقط یک مجهول، m، داریم.]

می‌توان این نابرابری را به استقرا روی j ثابت کرد، ولی این استقرا در استقرا ممکن است گیج‌کننده باشد. اثبات را با محاسبهٔ جبری مستقیم انجام می‌دهیم:

$$(j+1)m^j - 1 - jm^{j+1} = -jm^j(m-1) + (m^j - 1)$$

ولی

$$m^j - 1 = (m-1)(m^{j-1} + m^{j-2} + \cdots + m^2 + m + 1)$$

(کافی است مثلاً تقسیم طولانی انجام دهید، یا ضرب طرف راست را انجام دهید.) پس می‌توانیم بنویسیم

$$(j+1)m^j - 1 - jm^{j+1} = (m-1)[-jm^j + m^{j-1} + m^{j-2} + \cdots + m^2 + m + 1]$$

$$= -(m-1)[(m^j - m^{j-1}) + (m^j - m^{j-2}) + \cdots + (m^j - m) + (m^j - 1)]$$

$$
\begin{aligned}
&= -(m-1)[m^{j-1}(m-1) + m^{j-2}(m^2-1) \\
&\qquad + \cdots + m(m^{j-1}-1) + (m^j - 1)] \\
&= -(m-1)[m^{j-1}(m-1) + m^{j-2}(m-1)(m+1) \\
&\qquad + \cdots + m(m-1)(m^{j-2} + m^{j-3} + \cdots + m + 1) \\
&\qquad + (m-1)(m^{j-1} + m^{j-2} + \cdots + m + 1)] \\
&= -(m-1)^2 \times (\text{عبارتی مثبت}) \\
&\leqslant 0
\end{aligned}
$$

پس نابرابری مطلوب برقرار و استقرا کامل است. □

اکنون دوباره راه‌حل مسألهٔ قبل را نگاه کنید. جالب‌ترین قسمت این راه‌حل نامگذاری حساب‌شدهٔ متغیرهاست. این فقط ترفندی نمادی نیست، چون از تقارنی ذاتی بهره‌برداری کرده‌ایم. حتی می‌توانستیم گونه‌ای از این تغییرهای نمادی را برای نابرابری سادهٔ مسألهٔ ۱.۲.۶ به‌کار گیریم. به‌خاطر آورید که می‌خواستیم ثابت کنیم

$$2ab \leqslant a^2 + b^2$$

فرض کنید $a \geqslant b$ و $b \neq 0$. دو طرف نابرابری را بر b^2 تقسیم کنید و قرار دهید $c = \frac{a}{b}$. دراین صورت $c \geqslant 1$ و نابرابری تبدیل می‌شود به

$$2c \leqslant c^2 + 1 \qquad \text{به‌ازای } c \geqslant 1،$$

نابرابری دومتغیره‌ای ناگهان به نابرابری‌یی یک‌متغیره تبدیل شد.

با این ساده‌سازیها روشهایی تازه نمایان می‌شوند. مثلاً قرار دهید $f(c) = 2c$ و $g(c) = c^2 + 1$. توجه کنید که $f(1) = g(1)$ و $f'(c) \equiv 2 \leqslant 2c = g'(c)$ (فقط کمی به حسابان متوسل شدیم). پس دو تابع f و g در $c = 1$ با هم برابرند و g سریعتر از f رشد می‌کند. نتیجه می‌شود که به‌ازای $c \geqslant 1$، $f(c) \leqslant g(c)$ و درستی نابرابری موردنظر تحقیق شده است.

آنچه در پشت صحنهٔ این بحث می‌گذرد این است که نابرابری عبارتهای شامل توان ممکن نیست درست باشد مگر اینکه توانهای دو طرف «متوازن» باشند. مثلاً نابرابری

$$a^3 + b^3 \leqslant 3ab + b^2$$

احتمالاً به‌ازای هر دو عدد مثبت مانند a و b درست نیست. برای اینکه مطمئن شوید، دو طرف را بر b^3 تقسیم کنید:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 1 \leqslant \frac{3a}{b^2} + \frac{1}{b}$$

a را ثابت بگیرید و b را در میان مقادیر مثبت به بینهایت میل دهید. نابرابری به $۰ \leqslant ۱$ تبدیل می‌شود که مطمئناً نادرست است. باز هم اشکال این است که توانهای دو طرف نابرابری ادعاشده متوازن نیستند.

اما توانهای نابرابری

$$۲ab \leqslant a^۲ + b^۲$$

متوازن‌اند. هر یک از توانها، یعنی هر یک از یک‌جمله‌ایهایی که در نابرابری ظاهر شده‌اند، از درجهٔ دو است. به همین دلیل است که تغییر متغیر $c = \frac{a}{b}$ کارساز است و به برهان دیگری منجر می‌شود.

تغییر متغیرهایی که در راه‌حل مسألهٔ ۲.۲.۶ انجام دادیم چیزی نیستند جز نسخهٔ پیچیده‌ای از $c = \frac{a}{b}$. این روش فنِّ قدرتمندی است که باید در زرادخانهٔ خود داشته باشید.

مسألهٔ ۳.۲.۶ ثابت کنید

$$۲ < \frac{۱}{\log_۲ \pi} + \frac{۱}{\log_۵ \pi}$$

راه‌حل. این نابرابری با نابرابریهایی که تاکنون بررسی کرده‌ایم فرق دارد، چون شامل عبارتهایی متعالی مانند تابع لگاریتم است.

مطمئناً می‌توانیم با ماشین‌حساب یا کامپیوتر همهٔ عبارتهای نابرابری را حساب کنیم. ولی این کار اجتناب از چالش است. آیا می‌توانیم مسأله را صرفاً با تفکر حل کنیم؟

به‌خاطر آورید که به‌ازای دو عدد مثبت مانند a و b،

$$\log_a b \equiv \frac{\ln b}{\ln a}$$

پس می‌توانیم نابرابری مطلوب را چنین بنویسیم:

$$۲ < \frac{۱}{\frac{\ln \pi}{\ln ۲}} + \frac{۱}{\frac{\ln \pi}{\ln ۵}}$$

دو طرف را در $\ln \pi$ ضرب و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$۲ \ln \pi \leqslant \ln ۲ + \ln ۵$$

و یا

$$\ln \pi^۲ \leqslant \ln ۱۰$$

پس (چون exp تابعی صعودی است)

$$e^{\ln \pi^۲} \leqslant e^{\ln ۱۰}$$

و یا

$$\pi^۲ \leqslant ۱۰ .$$

نابرابری اخیر مطمئناً درست است، چون می‌دانیم که $۳/۱۵ \leq \pi$. به این ترتیب برقراری نابرابری مطلوب ثابت و مسأله تمام می‌شود. □

مسألهٔ پیکارجوی ۴.۲.۶ تحقیق کنید که

$$۲ < \frac{۱}{\log_۲ \pi} + \frac{۱}{\log_\pi ۲}$$

مسألهٔ ۵.۲.۶ ثابت کنید

$$|\cos x + \sin x| \leqslant \sqrt{۲}$$

و برابری فقط وقتی برقرار است که $\sin ۲x = ۱$.

راه‌حل. این نابرابری هم متعالی است. اغلب راهی خوب برای درک $|\alpha|$ نوشتن آن به‌صورت $\sqrt{\alpha^۲}$ است. با این ایده می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} |\cos x + \sin x| &= \sqrt{(\cos x + \sin x)^۲} \\ &= \sqrt{\cos^۲ x + \sin^۲ x + ۲ \sin x \cos x} \\ &= \sqrt{۱ + ۲ \sin x \cos x} \\ &= \sqrt{۱ + \sin ۲x} \end{aligned}$$

روشن است که بیشترین مقداری که $\sin ۲x$ ممکن است داشته باشد ۱ است. پس

$$|\cos x + \sin x| \leqslant \sqrt{۲}$$

و این همان نابرابری مطلوب است. چون همهٔ رابطه‌هایی که به‌کار بردیم تساوی بودند، $|\cos x + \sin x|$ فقط درصورتی برابر با $\sqrt{۲}$ می‌شود که $\sqrt{۱ + \sin ۲x}$ برابر با $\sqrt{۲}$ باشد و این هم فقط درصورتی روی می‌دهد که $۱ + \sin ۲x = ۲$ یا $\sin ۲x = ۱$.

مسأله کامل حل شده است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۶.۲.۶ ثابت کنید

$$|\cos x - \sin x| \leqslant \sqrt{۲}$$

و برابری فقط درصورتی برقرار است که $\sin ۲x = -۱$.

مسألهٔ ۷.۲.۶ کدام بزرگتر است، $\sin(\cos x)$ یا $\cos(\sin x)$؟

راه‌حل. به‌خاطر داشته باشید که عبارتی ممکن است در محدوده‌ای از مقادیر x بزرگتر از عبارتی دیگر و در محدودهٔ دیگری از مقادیر x کوچکتر از آن عبارت باشد. راه‌کار ما این است که با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، مقایسهٔ دو عبارت متعالی را ساده‌تر کنیم.

کار را با اتحاد زیر شروع می‌کنیم:

$$\cos\left(\cos x + \frac{\pi}{۲}\right) = \cos(\cos x)\cos\frac{\pi}{۲} - \sin(\cos x)\sin\frac{\pi}{۲} = -\sin(\cos x)$$

این اتحاد راهی دیگر برای نوشتن یکی از عبارتها در اختیارمان می‌گذارد. می‌نویسیم

$$\cos(\sin x) - \sin(\cos x) = \cos(\sin x) + \cos\left(\cos x + \frac{\pi}{۲}\right) \qquad (*)$$

اکنون از مثلثات مقدماتی می‌دانیم که رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\cos X + \cos Y = ۲\cos\left(\frac{X+Y}{۲}\right)\cos\left(\frac{X-Y}{۲}\right) \qquad (**)$$

[راهنمایی: برای تحقیق این رابطه بنویسید

$$\cos X = \cos\left(\frac{X+Y}{۲} + \frac{X-Y}{۲}\right)$$

و

$$\cos Y = \cos\left(\frac{X+Y}{۲} - \frac{X-Y}{۲}\right)$$

اکنون دستورهای معمول مجموع/تفاضل را برای کسینوسها بنویسید و نتایج را با هم جمع کنید.]

رابطهٔ (**) را در طرف راست (*) اعمال می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\cos(\sin x) - \sin(\cos x)\\
&= ۲\cos\left(\frac{\sin x + \cos x + \frac{\pi}{۲}}{۲}\right)\cos\left(\frac{\sin x - \cos x - \frac{\pi}{۲}}{۲}\right)\\
&= ۲\cos\left(\frac{\sin x + \cos x + \frac{\pi}{۲}}{۲}\right)\cos\left(\frac{\cos x - \sin x + \frac{\pi}{۲}}{۲}\right) \qquad (\dagger)
\end{aligned}$$

در آخرین تساوی از زوج بودن تابع کسینوس استفاده کرده‌ایم. اکنون چون بنابر مسألهٔ ۵.۲.۶،

$$|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{۲}$$

و چون $۳/۱۴۱ \approx \pi$ و $۱/۴۱۴ \approx \sqrt{۲}$، مطمئناً می‌توانیم بنویسیم

$$۰ < \left|\frac{\sin x + \cos x + \frac{\pi}{۲}}{۲}\right| \leqslant \frac{۱/۴۱۵ + ۱/۵۸}{۲} < ۱/۵ < \frac{\pi}{۲}$$

به همین ترتیب، با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ پیکارجوی ۶.۲.۶ می‌توانیم بنویسیم

$$۰ < \left|\frac{\cos x - \sin x + \frac{\pi}{۲}}{۲}\right| < \frac{\pi}{۲}$$

به همین ترتیب، با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ پیکارجوی ۶.۲.۶ می‌توانیم بنویسیم

$$\circ < \left|\frac{\cos x - \sin x + \frac{\pi}{۲}}{۲}\right| < \frac{\pi}{۲}$$

[توجه کنید که $|\sin x + \cos x|$ و $|\cos x - \sin x|$ کوچکتر از آن‌اند که صورتها صفر شوند.] اکنون توجه کنید که اگر $\frac{\pi}{۲} > |\omega| > \circ$، $\cos\omega$ مثبت است. پس نتیجه می‌گیریم که دو عامل طرف راست (†) مثبت‌اند. پس $\cos(\sin x) - \sin(\cos x)$ به‌ازای هر مقداری از آرگومان x همیشه مثبت است.

در نتیجه، به‌ازای هر مقدار حقیقی مانند x،

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$$

□

۳.۶ مثلثات و ایده‌های مربوط به آن

ایده‌های مثلثات به قدمت ریاضیات یونان باستان‌اند. مثلثات که ابتدا برای مساحی و درک عددهای گویا به‌کار می‌رفت امروزه بخشی از شالودهٔ ریاضیات است. چون مثلثات با ایده‌هایی اساسی چون تناسب، همنهشتی زاویه‌ها و مثلثهای متشابه سر و کار دارد، منبعی غنی از مسأله‌هاست.

مسألهٔ ۱.۳.۶ فرض کنید α زاویه‌ای باشد که $\tan\frac{\alpha}{۲}$ گویا باشد. تحقیق کنید که $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هر دو گویا هستند.

راه‌حل. می‌دانیم که

$$۱ + \tan^{۲}\frac{\alpha}{۲} = \frac{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}} + \frac{\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}} = \frac{۱}{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}$$

چون $\tan\frac{\alpha}{۲}$ گویاست، نتیجه می‌گیریم که طرف چپ برابری اخیر گویاست و بنابراین طرف راست این برابری هم گویاست. نتیجه می‌گیریم که $\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}$ گویاست.

اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos^{۲}\frac{\alpha}{۲} - \sin^{۲}\frac{\alpha}{۲} = \cos^{۲}\frac{\alpha}{۲} - \left[۱ - \cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}\right]\\ &= ۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲} - ۱\end{aligned}$$

محاسبات قبلیمان ما را مطمئن می‌سازد که طرف راست اتحاد اخیر گویاست و بنابراین طرف چپ این اتحاد هم گویاست. نتیجه می‌گیریم که $\cos\alpha$ گویاست. نیمی از کارمان تمام شد.

اکنون ملاحظه کنید که

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin ۲\frac{\alpha}{۲}}{\cos ۲\frac{\alpha}{۲}}$$

$$= \frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{\cos^۲\frac{\alpha}{۲} - \sin^۲\frac{\alpha}{۲}}$$

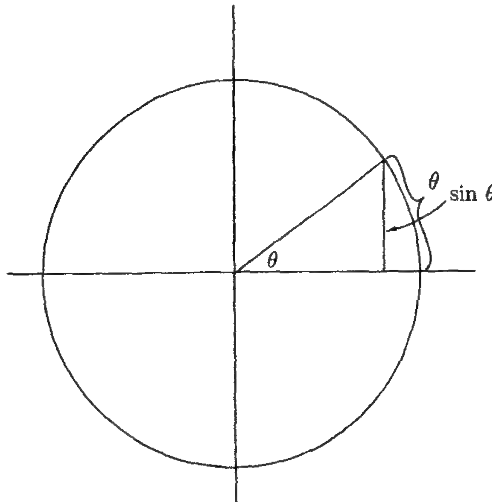
$$= \frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱ - \tan^۲\frac{\alpha}{۲}}$$

در آخرین تساوی، صورت و مخرج را بر $\cos^۲\frac{\alpha}{۲}$ تقسیم کرده‌ایم. می‌دانیم که هر یک از مؤلفه‌های طرف راست اتحاد اخیر گویاست. پس نتیجه می‌گیریم که $\tan\alpha$، یعنی $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، گویاست. چون $\cos\alpha$ گویاست، نهایتاً نتیجه می‌گیریم که $\sin\alpha$ گویاست. به این ترتیب مسأله کامل حل شده است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۲.۳.۶ عکس مسألهٔ قبل را بیان و ثابت کنید.

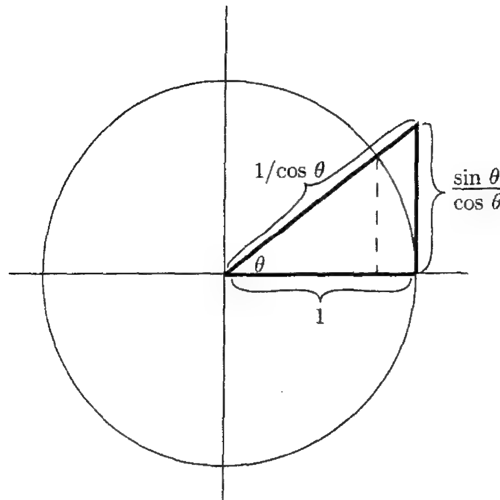
مسألهٔ ۳.۳.۶ اگر θ زاویه‌ای حاده و مثبت، برحسب رادیان، باشد ثابت کنید که $\tan\theta > \theta$.

راه‌حل. شکل ۱۵۰ را ببینید. این شکل نمایش معمول زاویهٔ θ در مثلثات است. این شکل آشکارا نشان می‌دهد که $\sin\theta < \theta$. اما مسألهٔ ما این است که تخمینی از بالا برای θ بیابیم.



شکل ۱۵۰

اکنون شکل ۱۵۱ را ببینید. این شکل همان شکل ۱۵۰ است جز اینکه در آن بر پاره‌خطهایی دیگر تأکید شده است. توجه کنید که طول قاعدهٔ مثلثی که ضلعهایش سیاه شده است ۱ است. با



شکل۱۵۱

استفاده از تشابه مثلثها (به مثلثی که ضلعش خط‌چین است توجه کنید) می‌بینیم که طول وتر $\frac{۱}{\cos\theta}$ و طول ارتفاع $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ است.

همچنین توجه کنید که طول ارتفاع این مثلث بزرگتر از طول کمان روبه‌رو به آن در دایره است (دلیلی قانع‌کننده برای این ادعا بیاورید). اما طول این کمان θ است. نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} > \theta$$

این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

مسألهٔ پیکارجوی ۴.۳.۶ (دشوار) اگر θ زاویه‌ای حاده برحسب رادیان باشد، توضیح دهید که چرا

$$\theta < \frac{\sin\theta + \tan\theta}{۲}$$

مسألهٔ ۵.۳.۶ θ را زاویه‌ای دلخواه بگیرید. توضیح دهید که چرا

$$\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۴}\cos\frac{\alpha}{۸} = \frac{\sin\alpha}{۸\sin\frac{\alpha}{۸}}$$

راه‌حل. پیشرفت در مثلثات بدون دانستن اساسی‌ترین اتحادهای مثلثاتی تقریباً ناممکن است. در این مسأله از اتحاد $\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$ استفاده می‌کنیم. با درنظر داشتن این اتحاد وسوسه می‌شویم که برابری مطلوب را چنین بنویسیم:

$$\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۴}\left[۲\cos\frac{\alpha}{۸}\sin\frac{\alpha}{۸}\right] = \frac{\sin\alpha}{۴}$$

دراین‌صورت، طرف چپ ساده می‌شود و برابری را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۴}\sin\frac{\alpha}{۴}=\frac{\sin\alpha}{۴}$$

اکنون می‌توانیم دو طُرف را در ۲ ضرب و جمله‌های طرف چپ را گروهبندی کنیم:

$$\cos\frac{\alpha}{۲}\left[۲\cos\frac{\alpha}{۴}\sin\frac{\alpha}{۴}\right]=\frac{\sin\alpha}{۲}$$

این برابری را ساده می‌کنیم:

$$\cos\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{\sin\alpha}{۲}$$

باز هم دو طرف برابری را در ۲ ضرب می‌کنیم. توجه کنید که اکنون به همان دستور دو برابر زاویه که در ابتدا بیان کردیم رسیده‌ایم. چون همهٔ مراحل کارمان برگشت‌پذیرند، درستی اتحاد مطلوب را تحقیق کرده‌ایم. □

مسألهٔ پیکارجوی ۶.۳.۶ ببینید می‌توانید اتحاد مسألهٔ قبل را طوری تعمیم دهید که در طرف چپ چهار جمله باشد؟ آیا دستور مشابهی که در طرف راستش فقط کسینوس باشد وجود دارد؟

مسألهٔ ۷.۳.۶ معادلهٔ

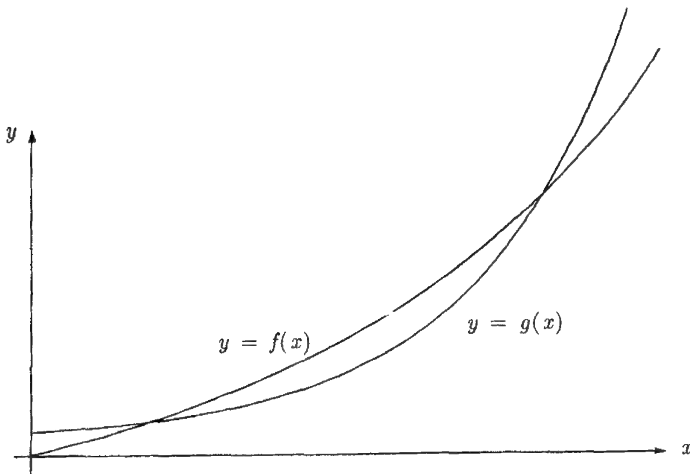
$$\tan x=\tan(x+۱۰^\circ)\cdot\tan(x+۲۰^\circ)\cdot\tan(x+۳۰^\circ)\qquad(*)$$

به‌ازای $۰ < x < ۶۰^\circ$ چند جواب دارد؟ [توجه کنید که زاویه‌ها برحسب درجه‌اند.]

راه‌حل. ابتدا نمودار تابع طرف چپ معادله را با ماشین‌حساب یا کامپیوتر رسم کنید. نمودار تابع طرف راست را هم در همان دستگاه مختصات رسم کنید. از این نمودارها چه ایده‌ای می‌گیرید؟

کمی به آنالیز متوسل می‌شویم. فلسفه‌ای را که در ابتدای کتاب بیان کردیم، یعنی تجربه کردن را، به‌کار می‌گیریم. ابتدا توجه کنید که تابع تانژانت وقتی آرگومانش بین ۰° و ۹۰° باشد تابعی اکیداً صعودی است. پس طرف چپ $(*)$ اکیداً صعودی است. همچنین هر یک از عاملهای طرف راست در محدودهٔ $۰ < x < ۶۰^\circ$ اکیداً صعودی است؛ پس تابع طرف راست اکیداً صعودی است.

تابع طرف چپ $(*)$ را $f(x)$ و تابع طرف راست $(*)$ را $g(x)$ می‌نامیم. توجه کنید که $f(۰)=۰$ و $g(۰)>۰$. پس نمودار f پایینتر از نمودار g شروع می‌شود. اما می‌توانید با استفاده از ماشین‌حساب (مطمئن شوید که در حالت درجه است!) یا جدولهای مثلثاتی یا کامپیوتر حساب کنید که $f(۷^\circ)>g(۷^\circ)$. خلاصه، فرض کنید $h(x)=f(x)-g(x)$. دراین‌صورت $h(۰)<۰$ و $h(۷^\circ)>۰$. چون h پیوسته است نتیجه می‌گیریم که مقداری هست که به‌ازای آن $h=۰$، یعنی جایی هست که در آن f برابر g است. پس ثابت کرده‌ایم که معادلهٔ $(*)$ دست‌کم یک جواب دارد.



شکل۱۵۲

درواقع بیش از این می‌توانیم پیش برویم. چون باز هم نمودار g در ۰ بالاتر از نمودار f شروع می‌شود، و وقتی $۴۵^\circ < x < ۶۰^\circ$ هر عامل سمت راست بزرگتر از ۱ و بزرگتر از تنها عامل سمت چپ است، نمودار g نهایتاً بالاتر از نمودار f است. در این میان، مثلاً در $x = ۷^\circ$ نمودار g پایینتر از نمودار f است. چنین چیزی فقط درصورتی ممکن است روی دهد که نمودارها دست‌کم دوبار یکدیگر را قطع کنند (شکل ۱۵۲ را ببینید). نتیجه می‌گیریم که نمودارهای f و g دست‌کم دوبار یکدیگر را قطع می‌کنند. [توجه کنید که شکل ۱۵۲ به مقیاس رسم نشده است؛ این شکل فقط نمایش تصویری چیزی است که بیان کردیم.]

درواقع نمودارها دقیقاً دوبار یکدیگر را قطع می‌کنند. اثبات دقیق این موضوع بدون استفاده از حسابان نسبتاً دشوار است. این بحث نشان می‌دهد که فقط با عقل سلیم چقدر می‌توان پیش رفت.

باز هم نرم‌افزار جبری کامپیوتر خود را دوستی بدانید که در چنین مواقعی می‌توانید به او پناه ببرید. نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید (مطمئن شوید که در حالت درجه کار می‌کنید). بخشی از نمودار را که در محدودهٔ $۰ < x < ۱۰^\circ$ قرار دارد بزرگ کنید. نمودار چند نقطهٔ تقاطع را نشان می‌دهد؟ □

تمرین فصل ۶

۱. ثابت کنید که اگر $۰ \leqslant a, b, c, d \leqslant ۱$، آنگاه

$$(۱-a)(۱-b)(۱-c)(۱-d) \geqslant ۱-a-b-c-d$$

۲. اگر a، b، c و d عددهایی حقیقی و مثبت باشند ثابت کنید

$$\frac{(a^۲+۱)(b^۲+۱)(c^۲+۱)(d^۲+۱)}{abcd} \geqslant ۱۶$$

۳. فرض کنید k عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد. ثابت کنید که عبارت

$$\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{k}$$

عددی صحیح نیست.

۴. توضیح دهید که چرا $۲۲۲۲^{۵۵۵۵}+۵۵۵۵^{۲۲۲۲}$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

۵. توضیح دهید که چرا $۱۱^{۱۰}-۱$ بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

۶. فرض کنید N عددی طبیعی باشد. ثابت کنید N مضربی صحیح دارد که همهٔ رقمهایش ۰ و ۱ است. ثابت کنید که اگر N نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد نه بر ۵، مضربی از N هست که همهٔ رقمهایش ۱ است.

۷. فرض کنید N عددی طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰۰ باشد. کدام‌یک بزرگتر است، $۹۹^N+۱۰۰^N$ یا ۱۰۱^N؟

۸. اگر $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k عددهایی حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_k)\left(\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_k}\right)\geqslant k^۲$$

۹. برای نوشتن همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا $۱۰^۸$ چند ۷ به‌کار می‌رود؟

۱۰. شرطی دربارهٔ عدد طبیعی n پیدا کنید تا مطمئن شوید $۱^n+۲^n+۳^n+۴^n$ بر ۵ بخش‌پذیر است؟ [راهنمایی: یک جواب «$n=۱$» است. اما در جست‌وجوی «شرطی» هستیم که بی‌نهایت مقدار n در آن صدق کنند. بهتر از این، یافتن شرطی است که هم لازم باشد هم کافی.]

۱۱. ثابت کنید عدد

$$\gamma_n=\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}\right)-\ln n$$

در شرط $|\gamma_n|\leqslant ۴$ صدق می‌کند. [راهنمایی: شکلی رسم کنید.]

۱۲. جوابهای حقیقی معادلهٔ زیر را بیابید:

$$|x+۱|-|x|+۳|x-۱|-۲|x-۲|=x+۲$$

۱۳. به سری زیر توجه کنید:

$$\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots$$

این سری همساز است و می‌دانیم که واگراست (برای مطالعهٔ جزئیات، کتاب حسابانتان را ببینید). ثابت کنید که اگر همهٔ جمله‌هایی را که در مخرجشان ۷ هست کنار بگذاریم سری همگرا می‌شود. آیا می‌توانید مجموع این سری را تخمین بزنید؟

۱۴. توضیح دهید که چرا اگر $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k عددهایی طبیعی باشند به‌طوری‌که

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k \leqslant n$$

آنگاه عدد

$$\frac{n!}{(a_۱)!(a_۲)!\cdots(a_k)!}$$

عددی صحیح است.

۱۵. فرض کنید p عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد. باقیماندهٔ تقسیم $p^۲$ بر ۱۲ چیست؟ چرا باقیماندهٔ چنین تقسیمی همیشه یکسان است؟

۱۶. همهٔ عددهای صحیح مانند x، y و z را بیابید به‌طوری‌که

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲xyz$$

۱۷. اولین رقم $۲^{۴۳}$ چیست؟

۱۸. پسر ۱۰ ساله‌ای ۱۰ دلار در بانک پس‌اندازکرده است. او تصمیم دارد در بیست‌ویکمین سالروز تولدش حساب را ببندد و پولش را بگیرد. آیا سود مرکب ۵٪ روزانه به نفع این پسر است یا سود مرکب ۵٫۱٪ هفتگی؟

۱۹. a و r را دو عدد حقیقی بگیرید. فرض کنید k عددی صحیح و بزرگتر از ۰ باشد. مجموع زیر را حساب کنید:

$$a + a\cdot r + a\cdot r^۲ + \cdots + a\cdot r^k$$

[راهنمایی: یا از استقرا استفاده کنید یا ترفندی جبری را به‌کار گیرید.]

۲۰. شخصی اتومبیلی می‌خرد به قیمت ۲۰۰۰۰ دلار. او ۳۵۰۰ دلار پول دارد. بقیهٔ پول را با وامی سه ساله (با بازپرداخت در ۳۶ قسط مساوی) با بهرهٔ ۵٪ سالانه تأمین می‌کند. مقدار قسط ماهانهٔ او چقدر باید باشد؟ [توجه: ممکن است نتیجهٔ مسألهٔ ۱۹ را سودمند بیابید.]

۲۱. حجم کره‌ای برابر با مساحت سطح آن است و هر دو این عددها برابرند با حاصل‌ضرب عددی دورقمی در π. حجم یا مساحت سطح کره چند است؟

۲۲. اگر x، y و z عددهایی حقیقی باشند به‌طوری‌که $x + y + z = ۱$، نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$xy + yz + xz < \frac{۱}{۲}$$

۲۳. کدام‌یک بزرگتر است، $۱۰^{\frac{۱}{۱۰}}$ یا $۲^{\frac{۱}{۲}}$؟

۲۴. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$۸(۴^x + ۴^{-x}) - ۵۴(۲^x + ۲^{-x}) + ۱۰۱ = ۰$$

[راهنمایی: از تغییر متغیرهای $y = ۲^x$ و $z = y + \frac{۱}{y}$ استفاده کنید.]

۲۵. اگر

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ = ab + bc + cd + da$$

ثابت کنید

$$a = b = c = d$$

[راهنمایی: مربعها را کامل کنید؛ مجموع چهار مربع صفر می‌شود.]

۲۶. این مسأله را به آیزاک نیوتون نسبت می‌دهند.

> m گاو n چراگاه را در k روز از علف پاک می‌کنند. m' گاو n' چراگاه را در k' روز از علف پاک می‌کنند. m'' گاو n'' چراگاه را در k'' روز از علف پاک می‌کنند.

چه رابطه‌ای بین عددهای m، n، k، m'، n'، k'، m''، n'' و k'' وجود دارد؟.

۲۸. ثابت کنید عددی طبیعی که همهٔ رقمهایش ۱ باشند مربع کامل نیست (تنها استثنا اولین عدد طبیعی، یعنی ۱، است).

۲۸. توضیح دهید که چرا هر یک از عددهای ۴۹، ۴۴۸۹، ۴۴۴۸۸۹، ۴۴۴۴۸۸۸۹، ... مربع کامل است.

۲۹. [از یکی از المپیادهای اخیر] مجموعه‌ای از عددهای طبیعی مانند A بسازید با این ویژگی که اگر S مجموعهٔ نامتناهی دلخواهی از عددهای اول باشد، A شامل عضوی باشد که حاصل‌ضرب دست‌کم دو عضو متمایز S باشد و متمم A در عددهای طبیعی نیز شامل عضوی باشد که حاصل‌ضرب دست‌کم دو عضو متمایز S باشد. [راهنمایی: صورت مسأله را به‌دقت بازگو کنید. خیالپردازی نکنید؛ این مسأله ساده است.]

۳۰. با استفاده از دستور دوجمله‌ای برهان دیگری عرضه کنید برای اینکه هر مجموعهٔ k عضوی ۲^k زیرمجموعه دارد.

۳۱. اگر α و β دو عدد گنگ باشند آیا ممکن است α^β گویا باشد؟

۳۲. $\cos ۳۶^\circ - \cos ۷۲^\circ$ را حساب کنید.

۳۳. اگر θ زاویه‌ای حاده باشد و $\sin ۲\theta = a$، $\sin\theta + \cos\theta$ را حساب کنید.

۳۴. اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۵}$ و $۰ \leqslant x < \pi$، $\tan x$ را حساب کنید.

۳۵. فرض کنید x عددی مثبت باشد به‌طوری‌که

$$x^{(x^{(x^{\cdots}}} = ۲$$

مقدار x را تعیین کنید.

۳۶. در مسألهٔ ۳۵ چه عدد مثبت دیگری غیر از ۲ معادله‌ای ایجاد می‌کند که برحسب x جواب دارد؟ [این مسأله را اولین بار گاوس مطالعه کرد.]

۳۷. عقربه‌های ساعتی معمولی با دو عقربه هنگام ظهر روی هم قرار می‌گیرند. زمان بعدی که عقربه‌ها روی هم قرار می‌گیرند چیست؟ بعد از آن در چه زمانی دوباره عقربه‌ها روی هم قرار می‌گیرند. در ۱۲ ساعت کلاً چند بار عقربه‌ها روی هم قرار می‌گیرند؟

۳۸. توضیح دهید که چرا اگر p و q عددهایی صحیح و فرد باشند، چندجمله‌ای $x^۲ + ۲px + ۲q$ ریشهٔ گویا ندارد.

۳۹. فرض کنید a و b عددهایی صحیح و فرد باشند و n عددی طبیعی باشد. توضیح دهید که چرا $a^۳ - b^۳$ بر ۲^n بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر $a - b$ بر ۲^n بخش‌پذیر باشد.

۴۰. α، β و γ طول ضلعهای مثلثی قائم‌الزاویه‌اند و γ طول وتر مثلث است. اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ باشد، توضیح دهید که چرا $\gamma^n > \alpha^n + \beta^n$.

۴۱. اگر n عددی طبیعی باشد توضیح دهید که چرا

$$(n + ۲)^۳ \neq n^۳ + (n + ۱)^۳$$

۴۲. فرض کنید j عددی طبیعی باشد، توضیح دهید که چرا ممکن نیست

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{۲j + ۱}$$

عددی صحیح باشد.

۴۳. اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد توضیح دهید که چرا ممکن نیست $۳^n + ۱$ بر ۲^n بخش‌پذیر باشد.

۴۴. چند عدد طبیعی پنج رقمی وجود دارد که رقمهایشان ۱ یا ۲ یا ۳ باشند؟ در چند تا از این عددها هر یک از رقمهای ۱، ۲ و ۳ دست‌کم یک بار به‌کار رفته است؟

۴۵. اگر n عددی طبیعی باشد ثابت کنید که

$$۵^n + ۲ \times ۳^{n-۱} + ۱$$

بر ۸ بخش‌پذیر است.

۴۶. اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ باشد توضیح دهید که چرا

$$(۱ \times ۲ \times \cdots \times n)^۲ > n^n$$

۴۷. فرض کنید a عددی صحیح باشد به‌طوری‌که رقم دهگان $a^۲$، ۷ باشد. رقم یکان $a^۲$ چه باید باشد؟

۴۸. سه عدد طبیعی متمایز بیابید که مجموع معکوسهایشان عددی صحیح باشد.

۴۹. ثابت کنید چندجمله‌ای $x^۴ + ۲x^۲ + ۲x + ۲$ حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای به شکل $x^۲ + ax + b$ و $x^۲ + cx + d$ نیست، به‌طوری‌که a، b، c و d عددهایی صحیح باشند.

۵۰. اگر $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n عددهای طبیعی و متمایز باشند و هیچ‌یک از آنها بر هیچ عدد اول بزرگتر از ۳ بخش‌پذیر نباشد، ثابت کنید

$$\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_n} < ۳$$

۵۱. فرض کنید $\{a_j\}$ دنباله‌ای حسابی و غیرثابت باشد. یعنی به‌ازای عددهایی ثابت مانند a و r به‌طوری‌که $r \neq ۰$،

$$a_۱ = a$$

$$a_۲ = a + r$$

$$a_۳ = a + ۲r$$

$$a_۴ = a + ۳r$$

$$\vdots$$

ثابت کنید ممکن نیست همهٔ a_jها اول باشند.

۵۲. توضیح دهید که چرا اگر n عددی طبیعی باشد ممکن نیست

$$n(n + ۱)(n + ۲)(n + ۳)$$

مربع کامل باشد.

۵۳. مجموع همهٔ عددهای چهار رقمی متمایزی را بیابید که در آنها فقط رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ و هر یک از این رقمها حداکثر یک‌بار به‌کار رفته باشد.

۵۴. فرض کنید $a > ۰$. عددهای a، $۲a$، $۳a$، ... و $(n - ۱)a$ را به‌ازای عددی طبیعی مانند n درنظر بگیرید. ثابت کنید که یکی از این عددها باید حداکثر $\frac{۱}{n}$ با عددی صحیح اختلاف داشته باشد.

۵۵. x و y را دو عدد صحیح بگیرید. توضیح دهید که چرا فقط اگر عبارت $۹x + ۵y$ بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد، عبارت $۲x + ۳y$ نیز بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۵۶. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را بیابید به‌طوری‌که $۲^n + ۱$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۵۷. n را عددی طبیعی بگیرید و فرض کنید n، k عامل اول متمایز داشته باشد (هریک از این عاملها ممکن است به توانی رسیده باشد؛ مثلاً $۳ \times ۲^۲ = ۱۲$ و می‌گوییم ۱۲ دو عامل اول متمایز دارد). ثابت کنید

$$\log n \geqslant k \log ۲$$

۵۸. فرض کنید

$$a_1 \times a_2 + a_2 \times a_3 + \cdots + a_n \times a_1 = 0$$

(هریک از a_jها یا ۱ است یا ۱−). ثابت کنید n بر ۴ بخش‌پذیر است.

۵۹. اگر n عددی طبیعی باشد ثابت کنید $n^{n-1} - 1$ همیشه بر $(n-1)^2$ بخش‌پذیر است.

۶۰. همتایی برای مسألهٔ ۵.۳.۶ بیابید که در طرف چپ چهار جمله در هم ضرب شده باشند.

۶۱. ثابت کنید که اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ باشد، عدد

$$n^2(n^2-1)(n^2-4)$$

بر ۳۶۰ بخش‌پذیر است.

۶۲. اگر m و n دو عدد صحیح باشند و $m > n$، توضیح دهید که چرا

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

۶۳. a و b دو عدد طبیعی‌اند. اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد ۱۲ وکوچکترین مضرب مشترک آنها ۴۳۲ باشد، تعیین کنید که a و b دقیقاً چه عددهایی هستند.

۶۴. ثابت کنید که عدد

$$\underbrace{11111\cdots11}_{\text{۹۱ بار}}$$

عددی اول نیست.

۶۵. ثابت کنید که اگر m، n و k عددهایی طبیعی باشند و $m+n+k$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد، $m^3+n^3+k^3$ هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

۶۶. ثابت کنید که هر عدد اول فرد مانند p تفاضل مربعهای دو عدد صحیح است؛ برای هر p چنین تجزیه‌ای را فقط به یک طریق می‌توان انجام داد.

۶۷. همهٔ سه‌تاییها از عددهای طبیعی مانند (m,n,p) را بیابید که $m^2+n^2=p^2$ (اینها را سه‌تاییهای فیثاغورسی می‌نامیم). [راهنمایی: بنویسید $a=p+n$ و $b=p-n$. معادله به $m^2=ab$ تبدیل می‌شود و a و b یا هر دو فردند یا هر دو زوج.]

۶۸. همه دستور تعیین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دومی مانند $x^2-3x-5=0$ را می‌دانیم. در این مسأله فنِّ دیگری، به‌نام روش کسرهای مسلسل، را بیان می‌کنیم. می‌نویسیم

$$x = \frac{3x+5}{x}$$

$$= 3 + \frac{5}{x}$$

$$= ۳ + \cfrac{۵}{۳ + \frac{۵}{x}}$$

$$= ۳ + \cfrac{۵}{۳ + \cfrac{۵}{۳+\frac{۵}{x}}}$$

$$= \cdots$$

این روال را پنج بار تکرار کنید و به جای آخرین x عدد ۳ بگذارید. سپس مقدار x را حساب، و این مقدار را با مقداری که از دستور متداول به‌دست می‌آید مقایسه کنید. چند بار تکرار روال کسرهای مسلسل لازم است تا دقت یک رقم اعشار حاصل شود؟ برای رسیدن به دقت دو رقم اعشار چند تکرار لازم است؟

۶۹. چندجمله‌ای $x^{۸} + x^{۴} + ۱$ را به عاملهایی چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی که درجهٔ هیچ‌کدام بیشتر از ۲ نباشد تجزیه کنید.

۷۰. توضیح دهید که چرا $\cos^{۴}\theta$ را به‌ازای ثابتهای مناسبی مانند α، β، γ، δ و τ می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\cos^{۴}\theta = \alpha\cos\theta + \beta\cos ۲\theta + \gamma\cos ۳\theta + \delta\cos ۴\theta + \tau$$

۷۱. [هالموس [HAL]] مجموع رقمهای مجموع رقمهای مجموع رقمهای عدد $۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ چیست؟

۷۲. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$\frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times (۲n-۱)}{۲ \times ۴ \times \cdots \times (۲n)} < \frac{۱}{\sqrt{n}}$$

۷۳. اگر طول دو ساق مثلثی قائم‌الزاویه مربعهای دو عدد صحیح باشند ثابت کنید طول وتر مثلث عددی صحیح نیست.

۷۴. همهٔ جفتها از عددهای صحیح مانند (m,n) را بیابید به‌طوری‌که $m + n = m \times n$.

۷۵. n را عددی طبیعی بگیرید. توضیح دهید که چرا همیشه $n^{۱۱} - n$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است. توضیح دهید که چرا همیشه $n^{۱۳} - n$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۷۶. $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$، ... را فهرست عددهای طبیعی اول، به ترتیب، بگیرید. یعنی $p_۱ = ۲$، $p_۲ = ۳$، $p_۳ = ۵$، .... توضیح دهید که چرا مجموع

$$\frac{۱}{p_۱} + \frac{۱}{p_۲} + \frac{۱}{p_۳} + \cdots$$

بی‌کران بزرگ می‌شود.

۷۷. $x^{۱۰} + x^{۵} + ۱$ را به دو طریق تجزیه کنید:

۱. به‌صورت حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح؛

۲. به‌صورت حاصل‌ضرب پنج چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی (که ممکن است صحیح نباشند).

[راهنمایی: به این فکر کنید که درجهٔ چندجمله‌ایها چه باید باشد. آیا ممکن است چندجمله‌ایی با درجهٔ ۱ داشته باشیم؟ آیا ممکن است چندجمله‌ایی ریشهٔ حقیقی داشته باشد؟ چرا؟]

۷۸. چندجمله‌ایی از درجهٔ ۲ با ضرایب حقیقی بیابید که عامل دو تا از چندجمله‌ایهای

$$x^{۳۹۸۶} + x^{۱۹۹۳} + ۱, \quad x^{۳۹۸۸} + x^{۱۹۹۴} + ۱, \quad x^{۳۹۹۰} + x^{۱۹۹۵} + ۱$$

باشد ولی عامل هر سه آنها نباشد.



مسأله‌های گوناگون

۱.۷ رد شدن از رودخانه و تمرینهایی مشابه

رده‌ای از مسأله‌ها هست که قدمتشان به قرون وسطا می‌رسد و به نویسندگانی چون الکوین و تارتاگلیا نسبت داده شده‌اند. در این مسأله‌ها گروهی از آدمها یا حیوانات باید با قایقی کوچک که محدودیتهای گوناگونی بر آن اعمال می‌شود از رودخانه‌ای بگذرند. مسألهٔ ۱.۱.۷ مثالی ساده از این نوع مسأله‌هاست:

مسألهٔ ۱.۱.۷ دو مرد می‌خواهند همراه با همسرانشان از رودخانه‌ای بگذرند. آنها قایق کوچکی در اختیار دارند که فقط گنجایش دو نفر را دارد. هیچ‌کدام از مردها راضی نمی‌شود که همسرش با مرد دیگر جایی باشد که خودش حضور ندارد. محدودیت دیگری نیست. این چهار نفر چگونه می‌توانند از رودخانه بگذرند؟ کمترین تعداد رفت‌وآمدهای قایق چقدر است؟

راه‌حل. دو مرد را $H_۱$ و $H_۲$ و همسرانشان را به ترتیب $W_۱$ و $W_۲$ می‌نامیم.

فرض کنید در اولین سفر $H_۱$ و $W_۱$ از رودخانه بگذرند. یک نفر باید برگردد. این یک نفر $W_۱$ نیست، چون اگر او برگردد در ساحل رودخانه با $H_۲$ خواهد بود درحالی‌که $H_۱$ حضور ندارد. پس $H_۱$ برمی‌گردد. اکنون $H_۲$ و $W_۲$ نباید از رودخانه بگذرند، چون دراین‌صورت $H_۲$ در ساحل دیگر رودخانه $W_۱$ را می‌بیند درحالی‌که $H_۱$ حضور ندارد. پس در سفر دوم باید $H_۱$ و $H_۲$ از رودخانه بگذرند. البته در ساحل باید $H_۱$ با $W_۱$ بماند تا قاعده نقض نشود. اکنون $H_۲$ برمی‌گردد و سپس $H_۲$ و $W_۲$ از رودخانه می‌گذرند.

با پنج رفت و برگشت به هدف مسأله رسیده‌ایم. روشن است که تعداد رفت و برگشتها باید فرد باشد. پس اگر بتوان با تعداد رفت و برگشتهای کمتری به این هدف رسید، این تعداد باید سه باشد. ولی

در هر سفر، غیر از آخرین سفر، فقط یک نفر در ساحل روبه‌رو پیاده می‌شود. پس در سه رفت و برگشت فقط ۲ + ۱ نفر در ساحل روبه‌رو پیاده می‌شوند و به هدف مسأله نمی‌رسیم. □

مسألهٔ پیکارجوی ۲.۱.۷ آیا در مسألهٔ قبل می‌توانید هر چهار نفر را با پنج رفت و برگشت به ساحل روبه‌رو برسانید به‌شرطی که در اولین سفر H_1 و W_1 با هم از رودخانه نگذرند؟ [البته می‌توانید با گذراندن H_2 و W_2 در اولین سفر این کار را بکنید؛ ولی آیا می‌توانید راه‌حلی بیابید که واقعاً متفاوت باشد؟] اگر شرط فقط پنج رفت و برگشت را کنار بگذاریم آیا می‌توانید این کار را بکنید؟

مسألهٔ پیکارجوی ۳.۱.۷ اکنون فرض کنید که سه مرد می‌خواهند همراه با همسرانشان از رودخانه بگذرند و همان قاعده‌ها و محدودیتهای مسألهٔ ۱.۱.۷ را داریم. آیا می‌توانید این شش نفر را با یازده رفت و برگشت از رودخانه بگذرانید؟

مسألهٔ پیکارجوی ۴.۱.۷ در مسألهٔ ۱.۱.۷ اگر جزیره‌ای وسط رودخانه باشد چه تغییری حاصل می‌شود؟

مسألهٔ پیکارجوی ۵.۱.۷ مسألهٔ ۱.۱.۷ را درصورتی که چهار جفت زن و شوهر داشته باشیم نمی‌توان حل کرد. ولی اگر جزیره‌ای وسط رودخانه باشد مسأله حل‌شدنی است. توضیح دهید چرا چنین است.

مسألهٔ ۶.۱.۷ فرماندهی باید نیروهای خود را از رودخانه‌ای عبور دهد. او دو پسر را می‌یابد که قایق کوچکی دارند و آنها را اجیر می‌کند. متأسفانه قایق فقط گنجایش دو پسر یا یک سرباز را دارد. ولی فرمانده روشی برای گذراندن نیروهایش از رودخانه می‌یابد. این روش چه ممکن است باشد؟

راه‌حل. این مسأله بیشتر منطقی است تا ترکیبیاتی. توجه کنید که تعداد سربازان را نمی‌دانیم؛ پس می‌توان حدس زد که مسأله مستقل از تعداد سربازان و بنابراین (احتمالاً) مقدماتی است.

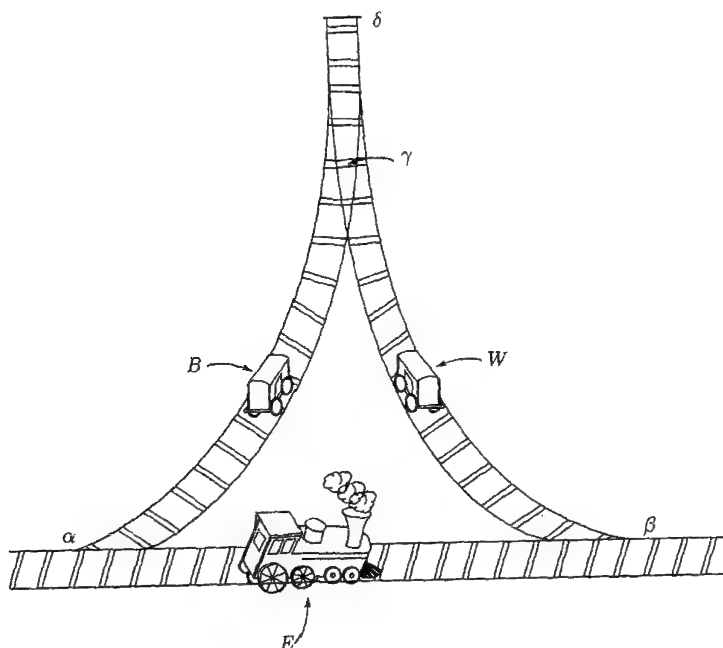
فرستادن یک سرباز در سفر اول بی‌معنی است. چون این سرباز تنها کاری که می‌تواند بکند این است که یا (الف) در ساحل دیگر رودخانه بماند و بقیهٔ سربازان را حیران در طرف دیگر بگذارد؛ یا (ب) دوباره برگردد. پس در سفر اول باید دو پسر با هم بروند. سپس یکی از پسرها برمی‌گردد. بعد یک سرباز از رودخانه عبور می‌کند. سپس پسری که در ساحل دیگر رودخانه است قایق را برمی‌گرداند.

اکنون در وضعیتی مشابه ابتدای کار هستیم، جز اینکه یک سرباز به ساحل روبه‌رو منتقل شده است. پس دوباره پسرها از رودخانه می‌گذرند. یکی از آنها در ساحل می‌ماند (با سربازِ تنها) و پسر دیگر با قایق برمی‌گردد. اکنون دومین سرباز می‌تواند از رودخانه بگذرد. بعد پسر با قایق برمی‌گردد. اکنون دوباره هر دو پسر با بقیهٔ نیروها در ساحل رودخانه‌اند.

روشن است که این فرایند را می‌توان هر چند بار تکرار کرد تا همه سربازان، و فرمانده، از رودخانه بگذرند. □

مسألهٔ ۷.۱.۷ (هالموس) لوکوموتیوی می‌تواند یک یا دو واگن قطار را به جلو یا عقب ببرد. دو واگن، یکی سیاه (B) و دیگری سفید (W)، و لوکوموتیو (E) روی خط آهنی مانند شکل ۱۵۳ قرار گرفته‌اند. بخشی از مسیر که در شکل بین γ و δ است انتهای خط است و فقط یک واگن یا فقط لوکوموتیو در این قسمت از خط جا می‌گیرند. ولی در سمت چپ α یا سمت راست β محدودیتی نیست و هر تعداد واگن در این قسمتها جا می‌گیرند.

چگونه می‌توان با لوکوموتیو جای واگنهای B و W را با هم عوض کرد (یعنی واگن سیاه را به خط سمت راست بین β و γ و واگن سفید را به خط سمت چپ بین α و γ برد) و لوکوموتیو را به وضعیت اولیه روبه سمت راست برگرداند؟ این کار باید حداکثر در ۱۰ حرکت انجام شود. در اینجا هر حرکت یا بردن واگن به جایی و بستن آن به یک واگن، یا بردن واگن با لوکوموتیو به جایی و بازکردن واگن است.



شکل۱۵۳

راه‌حل. حرکتها چنین‌اند. برای هر حرکت تصویری رسم کنید تا ببینید حرکت چگونه انجام می‌شود.

۱. E تا بعد از β و سپس عقب‌عقب به $\beta\delta$ حرکت می‌کند و به W بسته می‌شود.

۲. E واگن W را به $\gamma\delta$ هل می‌دهد و از واگن جدا می‌شود و در امتداد $\beta\gamma$ حرکت می‌کند.

۳. E به جایی بعد از β، عقب‌عقب به جایی قبل از α ، و سپس به $\alpha\gamma$ می‌رود و به B بسته می‌شود.

۴. E واگن B را به جلو هل می‌دهد تا به W برسد و به آن جفت شود، سپس هر دو واگن را به عقب می‌کشد تا در جایی قبل از α قرار گیرند.

۵. E هر دو واگن را هل می‌دهد تا W بین α و β قرار گیرد و سپس واگن B از W جدا می‌شود.

۶. E واگن B را به جایی قبل از α، سپس به $\alpha\gamma$ و نهایتاً به $\gamma\delta$ می‌برد و سپس از B جدا می‌شود.

۷. E از $\alpha\gamma$ برمی‌گردد، به‌جایی قبل از α و سپس به $\alpha\beta$ می‌رود و به W بسته می‌شود.

۸. E واگن W را به‌جایی قبل از α و سپس به $\alpha\gamma$ می‌برد و از آن جدا می‌شود.

۹. E از $\alpha\gamma$ به جایی قبل از α برمی‌گردد، در مسیر $\alpha\beta$ به‌جایی بعد از β می‌رود و عقب‌عقب مسیر $\beta\gamma$ را طی می‌کند تا به B برسد و به آن بسته شود.

۱۰. E واگن B را به جایی در $\beta\gamma$ می‌آورد. از آن جدا می‌شود، راه خود را تا جایی بعد از β ادامه می‌دهد و عقب‌عقب به $\alpha\beta$ برمی‌گردد.

اکنون کار لوکوموتیو تمام شده است و در موقعیت اولیه روبه سمت راست قرار دارد. □

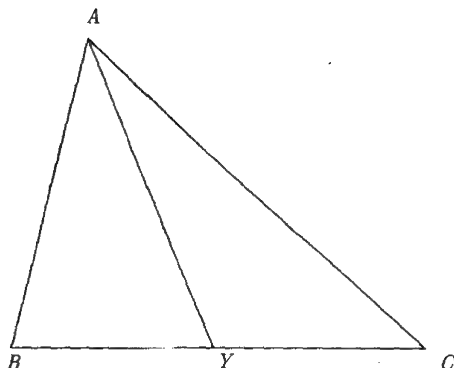
مسألهٔ پیکارجوی ۸.۱.۷ در مسألهٔ قبل اگر مجاز باشد که نهایتاً لوکوموتیو در جای اولیه روبه سمت چپ قرار گیرد، چگونه می‌توان کار را با ۶ حرکت انجام داد؟

۲.۷ چیزهای ناممکن

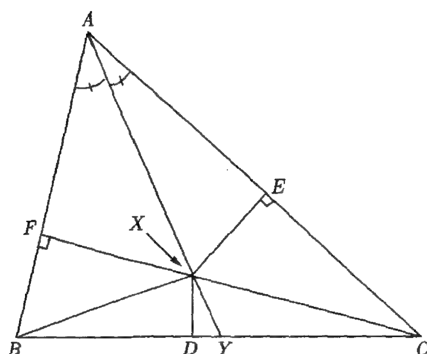
کار را با یکی از سفسطه‌های هندسی، که تعدادشان کم هم نیست، شروع می‌کنیم.

مسألهٔ ۱.۲.۷ «برهانی» عرضه می‌کنیم برای این ادعا که همهٔ مثلثها متساوی‌الساقین‌اند. تأکید می‌کنیم که این حکم نادرست است. مثلاً مثلثی با طول ضلعهای ۵، ۶ و ۷ وجود دارد. چنین مثلثی آشکارا متساوی‌الساقین نیست. پس باید در «برهانی» که عرضه می‌کنیم خطایی باشد. این خطا، خطایی ظریف است. خطای برهان را بیابید.

> **برهانی برای اینکه همهٔ مثلثها متساوی‌الساقین‌اند:** مثلثی دلخواه مانند $\triangle ABC$ درنظر بگیرید. فرض کنید AY نیمساز $\angle BAC$ باشد (شکل ۱۵۴ را ببینید).
> اکنون دو امکان هست:



شکل۱۵۴

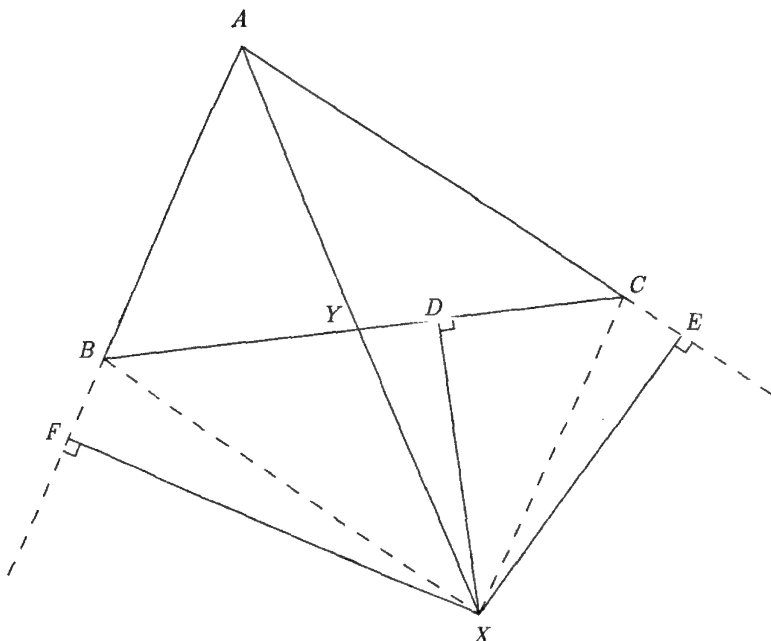


شکل۱۵۵

۱. اگر AY بر BC عمود باشد، $\triangle AYB$ و $\triangle AYC$ همنهشت‌اند. درواقع $\angle BAY$ و $\angle CAY$ برابرند و $\angle BYA$ و $\angle CYA$ هم برابرند. پس دو مثلث متشابه‌اند. ولی دو مثلث ضلعی مشترک دارند؛ پس همنهشت‌اند. نتیجه می‌شود که مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲. اگر AY بر BC عمود نباشد، عمودمنصف BC را که از D، وسط BC، می‌گذرد قطع می‌کند. نقطهٔ تقاطع را X بنامید. XE را عمود بر AC و XF را عمود بر AB رسم کنید (شکل ۱۵۵ را ببینید).

فرض می‌کنیم X واقعاً درون $\triangle ABC$، و در نتیجه E واقعاً نقطهٔ درونی AC و F واقعاً نقطهٔ درونی AB باشد. دراین‌صورت $\triangle AXF$ با $\triangle AXE$ همنهشت است: چون AX ضلع مشترک است، $\angle XAF = \angle XAE$ و $\angle XFA = \angle XEA$. چون این دو مثلث همنهشت‌اند نتیجه می‌گیریم $AF = AE$. همچنین $\triangle BXF$ و $\triangle CXE$ همنهشت‌اند. توجه کنید XD، BC را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. پس $BX = CX$. همچنین بنابر همنهشتی قبلی $XF = XE$. همچنین، $\angle BFX$



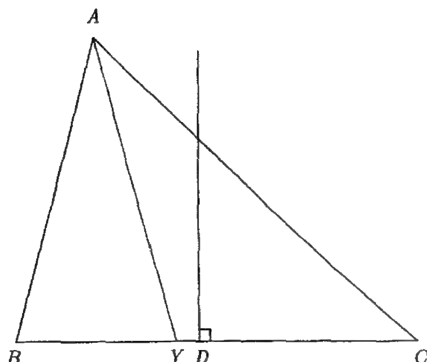
شکل۱۵۶

و $\angle CEX$ هر دو قائمه و بنابراین برابرند. به دلیل این همنهشتی نتیجه می‌گیریم $FB = EC$. ولی دراین‌صورت، $AF + FB = AE + EC$ یا $AB = AC$. بنابراین $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است.

همچنین باید این امکان راکه در حالت (۲) نقطهٔ X بیرون از $\triangle ABC$ قرار گیرد درنظر بگیریم. مثالی در شکل ۱۵۶ نشان داده شده است. توجه کنید که در این شکل عمود XF بر امتداد ضلع AB و عمود XE هم بر امتداد ضلع AC رسم شده است. باز هم مثلثهای AXF و AXE همنهشت‌اند. نتیجه می‌گیریم که $AF = AE$. همچنین مثلثهای BXF و CXE همنهشت‌اند. پس $FB = EC$. پس $AF - FB = AE - EC$ یا $AB = AC$. باز هم نتیجه می‌گیریم که $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است.

راه‌حل. شکلها نشان می‌دهند که در این استدلال اشتباهی هست. ولی چه اشتباهی؟ شکلها فقط به‌عنوان راهنمایی رسم شده‌اند تا تصویری از مفاهیم را در اختیارمان بگذارند. برهان با بیان و ایده‌هایی عرضه شده است که درست به‌نظر می‌رسند.

درحالتی که نیمساز زاویهٔ A بر ضلع روبه‌رو به آن عمود باشد هیچ اشتباهی نیست. این حالت دقیقاً وقتی روی می‌دهد که مثلث موردنظرمان متساوی‌الساقین باشد. خطا باید در حالت (۲) باشد.



شکل۱۵۷

ابتدا حالتی را که X درون مثلث باشد بررسی می‌کنیم. نکتهٔ مهم این است که این حالت ممکن نیست روی دهد! $\angle BAY$ و $\angle CAY$ را که با هم برابرند θ بنامید.

بنابر قانون کسینوسها،

$$(BY)^۲ = (AB)^۲ + (AY)^۲ - ۲AB \cdot AY \cdot \cos\theta$$

و

$$(CY)^۲ = (AC)^۲ + (AY)^۲ - ۲AC \cdot AY \cdot \cos\theta$$

اگر مثلاً $AB > AC$، به‌آسانی می‌بینیم که $BY > CY$، چون

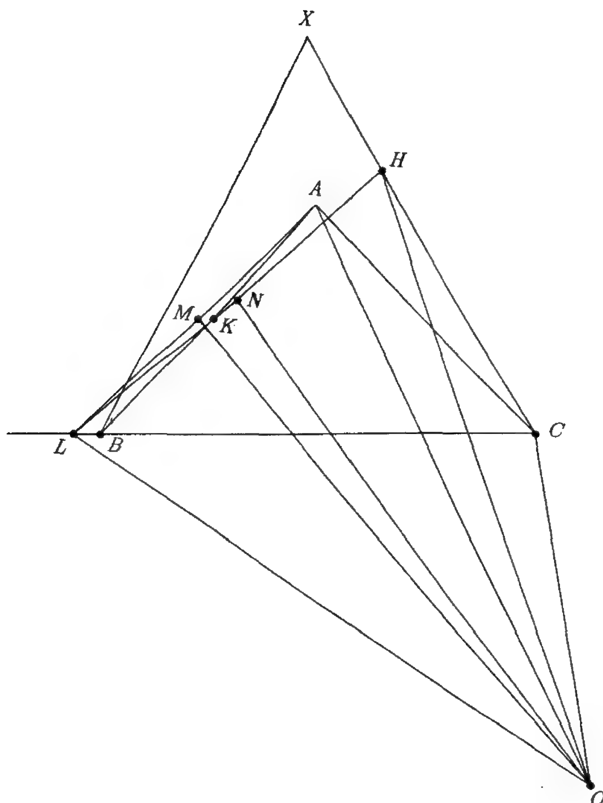
$$\begin{aligned}&(AB)^۲ + (AY)^۲ - ۲AB \cdot AY \cdot \cos\theta \\ &= (AY)^۲ + AB \cdot (AB - ۲AY \cdot \cos\theta) \\ &> (AY)^۲ + AC \cdot (AC - ۲AY \cdot \cos\theta)\end{aligned}$$

پس شکل درست مانند شکل ۱۵۷ است.

یافتن خطا را در حالتی که X بیرون از مثلث قرارگیرد به‌عهدهٔ شما می‌گذاریم. □

مسألهٔ ۲.۲.۷ (تِرتون) خطاهای برهان زیر را برای اینکه $\frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۴}$ بیابید. پیش از بیان برهان سفسطه‌آمیز باید تأکید کنیم که برهانهای گزاره‌های نادرست مهلک‌اند. اگر A گزاره‌ای نادرست باشد، قیاس $A \Longrightarrow B$، بدون توجه به اینکه B چیست، درست است ([KRA1] را ببینید). بنابراین اگر بتوانیم «برهانی» برای گزارهٔ A بیابیم، می‌توانیم هر چیزی را ثابت کنیم. اگر «برهانی» برای اینکه $\frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۴}$ بیابیم صرفاً کاری سرگرم‌کننده نکرده‌ایم، بلکه رشتهٔ تفکر تحلیلی را بریده‌ایم.

برهانی برای اینکه $\frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۴}$: مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC را به وتر BC درنظر بگیرید. مثلث XBC مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع BC است (شکل ۱۵۸). نقطهٔ



شکل۱۵۸

H را روی CX طوری بگیرید که $CH = CA$. وسط BA را K می‌نامیم. خطی رسم کنید که از H و A بگذرد و امتداد ضلع BC را در L قطع کند. پاره‌خط AL را رسم کنید.

وسط AL را M می‌نامیم. وسط HL را N می‌نامیم. فرض کنید عمود بر AL در M و عمود بر HL در N یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. توجه کنید که O و X هر دو در یک طرف AL نیستند. شکل را با رسم OC ، OA، OH و OL تکمیل می‌کنیم.

اکنون روشن است که $\triangle OML$ و $\triangle OMA$ همنهشت‌اند: ضلعی مشترک دارند، $AM = LM$ و هر دو زاویهٔ قائمه دارند. پس $OA = OL$.

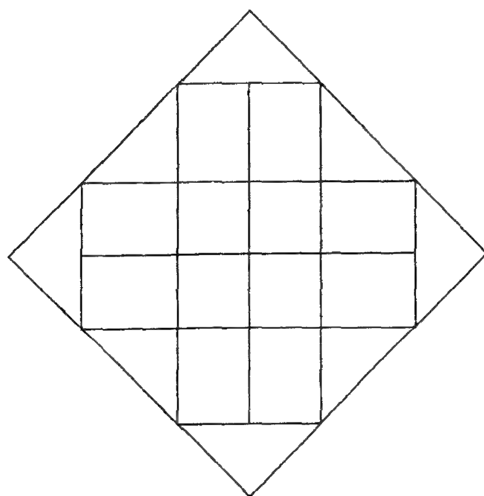
به همین ترتیب، $\triangle ONL$ و $\triangle ONH$ همنهشت‌اند. پس $OA = OH$.

اکنون $\triangle OCA$ و $\triangle OCH$ را با هم مقایسه کنید. می‌دانیم که $OA = OH$ و $CA = CH$ (این‌طور رسم کرده‌ایم) و ضلع OC نیز در این دو مثلث مشترک است. پس این دو مثلث همنهشت‌اند. پس $\angle BCA = \angle BCH$. یعنی $\frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۴}$.

راه‌حل. چون نتیجهٔ این استدلال آشکارا نادرست است (مثلاً از آن نتیجه می‌شود ۰ = ۱)، باید اشتباهی

در استدلال باشد. اشتباه کجاست؟ اگر اشتباه در منطق صوری نباشد (که ظاهراً نیست) اشتباه باید در رسم شکل باشد. درکمال تعجب، مرجع [BALL] که این استدلال را از آن گرفته‌ایم شکل ندارد. غیرقابل اعتمادترین بخش استدلال این ادعاست که O و X هر دو در یک طرف AL نیستند. خواننده را ترغیب می‌کنیم که خود اشتباه این استدلال را بیابد. □

مسألهٔ ۳.۲.۷ توضیح دهید که چرا خط رسم‌شده در شکل ۱۵۹ را نمی‌توان با حرکت پیوسته و ناهمپوشان قلم رسم کرد.



شکل۱۵۹

راه‌حل. آیا از مطالعهٔ مسألهٔ پلهای کونیگسبرگ و موقعیتهای ناممکن دیگری با ماهیتی شبیه این مسأله چیزی آموخته‌ایم؟

خطی که در شکل ۱۵۹ رسم شده است دو نوع گره یا رأس دارد: رأسهایی که تعدادی زوج از یالها به آنها می‌رسند و رأسهایی که تعدادی فرد از یالها به آنها می‌رسند. اگر «حرکت قلم» به رأسی وارد و سپس از آن رأس خارج شود (درصورتی‌که همپوشانی، یعنی حرکت روی یالی که قبلاً رسم شده است، مجاز نباشد) دو یال به یالهایی که از این رأس می‌گذرند اضافه می‌شود. پس اگر رأسی داشته باشیم که تعداد یالهای گذرنده از آن فرد باشد، یا

الف) حرکت قلم از این رأس شروع نشده است ولی زمانی به این رأس می‌رسد و دیگر ادامه نمی‌یابد (یعنی حرکت قلم تمام می‌شود)؛

یا

ب) حرکت قلم از این رأس شروع شده است ولی به همین رأس ختم نمی‌شود.

توجه کنید که در تصویر شکل ۱۵۹ چهار رأس هست که تعداد یالهای گذرنده از آنها فرد است. هریک از این چهار رأس یا باید نقطهٔ شروع حرکت قلم باشد یا نقطهٔ انتهای آن. این هم ناممکن است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۴.۲.۷ توضیح دهید که چگونه می‌توان با حذف یک پاره‌خط (این پاره‌خط ممکن است شامل چند یال به معنایی که در نظریهٔ گراف تعریف می‌شود باشد) شکل ۱۵۹ را به تصویری تبدیل کرد که با حرکت پیوسته و ناهمپوشان قلم قابل رسم باشد.

تمرین فصل ۷

۱. آیا می‌توان فقط با یک بار استفاده از هریک از رقمهای ۰ ، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ دسته‌ای از عددهای طبیعی را نوشت که مجموعشان ۱۰۰ باشد؟

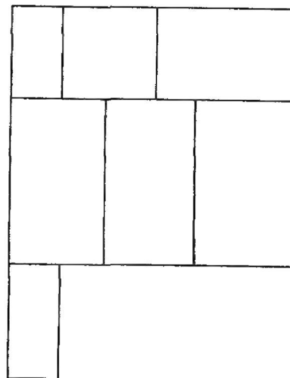
۲. شش نفر می‌خواهند از رودخانه‌ای بگذرند. در این گروه دو مرد هستند که هر کدام از آنها دو زن دارد. هیچ کدام از مردها تحمل نمی‌کند که یکی از زنهایش همراه مرد دیگر باشد مگر اینکه خودش حضور داشته باشد. این گروه قایقی دارند که فقط دو نفر در آن جا می‌گیرند. آیا این گروه می‌توانند از رودخانه بگذرند؟ با چند رفت و برگشت؟

۳. مسألهٔ ۲ را درصورتی‌که قایق گنجایش سه نفر را داشته باشد حل کنید.

۴. مسألهٔ ۲ را درصورتی‌که سه مرد هر یک با سه زن خود بخواهند از رودخانه بگذرند و قایق گنجایش سه نفر را داشته باشد حل کنید.

۵. مسألهٔ ۴ را درصورتی‌که دو قایق هرکدام با گنجایش دو نفر موجود باشد حل کنید.

۶. توضیح دهید که چرا نمی‌توان خط رسم‌شده در شکل ۱۶۰ را با حرکت پیوسته و ناهمپوشان قلم رسم کرد.



شکل ۱۶۰

۷. کدام‌یک از حروف شکل ۱۶۱ را می‌توان با حرکت پیوسته و ناهمپوشان قلم رسم کرد؟ چرا؟

ABCDEFGHIJKLMN
OPQRSTUVWXYZ

شکل۱۶۱

۸. توضیح دهید که چرا اگر مجموع دو عدد حقیقی مثبت ۱۰۰ باشد، ممکن نیست حاصل‌ضرب این دو عدد ۳۰۰۰ باشد؟

۹. سطح درون مربعی بسته به ضلع ۱ را نمی‌توان با تعدادی متناهی قرص دایره‌ای (دایره همراه با سطح درونش)، حتی اگر مرز قرصها با هم در تماس باشند، پوشاند. توضیح دهید چرا چنین است.

۱۰. قرصی بسته به شعاع ۱ را نمی‌توان با تعدادی متناهی مربع بسته، حتی اگر مرز مربعها با هم در تماس باشند، پوشاند. توضیح دهید چرا چنین است.

۱۱. مقوایی را به شکل مثلثی متساوی‌الاضلاع بریده‌ایم. این مثلث را T می‌نامیم. توضیح دهید که چرا نمی‌توان T را با قیچی (با یک برش) به دو قطعه تقسیم کرد به‌طوری‌که با دو قطعهٔ حاصل بتوان مربعی ساخت.

۱۲. دو نفر در دو سر جاده‌ای مستقیم ایستاده‌اند. هر دو در لحظه‌ای مفروض شروع به پیاده‌روی به طرف هم می‌کنند. سرعت حرکت هر دو ثابت است، ولی یکی سریعتر راه می‌رود. این دو نفر در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۷۲۰ متر از انتهای راست جاده ازکنار هم می‌گذرند. هر یک از آنها وقتی به انتهای دیگر جاده می‌رسد ده دقیقه استراحت می‌کند و دوباره با همان سرعت قبل به طرف انتهای دیگر جاده راه می‌افتد. این بار دو راهپیما یکدیگر را در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۴۰۰ متر از انتهای چپ جاده می‌بینند. طول جاده چقدر است؟

۱۳. دنبالهٔ زیر را به افتخار ریاضیدان مشهور پرینستون، دنبالهٔ جان ه. کانوی می‌نامند. آیا می‌توانید جملهٔ بعدی دنباله را تعیین کنید؟

۱, ۱, ۱, ۳, ۱, ۴, ۱, ۱, ۳, ۶, ۱, ۲, ۳, ۱, ۴, ۸, ۱, ۳, ۳, ۲, ۴, ۱, ۶, ?

۱۴. کاشفی فقط به اندازه‌ای می‌تواند آذوقه حمل کند که کفاف سه روزش را می‌دهد. او به شهری در کنارهٔ کویر رفته است و می‌خواهد تا آنجا که ممکن است درکویر پیش برود. او آذوقهٔ سی روز را خریده و در شهر گذاشته است. او می‌خواهد مسافتی را درکویر پیش برود، مقداری آذوقه در واحه‌ای ذخیره کند و دوباره به شهر برگردد و آذوقه بردارد. با مقدار آذوقه‌ای که تهیه کرده است

حداکثر ده بار می‌تواند این کار را بکند. او هر روز می‌تواند ۸ مایل پیاده‌روی کند. او در کویر تا کجا می‌تواند پیش برود؟

۱۵. مساحت صحرای نِوادا را حساب کنید. [راهنمایی: به نقشه‌ای خوب و نقاله‌ای برای اندازه‌گیری زاویه‌ها نیاز دارید.]

۱۶. فرض کنید ۱۲ قطعه چوب هر یک به طول ۱ فوت در اختیار دارید. به چند طریق متفاوت می‌توانید با این چوبها چارچوبی مکعبی بسازید؟

۱۷. دو مکعب یکی به ضلع ۲ اینچ و دیگری به ضلع ۴ اینچ درنظر بگیرید. حجم مکعب بزرگتر $۴^۳$، یعنی ۶۴ اینچ مکعب و حجم مکعب کوچکتر $۲^۳$، یعنی ۸ اینچ مکعب است. میانگین طول ضلع مکعبها $\frac{۲+۴}{۲}$، یعنی ۳ سانتیمتر و میانگین حجم آنها $\frac{۸+۶۴}{۲}$، یعنی ۳۶ سانتیمتر مکعب است. ولی حجم مکعبی به طول ضلع ۳ سانتیمتر برابر با ۳۶ سانتیمتر مکعب نیست. چرا چنین است؟

۱۸. در اینجا گونه‌ای از مسألهٔ مشهور سردرگمی زندانی را که پایهٔ مطالعات زیادی در روانشناسی، جامعه‌شناسی و اقتصاد است بیان می‌کنیم.

شما در اتاقی با ۴۹ نفر دیگر هستید. چشمها و دهان همه را بسته‌اند. اعلام می‌شود که پنج دقیقه مهلت دارید تصمیم بگیرید. اگر بعد از این پنج دقیقه هیچ‌کس دستش را بلند نکرده باشد، همگی نفری ۱۰ دلار باید بپردازید و سپس آزادید که بروید. اما اگر کسی دستش را بلند کند، همهٔ کسانی که دست خود را بلند کرده‌اند باید نفری ۲۰ دلار بپردازند و دیگران باید نفری ۱۰۰ دلار بپردازند.

روشن است که بهتر است هیچ‌کس دستش را بلند نکند. ولی اگر کسی دستش را بلند کرده باشد، بهتر است شما هم دست خود را بلند کنید (چون در این صورت به جای ۱۰۰ دلار فقط ۲۰ دلار می‌پردازید).

چه‌کار باید بکنید؟ آیا پاسخ روشنی هست؟ آیا بهترین راه‌کار وجود دارد؟

۱۹. در یک مسابقهٔ تلویزیونی شرکت کرده‌اید. مجری برنامه به شما می‌گوید که مختارید ۶۰۰ دلار بگیرید و مسابقه را ترک کنید، یا چرخی را بچرخانید که به این ترتیب ۸۰٪ شانس دارید ۸۰۰ دلار ببرید و ۲۰٪ شانس دارید که هیچ‌چیز نبرید. بهترین انتخاب برای شما چیست؟ مقدار ۸۰۰ دلار چه تغییری باید بکند تا تصمیم شما عوض شود؟ اگر شانس بردن با چرخاندن چرخ ۷۵ ٪ بود چه تصمیمی می‌گرفتید؟

۲۰. فرض کنید می‌خواهیم تعداد زنبورهای کندویی را بشماریم. ۱۰۰ تا از زنبورها را بیرون می‌کشیم و نشانه‌ای رنگی روی بدنشان می‌گذاریم. بعد این زنبورها را به کندو برمی‌گردانیم و مدتی صبر می‌کنیم تا با زنبورهای دیگر کندو مخلوط شوند. بعد دوباره ۱۰۰ زنبور را به تصادف بیرون

می‌آوریم و می‌بینیم که شش تا از آنها نشانهٔ رنگی دارند. چه نتیجه‌ای در مورد تعداد زنبورهای کندو می‌گیریم؟

آیا می‌توانید ایرادی به این شیوهٔ شمردن زنبورهای کندو بگیرید؟

۲۱. این مسأله را پال اردوش، ریاضیدان مجارستانی، بر سر زبانها انداخته است ([MPI] را ببینید). N را عددی طبیعی بگیرید. کمترین تعداد افرادی که باید در اتاقی باشند تا مطمئن شویم دست‌کم N نفر همدیگر را می‌شناسند یا N نفر همدیگر را نمی‌شناسند چقدر است؟ مثلاً اگر دو نفر در اتاقی باشند یا همدیگر را می‌شناسند یا همدیگر را نمی‌شناسند. پس این جواب مسأله به‌ازای $N = ۲$ است. توضیح دهید که چرا به‌ازای $N = ۳$، جواب ۶ است.

این مسأله به سرعت پیچیده می‌شود. مثلاً جواب در حالتی که $N = ۶$ هنوز پیدا نشده است.

۲۲. با تکمیل طرح زیر ثابت کنید که مربع هیچ عدد گویایی ۲ نیست.

الف) فرض کنید عدد گویایی مانند $\mu = \frac{m}{n}$ باشد به‌طوری‌که $\mu^۲ = ۲$. می‌توانیم فرض کنیم که m و n مثبت‌اند و عامل مشترکی ندارند (یعنی کسر به ساده‌ترین شکل نوشته شده است).

ب) فرض ما به این معنی است که

$$\left(\frac{m}{n}\right)^۲ = \mu^۲ = ۲$$

در نتیجه

$$m^۲ = ۲n^۲ \qquad (*)$$

ج) چون سمت راست (*) بر ۲ بخش‌پذیر است، سمت چپ نیز باید بر ۲ بخش‌پذیر باشد. پس عددی طبیعی مانند a هست به‌طوری‌که $m = ۲a$.

د) مقدار اخیر را به‌جای m در برابری (*) می‌گذاریم:

$$۲a^۲ = n^۲$$

هـ) اکنون چون طرف چپ برابری اخیر بر ۲ بخش‌پذیر است، طرف راست آن هم باید بر ۲ بخش‌پذیر باشد. پس n بر ۲ بخش‌پذیر است.

و) ثابت کرده‌ایم که هم m و هم n بر ۲ بخش‌پذیرند. پس m و n عاملی مشترک دارند. ولی فرض کرده بودیم که m و n عامل مشترکی ندارند. این تناقض نشان می‌دهد که عدد گویای $\mu = \frac{m}{n}$ وجود ندارد.

۲۳. ثابت کنید که مربع هیچ عدد گویایی ۸ نیست. [راهنمایی: یا از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۲ استفاده کنید یا راه‌حل مسألهٔ ۲۲ را تقلید کنید.]

۲۴. فرض کنید k عددی طبیعی باشد. ثابت کنید که اگر k جذر گویا داشته باشد درواقع جذر صحیح دارد.

۲۵. توضیح دهید که چرا بین هر دو عدد گویا عددی گنگ هست.

۲۶. توضیح دهید که چرا بین هر دو عدد گنگ عددی گویا هست.

۲۷. در این مسأله فنونی از بخشهای مختلف کتاب به‌کار گرفته می‌شوند. این مسأله دشوار است. این مسأله را مبنای بحثی با دوستانتان قرار دهید؛ راههایی برای آزمایش آن پیدا کنید.

چهار نقطه مانند A، B، C و D به تصادف از مربع واحد انتخاب می‌کنیم. این نقطه‌ها را با پاره‌خطهایی به‌ترتیب به‌هم وصل می‌کنیم: A به B، B به C، C به D و D به A. احتمال اینکه با این کار شکلی محدب حاصل شود چقدر است؟ [این مسأله از جِد وینسُن است.]

۲۸. سیاح جسوری یک مایل به سوی جنوب، یک مایل به سوی شرق و یک مایل به سوی شمال حرکت می‌کند و به همان نقطه‌ای می‌رسد که ابتدا از آنجا راه افتاده بود. چگونه چنین چیزی ممکن است؟ خوب، اگر نقطهٔ شروع حرکتش قطب شمال بوده باشد چنین چیزی ممکن است. بی‌نهایت طریق دیگر بیابید که این کار ممکن باشد.

۲۹. [این مسأله و مسألهٔ بعد را از یادداشتهای مایک فلوز و نیل کوبلیتز برداشته‌ایم.] متن زیر پیامی به زبان انگلیسی است که به رمز درآورده‌ایم:

ESPNTASPCSLDMPPYMCZVPY

رمزنگاری به این صورت است که به‌جای هر حرف پیام اصلی حرفی راکه به اندازهٔ مشخصی قبل یا بعد از آن حرف در الفباست می‌گذاریم. مثلاً جابه‌جایی ۵+ پیام «**HELLO THERE**» را به پیام زیر تبدیل می‌کند:

MJQQT YMJWJ

توجه کنید که «M» پنج حرف بعد از (در سمت راست) «H» است (پس اولین حرف پیام رمز پنجمین حرف الفبا بعد از اولین حرف پیام اصلی است)؛ همچنین «J» پنج حرف بعد از (در سمت راست) «E» است (یعنی دومین حرف پیام رمز پنجمین حرف الفبا بعد از دومین حرف پیام اصلی است).

همچنین اگر جابه‌جایی ۳− را در پیام «**BOO HOO**» انجام دهیم، پیام رمز حاصل چنین است:

YLL ELL

توجه کنید که الفبا را به‌صورتی‌که روی حلقه‌ای نوشته شده باشد درنظر می‌گیریم؛ یعنی بعد از «**X**، **Y**، **Z**» به «**A**» می‌رسیم. پس سه حرف قبل از «**B**» حرفهای «**A**، **Z** و **Y**» هستند.

پیام رمزی که در ابتدای این مسأله بیان کردیم با روش جابه‌جایی، مثبت یا منفی، حاصل شده است (این روش را رمز سزار می‌نامند). پیام انگلیسی اصلی چه بوده است؟ [راهنمایی:

فاصله‌های بین کلمات را حذف کرده‌ایم. همچنین، پراستفاده‌ترین حرف الفبای انگلیسی «E» است. پراستفاده‌ترین حرف بعد از «E» چیست؟ پراستفاده‌ترین حرف بعدی چیست؟ با استفاده از این ایده حدس بزنید که بعضی از حرفهای پیام رمز باید متناظر با چه حرفهایی در پیام اصلی باشند.]

۳۰. در مسألهٔ ۲۹ بعضی از ایده‌های رمزنگاری مطرح شده است.

رمز ویژانِر شیوه‌ای برای رمزنگاری با جابه‌جایی حروف است، ولی جابه‌جاییها براساس واژه‌ای کلیدی انجام می‌شوند. این روش را شرح می‌دهیم. فرض کنید واژهٔ کلیدی «FLAT» باشد. اولین مرحله تبدیل کردن واژهٔ کلیدی به عدد است: F ششمین حرف الفباست، L دوازدهمین حرف الفباست، A اولین و T بیستمین حرف الفباست. پس واژهٔ کلیدی به دنبالهٔ عددی ۶، ۱۲، ۱، ۲۰ تبدیل می‌شود.

اکنون فرض کنید بخواهیم پیام «SEE THE HOG» را به رمز درآوریم. اولین حرف را ۶ حرف به راست جابه‌جا می‌کنیم (۶ اولین عدد واژهٔ کلیدی است). پس به جای S حرف Y را می‌نویسیم. حرف دوم را ۱۲ حرف جابه‌جا می‌کنیم (۱۲ دومین عدد واژهٔ کلیدی است). پس به جای E حرف Q را می‌نویسیم. توجه کنید که E بعدی به Q تبدیل نمی‌شود. باید قاعده‌هایی را که واژهٔ کلیدی تحمیلمان می‌کند رعایت کنیم. حرف سوم پیام را ۱ حرف جابه‌جا می‌کنیم (۱ سومین عدد واژهٔ کلیدی است). پس به‌جای E حرف F را می‌نویسیم. به همین ترتیب به‌جای T حرف N را می‌نویسیم.

اکنون به انتهای واژهٔ کلیدی رسیده‌ایم (و چهار حرف پیام را به رمز درآورده‌ایم). پس دوباره از اول شروع می‌کنیم. H را ۶ حرف به راست جابه‌جا می‌کنیم. پس به جای H حرف N را می‌نویسیم. سپس E را ۱۲ حرف به راست جابه‌جا می‌کنیم. پس به جای E حرف Q را می‌نویسیم. سپس H را ۱ حرف به راست جابه‌جا می‌کنیم. پس به جای H حرف I را می‌نویسیم. O را هم ۲۰ حرف به راست جابه‌جا می‌کنیم. پس به‌جای O حرف I را می‌نویسیم. سرانجام G را ۶ حرف به راست جابه‌جا می‌کنیم. پس به جای G حرف M را می‌نویسیم.

خلاصه، پیام «SEE THE HOG» با رمز ویژانِر توسط واژهٔ کلیدی «FLAT» به پیام رمز زیر تبدیل می‌شود:

YQF NNQ IIM

اکنون پیام رمز زیر را رمزگشایی کنید. راهنمایی می‌کنیم که واژهٔ کلیدی فقط دو حرف دارد؛ در ضمن، فاصله‌های بین کلمات را هم طبق معمول حذف کرده‌ایم.

CPTOTXTCVPCNNCTWXPU



زندگی واقعی

۰.۸ ملاحظات مقدماتی

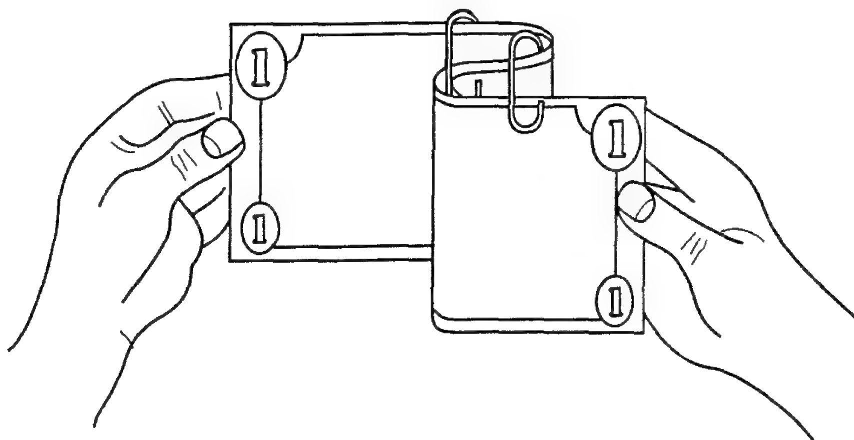
واقعیت این است که مسأله‌های واقعی که در زندگی روزمره پیش می‌آیند ممکن است بسیار دشوار باشند. اغلب ایده‌ها و اصطلاحاتی تخصصی در این مسأله‌ها دخیل‌اند و در بسیاری از موارد این مسأله‌ها تن به اندازه‌گیری یا فرمولبندی دقیق نمی‌دهند. اغلب حل‌کننده یا تحلیلگر باید به حدس و تقریب متوسل شود تا پرسشی را که تحلیل‌پذیر باشد فرمولبندی کند. گاهی باید انبوهی از داده‌ها را پردازش کرد تا بتوان تصمیم گرفت که مسأله چه می‌خواهد. پس می‌بینیم که مسأله‌هایی از این‌گونه در حد کتابی مختصر و مقدماتی مانند این کتاب نیستند.

آنچه در این فصل می‌توانیم انجام دهیم فقط نشان دادن شمه‌ای از مسأله‌هایی است که در قالب تفکر تحلیلی درمی‌آیند ولی به زبان تحلیلی یا تفکر ریاضی فرمولبندی نشده‌اند. اگر بعضی از این مسأله‌ها بیش از حد ساده، یا خیالی، به‌نظر می‌رسند این ملاحظات را درنظر داشته باشید. این مسأله‌ها برای تمرین و کسب تجربه در اختیارتان قرار می‌گیرد.

۱.۸ اشیای عادی

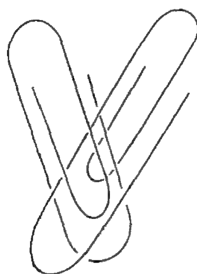
در این بخش به مسأله‌های گوناگونی دربارهٔ اشیای مورداستفاده در خانه می‌پردازیم. راه‌کار اصلی این است که بکوشیم اشیای آشنا را به‌گونه‌ای تازه ببینیم. نگذارید عقل سلیم، یا آنچه واضح به‌نظر می‌رسد محدودیتی برایتان ایجاد کند. در برابر وسوسهٔ خواندن راه‌حل و گفتن اینکه «اهه، اینکه فقط حقه‌بازی است» مقاومت کنید. واقعاً این‌طور نیست. این کار فقط شیوه‌ای اصیل برای دیدن اشیاست.

مسألهٔ ۱.۱.۸ آرایش دو گیرهٔ کاغذ و یک اسکناس را به‌صورتی که در شکل ۱۶۲ نشان داده شده است بررسی کنید. اگر دو طرف اسکناس را یک‌باره به سرعت بکشید، گیره‌ها به حالت فنری می‌جهند و به هم قفل می‌شوند. توضیح دهید که چرا گیره‌ها به هم قفل می‌شوند.



شکل۱۶۲

راه‌حل. دو طرف اسکناس را به آرامی بکشید. نگاه کنید که گیره‌ها چه می‌شوند. می‌توانید همین عمل را بدون استفاده از اسکناس هم انجام دهید (شکل ۱۶۳). هر گیره را بین دو سر گیرهٔ دیگر قرار می‌دهید، و آنها را به هم قفل می‌کنید. آخرین تکان کاغذ گیرهٔ جلویی را به بالای اسکناس می‌برد و به گیرهٔ پشتی وصل می‌کند و گیره‌های متصل به‌هم را از اسکناس جدا می‌کند. □



شکل۱۶۳

مسألهٔ ۲.۱.۸ کارتی به اندازهٔ معمول کارتهای کتابشناسی کتابخانه‌ها تهیه کنید. چگونه می‌توانید حفره‌ای در این کارت ایجاد کنید و خودتان از درون حفره رد شوید؟

راه‌حل. شکل ۱۶۴ شیوه بریدن کارت را نشان می‌دهد. بعد از انجام این برش می‌توانید دو طرف کارت را به ظرافت بکشید و حلقه‌ای به محیط بیشتر از چهار فوت ایجاد کنید. این حلقه آنقدر بزرگ هست که اگر چندان درشت پیکر نباشید بتوانید از درونش بگذرید. □

شکل۱۶۴

مسألهٔ ۳.۱.۸ دو مجلد کتابی قطور مانند شکل ۱۶۵ در کتابخانه قرار گرفته‌اند. ضخامت جلد هر کتاب $\frac{1}{8}$ اینچ است و ضخامت ۵۰۰ صفحهٔ هر کتاب هم حدود ۲ اینچ است. کرمی کوچک حفره‌ای در کتابها ایجاد می‌کند و از اولین صفحهٔ مجلد ۱ تا آخرین صفحهٔ مجلد ۲ می‌خزد. این کرم کلاً چه مسافتی را می‌خزد؟

شکل۱۶۵

راه‌حل. شکل ۱۶۵ را ببینید. توجه کنید که مجلد ۱ سمت راست و مجلد ۲ سمت چپ است. توجه کنید که صفحهٔ اول مجلد ۱ در سمت راست مرکز شکل و آخرین صفحهٔ مجلد ۲ درست در سمت چپ مرکز شکل است. درواقع کرم فقط باید روی جلد مجلد ۱ را سوراخ کند و به بیرون از مجلد ۱

(بین دو کتاب) بخزد و سپس پشت جلد مجلد ۲ را سوراخ کند. یعنی کرم فقط دو جلد کتاب را سوراخ می‌کند و اصلاً هیچ‌کدام از صفحه‌ها را سوراخ نمی‌کند. پس کرم کلاً مسافت $\frac{1}{4}$ اینچ را طی می‌کند. □

مسألهٔ پیکارجوی ۴.۱.۸ فرض کنید چهار مجلد کتابی را مانند مسألهٔ قبل در کتابخانه کنار هم گذاشته‌اید. ضخامت جلد کتابها همان $\frac{1}{8}$ اینچ است ولی ضخامت صفحه‌های هر کتاب ۱ اینچ است. کرم برای رسیدن از اولین صفحهٔ مجلد ۱ به آخرین صفحهٔ مجلد ۴ چه مسافتی را باید طی کند؟

مسألهٔ ۵.۱.۸ کاغذی دارید که دایره‌ای به شعاع بین ۲ تا ۴ اینچ روی آن رسم شده است. مربعی پلاستیکی به طول ضلع ۱۰ اینچ هم دارید. خطکش یا پرگار در اختیار ندارید. چگونه می‌توانید مرکز دایره را بیابید؟

راه‌حل. این مسأله از نوع مسأله‌های ترسیم با خطکش و پرگار است، ولی پرگار نداریم. فقط می‌توانیم خط راست بکشیم (با لبهٔ مربع پلاستیکی) و زاویهٔ قائمه رسم کنیم.

یک گوشهٔ مربع را طوری قرار دهید که از درون بر دایره مماس باشد. پس زاویه‌ای قائمه در دایره محاط کرده‌اید. از هندسه می‌دانیم که این زاویهٔ قائمه روبه‌روی قطر دایره است. پس دو نقطهٔ تقاطع ضلعهای مربع با دایره دو سر قطری از دایره‌اند (ما عمداً شکل رسم نکرده‌ایم تا خودتان شکلی بکشید).

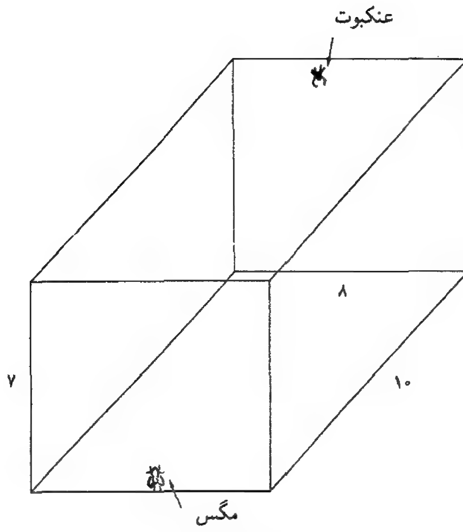
اکنون به روش بند قبل قطر دیگری رسم کنید. نقطهٔ تلاقی دو قطر مرکز دایره است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۶.۱.۸ آیا می‌توانید مسألهٔ قبل را درصورتی‌که به جای مربع مثلث متساوی‌الاضلاع پلاستیکی بزرگی داشته باشید حل کنید؟

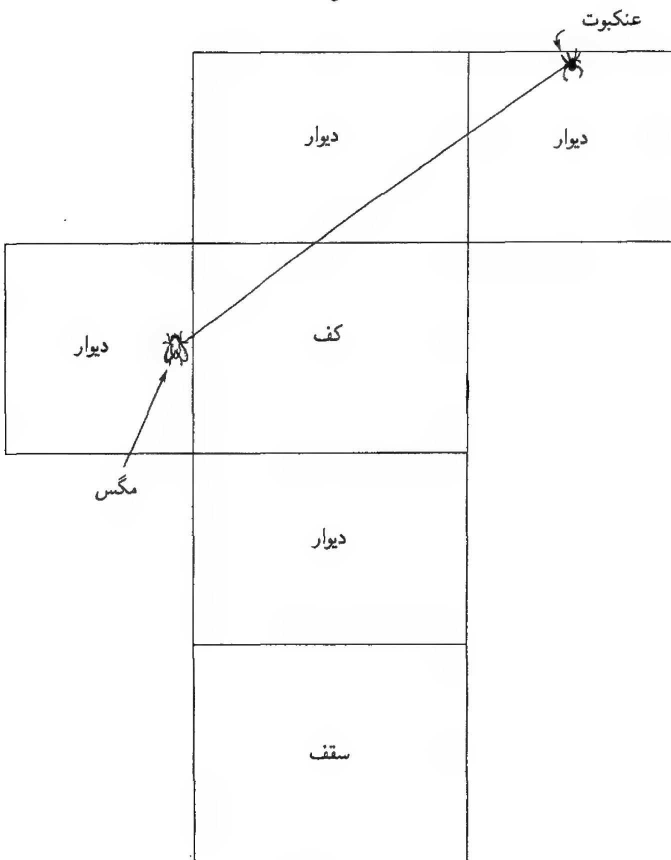
مسألهٔ ۷.۱.۸ کف اتاقی ۸ فوت در ۱۰ فوت است. ارتفاع سقف اتاق ۷ فوت است. عنکبوتی روی یکی از دیوارهای ۸ فوت در ۷ فوت به فاصلهٔ ۶ اینچ از سقف و در وسط فاصلهٔ بین دو دیوار کناری نشسته است. مگسی هم روی دیوار روبه‌رو به فاصلهٔ ۶ اینچ از کف اتاق و در وسط فاصلهٔ بین دو دیوار کناری است. شکل ۱۶۶ را ببینید.

عنکبوت تصمیم می‌گیرد بی سروصدا از روی دیوارها، کف و سقف اتاق به طرف مگس برود و بگیردش. کوتاهترین مسیر ممکن چیست؟

راه‌حل. اتاق را مانند شکل ۱۶۷ باز کنید. کوتاهترین مسیر از عنکبوت تا مگس خطی است که در شکل نشان داده شده است. [توجه: راههای دیگری هم برای باز و مسطح کردن اتاق هست و در هریک از اینها کوتاهترین مسیر از عنکبوت تا مگس متفاوت است. این راههای دیگر را هم امتحان کنید تا متقاعد شوید که مسیر شکل ۱۶۷ از همه کوتاهتر است.] □



شکل۱۶۶

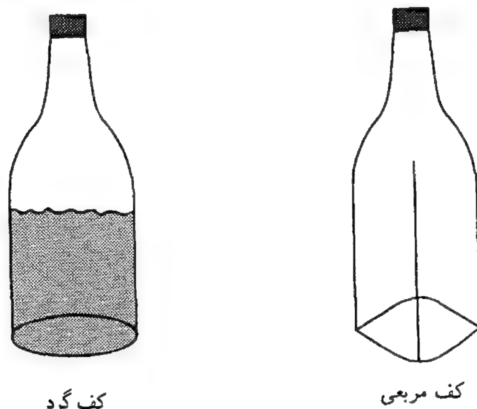


شکل۱۶۷

راه‌حل مسألهٔ اخیر اصل مهمی را نشان می‌دهد: نیازی نیست که مسأله را به همان صورتی‌که داده شده است تحلیل کنید. طوری مسأله را عوض کنید که درکش کنید.

مسألهٔ پیکارجوی ۸.۱.۸ مسألهٔ قبل را درصورتی‌که عنکبوت و مگس در دو گوشهٔ روبه‌رو باشند (یعنی یکی در گوشهٔ سقف باشد و دیگری در گوشه روبه‌رو در کف اتاق) حل کنید.

مسألهٔ ۹.۱.۸ بطری‌یی را درنظر بگیرید که کف آن تخت و به شکل دایره یا مربع، و کناره‌اش مستقیم باشد. بخشی از بطری (حدود نصف آن) را از مایعی پر کرده‌ایم. شکل ۱۶۸ را ببینید. سر بطری باریک است و درپوش پیچی دارد. درصورتی‌که فقط یک خطکش داشته باشید چگونه می‌توانید حجم بطری را به‌دقت تعیین کنید؟



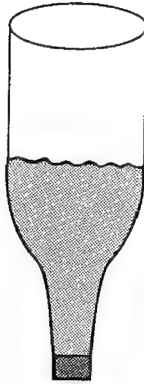
شکل۱۶۸

راه‌حل. دشمنمان دهانهٔ باریک بطری است، که اندازه‌گیری حجم آن حتی اگر ابزار بهتری داشته باشیم دشوار است. ابزار نامعمولی که در اختیار داریم، و معلوم نیست چگونه باید به کارش بگیریم، مایع درون بطری است. چگونه می‌توانیم با استفاده از این مایع حجم بطری را تعیین کنیم؟

ابتدا با خطکش قاعدهٔ بطری را اندازه بگیرید. مساحت کف بطری را حساب کنید. این مساحت را A بنامید. اکنون ارتفاع مایع را اندازه بگیرید و آن را h بنامید. حجم مایع درون بطری $V = A \cdot h$ است.

اکنون بطری را سروته نگاه دارید (مطمئن باشید که درپوش محکم است!). شکل ۱۶۹ را ببینید. می‌بینیم که مایع گردن بطری را (که اندازه‌گیری‌اش دشوار است) پر می‌کند و بخش خالی بطری استوانه‌ای است. اکنون ارتفاع بخش خالی را اندازه بگیرید و آن را h' بنامید. حجم این بخش $V' = A \cdot h'$ است.

پس حجم بطری $\nu = V + V'$ است. □



شکل۱۶۹

مسألهٔ ۱۰.۱.۸ در اتومبیل جدیدی سه وسیله برای صرفه‌جویی در مصرف سوخت نصب شده است. وسیلهٔ A به تنهایی ۲۵٪ در مصرف سوخت صرفه‌جویی می‌کند؛ وسیلهٔ B به تنهایی ۴۵٪ در مصرف سوخت صرفه‌جویی می‌کند؛ وسیلهٔ C به تنهایی ۳۰٪ در مصرف سوخت صرفه‌جویی می‌کند.

اکنون فرض کنید هر سه وسیله با هم کار می‌کنند و عملکردشان مستقل از هم است. آیا ترکیب این سه وسیله ۳۰ + ۴۵ + ۲۵، یعنی ۱۰۰ درصد در مصرف سوخت صرفه‌جویی می‌کند؟ احتمالاً نه. جواب درست چیست؟

راه‌حل. قبل از اینکه این مسأله را حل کنیم بهتر است مسألهٔ ۲۶ را در تمرینهای انتهای فصل ۶ ببینید.

مسلماً جواب ۱۰۰٪ نیست، چون بنابر اصلی بنیادی در فیزیک، انرژی از هیچ خلق نمی‌شود.

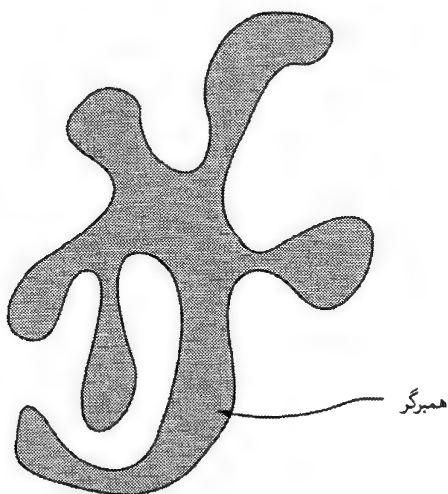
تحلیل درست چنین است. وقتی وسیلهٔ A به تنهایی کار کند اتومبیل ۰٫۷۵ سوختی را که بدون هیچ وسیلهٔ صرفه‌جویی مصرف می‌کند می‌سوزاند. وقتی که وسیلهٔ B هم با وسیلهٔ A کار می‌کند، اتومبیل ۰٫۵۵ سوختی را که فقط با وسیلهٔ A مصرف می‌کند می‌سوزاند. و وقتی وسیلهٔ C هم همراه با دو وسیلهٔ دیگر کار کند اتومبیل ۰٫۷۰ سوختی را می‌سوزاند که وقتی فقط A و B کار می‌کنند مصرف می‌کند.

پس وقتی A، B و C با هم کار می‌کنند اتومبیل ۰٫۷۰ × ۰٫۵۵ × ۰٫۷۵ سوختی را که در حالت عادی مصرف می‌کند می‌سوزاند. یعنی فقط ۰٫۲۸۸۷۵ سوخت معمول مصرف می‌شود. پس کلاً ۰٫۷۱۱۲۵ سوخت، یعنی ۷۱٫۱۲۵٪ در مصرف سوخت، صرفه‌جویی می‌شود. □

مسألهٔ ۱۱.۱.۸ روش پیوستگی یکی از قدرتمندترین روشهای ریاضیات است. قبلاً این روش را در بخش ۳.۲ دیده‌ایم. با این روش می‌توانیم در مورد انواع خاصی از مسأله‌ها بدون اینکه مسأله را حل کنیم نشان دهیم که مسأله راه‌حلی دارد.

در اینجا به نوعی از مسأله‌ها که به «مسأله‌های ساندویچ همبرگر» مشهورند می‌پردازیم. این مسأله‌ها گرچه ظاهراً کمی سطحی و بیهوده به‌نظر می‌رسند، الگوی تعدادی از مهمترین مسأله‌های توپولوژی و هندسه‌اند.

اولین سؤال این است: فرض کنید تکه‌ای همبرگر دوبعدی در صفحه، به هر شکلی که می‌خواهید، داریم. همبرگر ممکن است به شکل ستاره یا مربع یا لکه‌ای بدون هیچ شکل خاصی (شکل ۱۷۰) باشد. آیا می‌توان با برشی عمودی (موازی با محور y) طوری همبرگر را برید که مساحت آن دقیقاً نصف شود؟

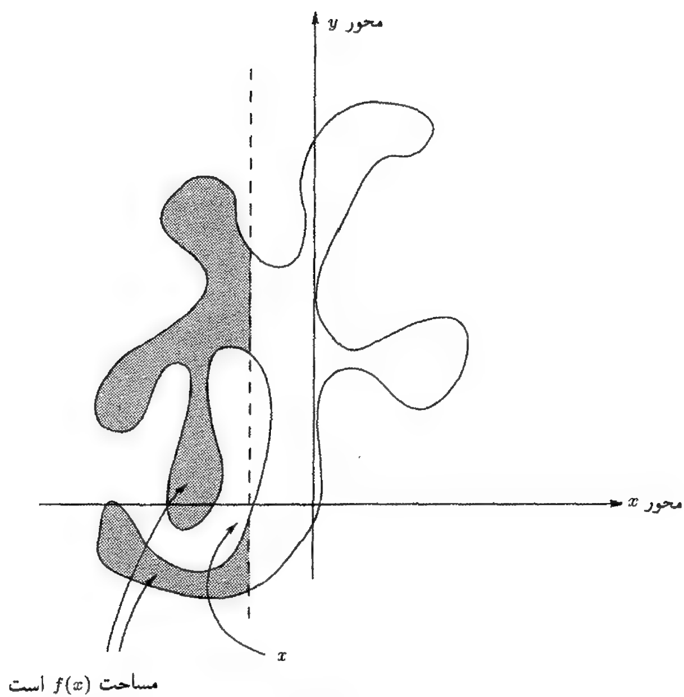


شکل ۱۷۰

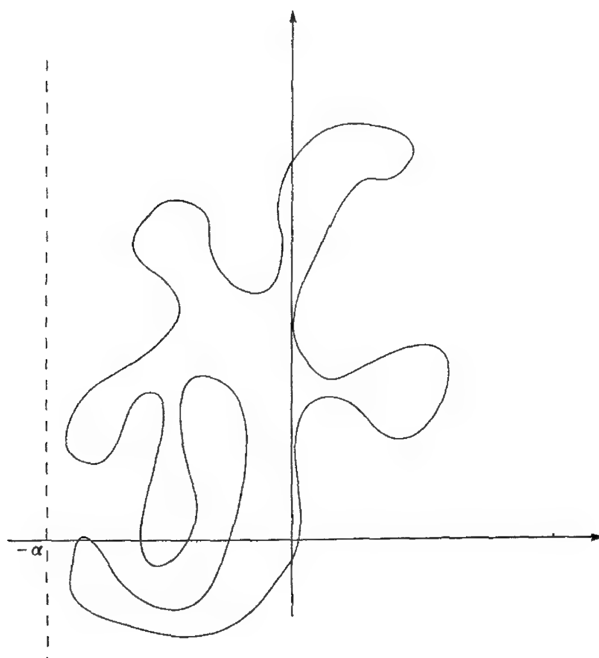
راه‌حل. ایدهٔ اصلی این است که تابعی پیوسته بیابیم و از ویژگیهای تابعهای پیوسته استفاده کنیم. فرض می‌کنیم که مساحت کلِ همبرگر ۱ و در بخشی کراندار از صفحه واقع باشد. (یعنی این همبرگر هم مانند بیشتر همبرگرهایی که در زندگی واقعی می‌بینیم، خرده‌خرده تا بینهایت نمی‌رود).

به‌ازای هر مقدار x روی محور افقی، $f(x)$ را مساحت بخشی از همبرگر می‌گیریم که سمت چپ خط قائم رسم شده در x قرار دارد (شکل ۱۷۱). توجه کنید که اگر x به اندازهٔ کافی منفی باشد (مثلاً $x = -\alpha$)، خط قائم کاملاً سمت چپ همبرگر قرار می‌گیرد و $f(x) = 0$ (هیچ تکه‌ای از همبرگر سمت چپ خط قائم در x نیست). شکل ۱۷۲ را ببینید. از طرف دیگر، اگر x به اندازهٔ کافی مثبت باشد (مثلاً $x = \beta$)، همهٔ همبرگر سمت چپ خط قائم در x قرار می‌گیرد. در این حالت، $f(x) = 1$. شکل ۱۷۳ را ببینید.

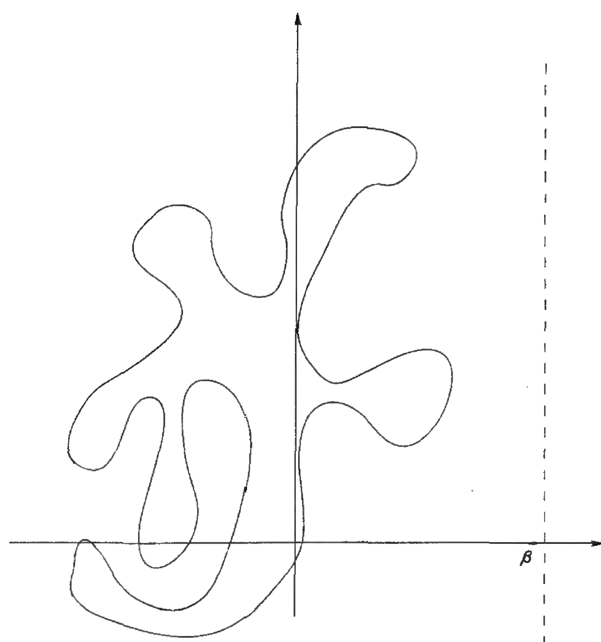
اکنون توجه کنید که تابع f پیوسته است؛ یعنی اگر مقدار x را فقط کمی تغییر دهیم مقدار $f(x)$ هم فقط کمی تغییر می‌کند. باید فکر کنید که چرا این‌طور است (اگر بخواهید همه چیز دقیق باشد مبحث پیشرفتهٔ «نظریهٔ اندازه» لازم است).



شکل۱۷۱

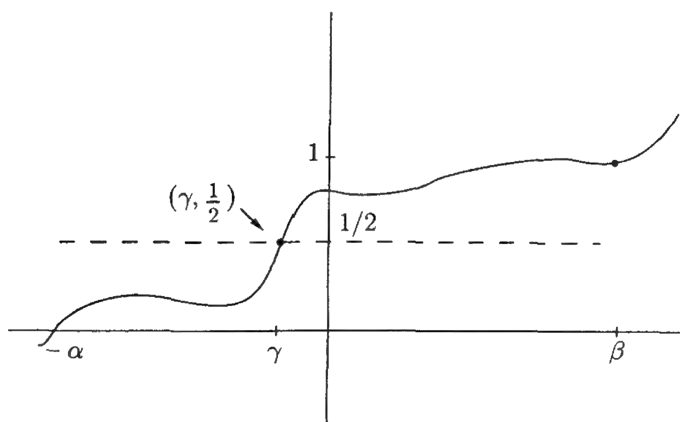


شکل۱۷۲



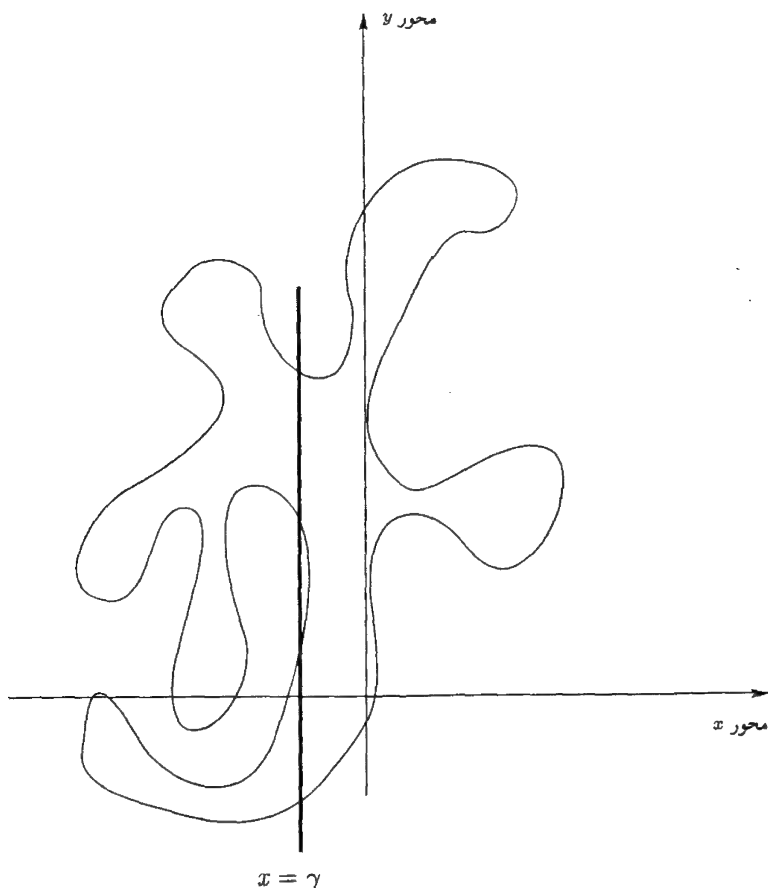
شکل۱۷۳

به‌خاطر آورید که تابع پیوسته (با دامنهٔ بازه) تابعی است که نمودارش را بتوان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد. به بیان دیگر، نمودار تابع پیوسته شکستگی یا پرش ندارد. نمودار تابع ما از نقطهٔ $(-\alpha, ۰)$ و همچنین از نقطهٔ $(\beta, ۱)$ می‌گذرد. نمودار چون شکستگی ندارد باید خط $y = \frac{۱}{۲}$ را دست‌کم یک‌بار قطع کند. شکل ۱۷۴ را ببینید. در شکل ۱۷۴ نقطهٔ تقاطع را با $(\gamma, \frac{۱}{۲})$ نشان داده‌ایم.



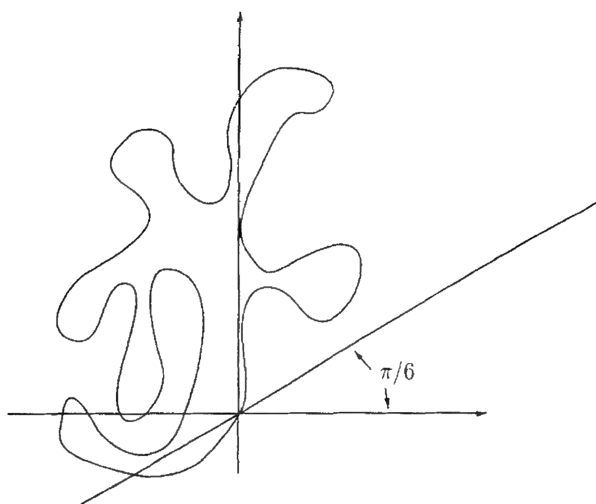
شکل۱۷۴

وقتی $x = \gamma$، $f(x) = \frac{1}{2}$. یعنی دقیقاً نصف مساحت همبرگر سمت چپ خط قائم در $x = \gamma$ قرار دارد. اما این یعنی اینکه دقیقاً نصف همبرگر سمت راست این خط قائم است. شکل ۱۷۵ را ببینید. مسأله را حل کرده‌ایم، ولی واقعاً راهی برای رسم خط قائمی که مساحت همبرگر را نصف کند نیافته‌ایم. □

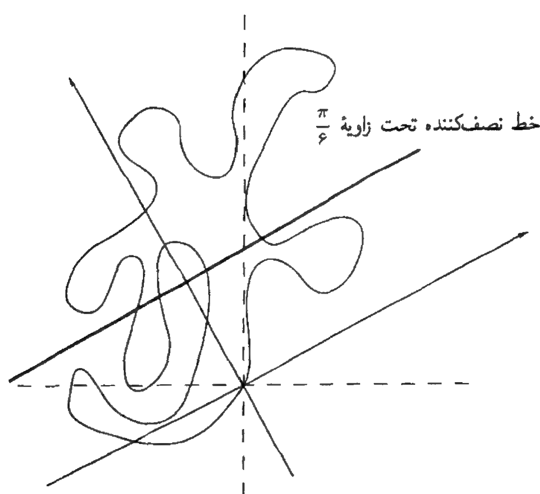


شکل۱۷۵

آیا در راه‌حل مسألهٔ قبل خطهای قائم ویژگی خاصی دارند که حتماً باید از چنین خطهایی استفاده کنیم؟ جواب منفی است. اگر دلمان می‌خواست خطهایی رسم کنیم که با افق زاویهٔ $\frac{\pi}{6}$ بسازند (شکل ۱۷۶) به‌سادگی می‌توانستیم دستگاه مختصات را دوران دهیم (شکل ۱۷۷)، مسأله را در دستگاه دوران‌یافته مانند قبل حل کنیم و دوباره دستگاه را در جهت عکس دوران دهیم تا به وضعیت اولیه برگردیم. در نتیجه در جهت هر زاویه‌ای مانند θ. می‌توانیم خطی بیابیم که تکه همبرگر مفروض را نصف کند.



شکل۱۷۶

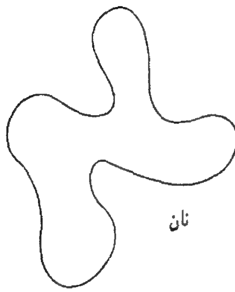


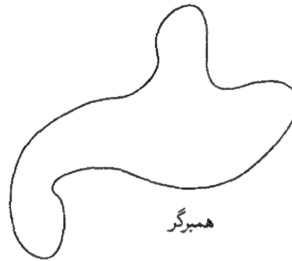
شکل۱۷۷

مسألهٔ ۱۲.۱.۸ اکنون مسألهٔ قبل را کمی پیچیده می‌کنیم. فرض کنید مقداری همبرگر، به هر شکل دلخواه، و مقداری هم نان داریم. برای اینکه مسأله ساده باشد، هم نان و هم همبرگر را در صفحهٔ اقلیدسی درنظر می‌گیریم. شکل ۱۷۸ را ببینید.

آیا می‌توان فقط با یک برش مستقیم هم نان و هم همبرگر را (از نظر مساحت) نصف کرد؟

راه‌حل. راه‌حلمان را براساس آنچه که در مسألهٔ قبل آموختیم بنا می‌کنیم. برای اینکه مشخصتر صحبت کنیم، با آرایش خاصی از همبرگر و نان که در شکل ۱۷۸ نشان داده شده است کار می‌کنیم. مساحت همبرگر را باز هم ۱ می‌گیریم و فرض می‌کنیم مساحت نان b باشد (چنانچه به‌زودی خواهید دید، اینکه

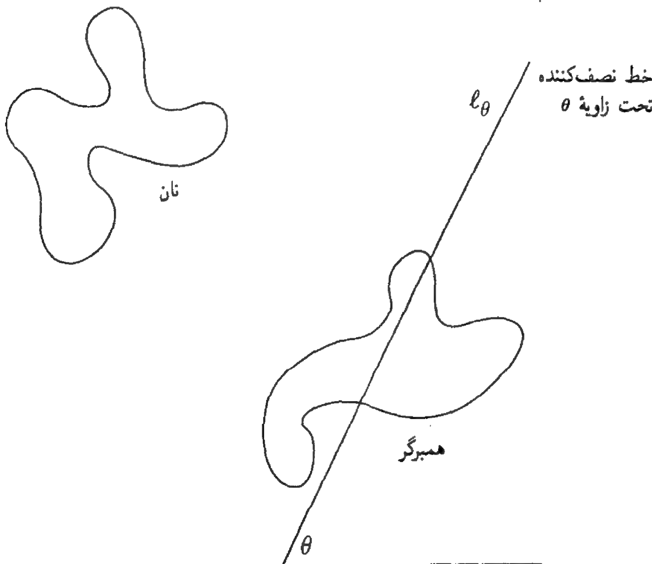




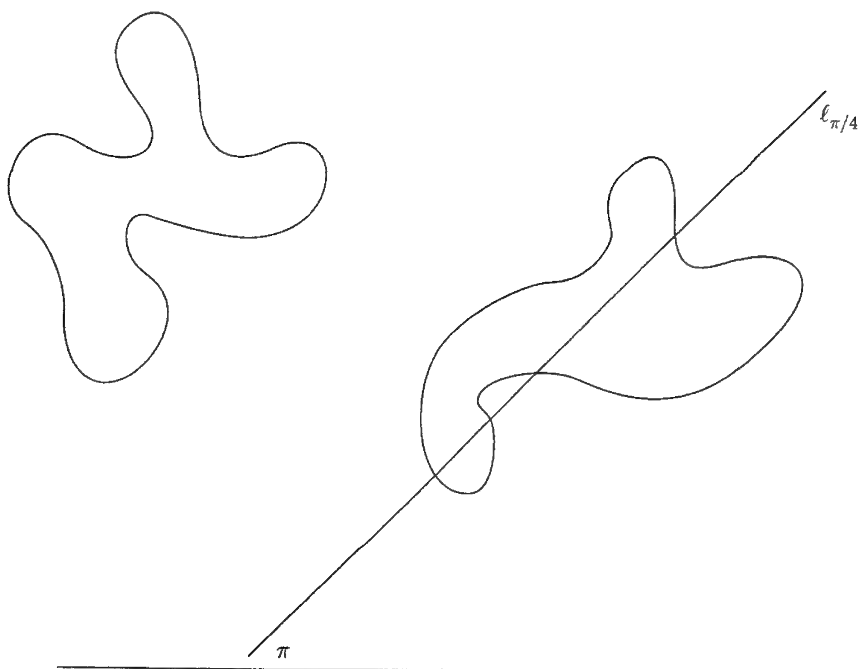
شکل۱۷۸

عدد مساحتها چه باشد چندان مهم نیست). به آسانی می‌توانید همین استدلال را برای هر آرایش دلخواه دیگری نیز به‌کار گیرید.

باز هم تابع پیوستهٔ خاصی را معرفی می‌کنیم. به‌ازای هر زاویه مانند θ بین ۰ و π رادیان، خطی را که در راستای زاویهٔ θ باشد و همبرگر را نصف کند ℓ_θ می‌نامیم (شکل ۱۷۹). در ملاحظات قبل از این مسأله دیدیم که چنین خطی، ℓ_θ، وجود دارد. $g(\theta)$ را برای نمایش مساحت مقدار نانی که بالا و سمت چپ خط ℓ_θ است به‌کار می‌بریم.

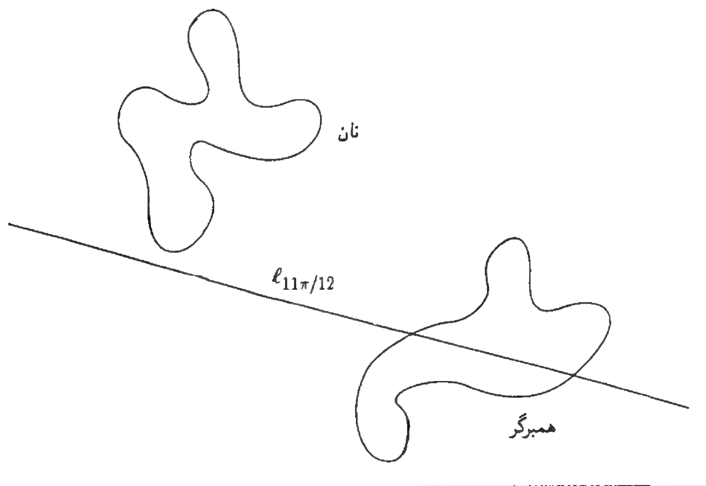


شکل۱۷۹

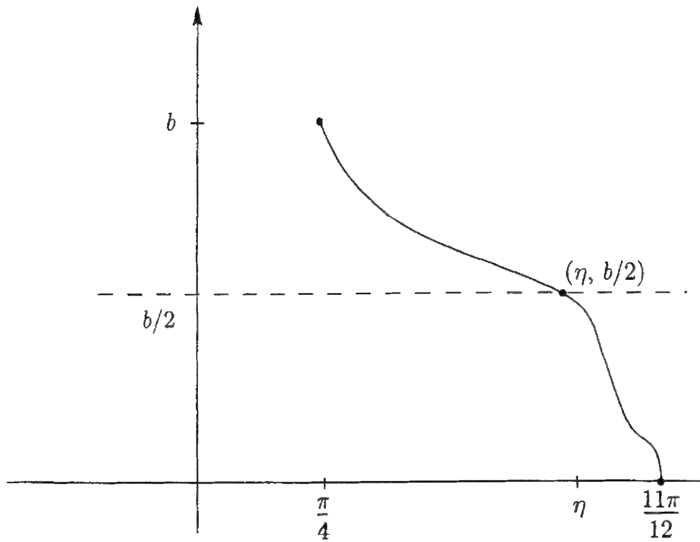


شکل ۱۸۰

توجه کنید (شکل ۱۸۰) که $g\left(\frac{\pi}{۴}\right) = b$؛ یعنی همهٔ نان بالا و سمت چپ خطی است که در راستای زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ همبرگر را نصف می‌کند. همچنین توجه کنید که $g\left(\frac{۱۱\pi}{۱۲}\right) = ۰$؛ یعنی هیچ مقداری از نان بالا و سمت چپ خطی که در راستای زاویهٔ $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ همبرگر را نصف می‌کند نیست (شکل ۱۸۱).



شکل ۱۸۱



شکل۱۸۲

در اینجا هم، با استدلالی شبیه آنچه که در مسألهٔ قبل بیان کردیم، تابع g پیوسته است. مقدار این تابع در $\theta = \frac{\pi}{۴}$ برابر b و در $\theta = \frac{۱۱\pi}{۱۲}$ برابر ۰ است. شکل ۱۸۲ نمودار تابعی پیوسته مانند g را نشان می‌دهد که چنین ویژگیهایی دارد. چون نمودار تابع پیوسته خمی بدون شکست است، نمودار باید خط افقی در ارتفاع $\frac{b}{۲}$ را در نقطه‌ای قطع کند (شکل ۱۸۲). مقدار متناظر برای θ را η بگیرید. پس $g(\eta) = \frac{b}{۲}$.

پس خط ℓ_η، که خودمان طوری رسم کرده‌ایم که همبرگر را نصف کند، نان را هم نصف می‌کند. خطی را که در جست‌وجویش بودیم یافته‌ایم. □

معلوم شده است که اگر پیچیدگی مسأله را یک پلهٔ دیگر زیاد کنیم، یعنی مثلاً مقداری پنیر هم در صفحه بگذاریم، یافتن خطی در صفحه که هم همبرگر، هم نان و هم پنیر را نصف کند ممکن نیست. این واقعیت ربطی به شکلهای عجیب و غریبی که انتخاب کرده‌ایم ندارد؛ اگر می‌خواهید فرض کنید نان، همبرگر، و پنیر هر سه به شکل قرص یکهٔ کامل باشند. باز هم نصف کردن هر سه با یک خط ناممکن است. اگر باور نمی‌کنید، بکوشید مثالی بیابید.

مسأله‌هایی که در اینجا مطرح می‌کنیم واقعاً مسأله‌هایی هستند که مربوط به بُعدند. اگر تکه‌ای همبرگر، تکه‌ای نان و تکه‌ای پنیر در فضای سه بُعدی داشته باشید، می‌توانید برشی مسطح (با استفاده از صفحه) بیابید که حجم هر سه را نصف کند. جزئیات فنی لازم برای اثبات این واقعیت نسبتاً پیشرفته‌اند و فعلاً از آنها صرف‌نظر می‌کنیم. ولی شما را ترغیب می‌کنیم که آزمایشهایی بکنید تا متقاعد شوید که این حکم درست است.

۲.۸ چند موردپژوهی

در این بخش چند موضوع را واقعاً از نوشتگان علمی و نوشتگان پژوهشی دیگر برداشته‌ایم. هدفمان این است که شما مسأله‌گشایی را «در عمل»، یعنی در موقعیتهایی از زندگی واقعی، ببینید. شما را ترغیب می‌کنیم که در مورد این مسأله‌ها فکر کنید و در کلاس دربارهٔ اینکه در هر مثال چه فنونی از مسأله‌گشایی به‌کار رفته‌اند، یا قابل به‌کارگیری‌اند، بحث کنید.

مسألهٔ ۱.۲.۸ (طرحهای مختلف رأی‌گیری) نظریهٔ رأی‌گیری بسیار پیشرفته است. هدف این نظریه یافتن سیستمی برای رأی‌گیری است که به بهترین نحو ممکن تمایل رأی‌دهندگان را منعکس کند. بنابر قضیه‌ای از اَرو [ARR]، اساساً در هر سیستم رأی‌گیری می‌توان تقلب کرد. یعنی رأی‌دهندگان می‌توانند طوری رأی دهند که، اگرچه رأیشان به نامزد مطلوبشان نباشد، اعضایی از جناح مخالف حذف شوند و شانس موفقیت نامزد مطلوبشان افزایش یابد. از قضیهٔ اَرو نتیجه می‌شود که، نه تنها در حال حاضر، بلکه هیچ‌وقت سیستم رأی‌گیری بی‌نقصی وجود نخواهد داشت.

در این «مسأله» سه سیستم رأی‌گیری را با هم مقایسه می‌کنیم: (۱) روش اکثریت؛ (۲) روش بوردا؛ و (۳) روش هار. در مسأله‌های انتهای فصل فرصت بیشتری برای تفکر در مورد این ایده‌ها خواهید داشت.

فرض کنید در انتخاباتی سه نفر به نامهای A، B و C نامزد شده‌اند. اکنون سه سیستم رأی‌گیری را با بررسی اثرشان بر نامزدها شرح می‌دهیم.

روش (۱) ساده‌ترین، و شاید ناقصترین روش است: نامزدی که بیشترین تعداد رأی را داشته باشد برنده می‌شود. در روش (۲) هر رأی‌دهنده به نامزدها رتبهٔ اول، دوم و سوم می‌دهد. «رتبهٔ میانگین» هر نامزد حساب می‌شود و نامزدی که بیشترین میانگین را داشته باشد برنده می‌شود. در روش (۳) هر رأی‌دهنده به نامزدها رتبهٔ اول، دوم و سوم می‌دهد. اگر هیچ نامزدی اکثریت قاطع را نداشته باشد، نامزدی که کمترین رتبهٔ اول را دارد حذف می‌شود. هر یک از رأیهای این نامزد به نامزدی که رأی‌دهنده به او رتبهٔ دوم داده است داده می‌شود.

برای روشن کردن این سه روش و برجسته کردن تفاوتهایشان، در اینجا مثالی عینی را بررسی می‌کنیم.

راه‌حل. انتخاباتی را تصور کنید که در آن سه نفر به نامهای A، B و C نامزد شده‌اند. تعداد رأی‌دهندگان ۳۳ نفر است. برای اینکه بتوانیم هر سه روش را با هم بررسی کنیم فرض می‌کنیم همهٔ ۳۳ نفر رأی داده‌اند و هر رأی‌دهنده نامزدها را رتبه‌بندی کرده است. نتیجهٔ شمارش آرا در جدول صفحهٔ بعد داده شده است. می‌بینیم (از سطر اول جدول) که ۱۰ نفر به A رتبهٔ اول، به B رتبهٔ دوم و به C رتبهٔ سوم داده‌اند. از سطر دوم جدول می‌بینیم که ۴ نفر به A رتبهٔ اول، به C رتبهٔ دوم و به B رتبهٔ سوم داده‌اند.

ابتدا روش رأی‌گیری (۱) را بررسی می‌کنیم. ۱۴ نفر A را مرجح دانسته‌اند (از سطرهای اول و دوم جدول)، ۹ نفر B را مرجح دانسته‌اند (از سطرهای سوم و چهارم جدول) و ۱۰ نفر C را مرجح

تعداد رأی‌دهندگان	رتبه‌بندی
۱۰	ABC
۴	ACB
۲	BAC
۷	BCA
۳	CAB
۷	CBA

دانسته‌اند (از سطرهای پنجم و ششم جدول). نامزدی که بیشترین تعداد رأی را دارد A است. پس با روش اکثریت، A برندهٔ انتخابات می‌شود.

اکنون روش بوردا را بررسی می‌کنیم. در این روش کار بیشتری باید انجام دهیم. به هر نامزد بابت هر رأی‌دهنده‌ای که به او رتبهٔ اول داده باشد ۳ امتیاز، بابت هر رأی‌دهنده‌ای که به او رتبهٔ دوم داده باشد ۲ امتیاز و بابت هر رأی‌دهنده‌ای که به او رتبهٔ سوم داده باشد ۱ امتیاز می‌دهیم. سطر اول جدول رأی ده نفر است. بنابر این اطلاعات، A سی امتیاز (۳ × ۱۰)، B بیست امتیاز (۲ × ۱۰) و C ده امتیاز (۱ × ۱۰) می‌گیرد. با ادامهٔ این شیوهٔ محاسبهٔ امتیازها در سطرهای بعدی جدول نتیجه می‌گیریم

کلِّ امتیاز A

$$= (۱۰ \times ۳) + (۴ \times ۳) + (۲ \times ۲) + (۷ \times ۱) + (۳ \times ۲) + (۷ \times ۱) = ۶۶$$

کلِّ امتیاز B

$$= (۱۰ \times ۲) + (۴ \times ۱) + (۲ \times ۳) + (۷ \times ۳) + (۳ \times ۱) + (۷ \times ۲) = ۶۸$$

کلِّ امتیاز C

$$= (۱۰ \times ۱) + (۴ \times ۲) + (۲ \times ۱) + (۷ \times ۲) + (۳ \times ۳) + (۷ \times ۳) = ۶۴$$

روشن است که رتبهٔ میانگین A، $\frac{۶۶}{۳۳}$، رتبهٔ میانگین B، $\frac{۶۸}{۳۳}$ و رتبهٔ میانگین C، $\frac{۶۴}{۳۳}$ است. با این روش رأی‌گیری B برنده می‌شود.

اکنون روش سوم، یعنی روش هار، را بررسی می‌کنیم. روشن است که هیچ نامزدی اکثریت رأیهای رتبهٔ اول را ندارد. B را حذف می‌کنیم، چون B کمترین رأی رتبهٔ اول را دارد. در دو تا از رأیهایی که B رتبهٔ اول را دارد A رتبهٔ دوم را دارد؛ پس این دور رتبهٔ اول را به A می‌دهیم. در هفت تا از رأیهایی که B رتبهٔ اول را دارد C رتبهٔ دوم را دارد؛ پس این رأیهای رتبهٔ اول را به C می‌دهیم. اکنون A، ۲ + ۱۴، یعنی ۱۶ رأی و C، ۷ + ۱۰، یعنی ۱۷ رأی دارد. در نتیجه با روش رأی‌گیری سوم، C برندهٔ انتخابات می‌شود.

خلاصه، سه روش معتبر تحلیل رأی را که با یک مجموعه از داده‌های رأی‌گیری سه نتیجهٔ متفاوت می‌دهند بررسی کرده‌ایم. در تمرینها از شما خواهیم خواست که راههای تقلب در این روشهای رأی‌گیری را بررسی کنید. □

مسألهٔ ۲.۲.۸ در پژوهشهای جامعه‌شناختی و پژوهشهای دیگر گفته شده است که بیشتر بزهکاران از خانواده‌های بزرگتر از متوسط‌اند. این پژوهشها، دست‌کم به‌طور ضمنی، القا می‌کنند که باید اثرات خانوادهٔ بزرگ بر کودکان که باعث جذب آنها به بزهکاری می‌شود بهتر درک شود.

اصلی مهم در آمار این است که همهٔ نتایج آماری متأثر از دیدگاه، روشهای نمونه‌گیری و فنون آماری‌اند. در این مسأله تحلیلی را بیان می‌کنیم دال بر اینکه **بیشتر مردم** (نه فقط بیشتر بزهکاران) **ازخانواده‌های بزرگتر از متوسط‌اند.**

راه‌حل. برای اینکه تحلیلمان مشخص باشد، فرض می‌کنیم با جمعیتی شامل بیست خانواده سروکار داریم. گذشته از این، فرض کنید نوزده تا از این خانواده‌ها فقط یک فرزند داشته باشند و یک خانواده دو فرزند داشته باشد. اکنون پرسش موردنظر را در مورد این خانواده‌های خاص جواب دهید. برای اینکه با اطلاعات نامربوط سروکار نداشته باشیم، جمعیت هر خانواده را فقط تعداد فرزندان آن خانواده می‌گیریم.

تعداد فرزندان همهٔ خانواده‌ها برابر است با

$$۱۹ \times ۱ + ۱ \times ۲ = ۲۱$$

بیست خانواده داریم. پس متوسط تعداد فرزندان هر خانواده $\frac{۲۱}{۲۰}$ است. اکنون اندازهٔ متوسط خانواده‌ای را که فرزندی متعلق به آن است حساب می‌کنیم. توجه کنید که در اینجا دیدگاه خود را عوض کرده‌ایم. در آمار اول دیدگاه «به‌ازای خانواده» بود ولی اکنون دیدگاه «به‌ازای فرزند» است. تغییر دیدگاه ابزار آماری مهمی است.

کلاً ۲۱ فرزند داریم. نوزده تا از آنها از خانواده‌های تک‌فرزندی‌اند. دو تا از آنها از خانوادهٔ دو فرزندی‌اند. پس اندازهٔ متوسط خانواده از دیدگاه فرزند برابر است با

$$\frac{۱۹ \times ۱ + ۲ \times ۲}{۲۱} = \frac{۲۳}{۲۱}$$

توجه کنید که

$$\frac{۲۳}{۲۱} > \frac{۲۱}{۲۰}$$

و این دقیقاً یعنی اینکه به‌طور متوسط، بیشتر فرزندان از خانواده‌های بزرگتر از متوسط‌اند. □

مسألهٔ پیکارجوی ۳.۲.۸ آیا می‌توانید با تحلیل دیگری در مسألهٔ قبل بگویید که به‌طور متوسط، بیشتر فرزندان از خانواده‌های کوچکتر از متوسط‌اند؟

مسألهٔ ۴.۲.۸ بسیاری از پارادکسها و معماها براساس درک نادرست «احتمال شرطی» ساخته می‌شوند. احتمال شرطی احتمال روی دادن پیشامد A است به فرض اینکه پیشامد B روی داده باشد. بهترین راه فهمیدن این مفهوم استفاده از مثال است.

فرض کنید که برای تشخیص نوعی سرطان آزمایش داده‌اید. پزشک به شما می‌گوید که این آزمایش ۹۵٪ دقیق است. نتیجهٔ آزمایش مثبت است (در اینجا مثبت به این معنی است که آزمایش نشان می‌دهد شما سرطان دارید). اگر این وضعیت را درست تحلیل نکنید احتمالاً نتیجه می‌گیرید که به احتمال ۹۵٪ سرطان دارید. ولی چنین برداشتی درست نیست. درواقع احتمال اینکه سرطان داشته باشید بسیار کمتر است. پیش از اینکه به توضیح این وضعیت بپردازیم باید متذکر شویم که فهمیدن این موضوع فقط کنجکاوی سطحی نیست. امروزه بسیاری از متقاضیان کار باید آزمایش ادرار بدهند تا معلوم شود اعتیاد ندارند. اگر دقت چنین آزمایشی ۹۵٪ باشد و اگر نتیجهٔ آزمایش مثبت باشد، مهم است که بدانید (و وکیلتان بداند) معنی این نتیجه چیست. همچنین بیشتر شرکتهای بیمهٔ عمر و بیمهٔ درمانی فقط درصورتی افراد را بیمه می‌کنند که متقاضی بیمه آزمایش ویروس HIV بدهد. همان توضیحات قبلی در این مورد هم صادق است: هر آزمایشی درصد دقت مشخصی دارد. برای شخصی که نتیجهٔ آزمایشش مثبت می‌شود، و برای شرکتی که چنین آزمایشی را خواسته است، درک اینکه معنی نتیجهٔ مثبت چیست اهمیت زیادی دارد.

راه‌حل. داده‌های مشخصی را بررسی می‌کنیم. فرض کنید بدانیم که دقت آزمایشی ۹۵٪ است. معنی این دقت چیست؟ این یعنی اینکه ۹۵٪ آزمایشها درست‌اند. یعنی ۹۵٪ همهٔ آزمایشهای مثبت درست‌اند و ۹۵٪ همهٔ آزمایشهای منفی نیز درست‌اند. فهمیدن این دو واقعیت ساده کلید تحلیل ماست.

باز هم برای اینکه مشخص صحبت کنیم، فرض کنیم آزمایش بر روی همهٔ افراد جمعیتی ۲۰۰۰۰ نفری انجام می‌شود. و فرض کنید ۱٪ جمعیت مبتلا به بیماری مورد آزمایش هستند.

فرض ما این است که ۱٪ از ۲۰۰۰۰ نفر، یعنی ۲۰۰ نفر، واقعاً بیمارند. چون دقت آزمایش ۹۵٪ است، فقط ۹۵٪ از این ۲۰۰ بیمار نتیجهٔ مثبت از آزمایش می‌گیرند و ۵٪ از آنها نتیجهٔ منفی می‌گیرند. پس ۱۹۰ نفر از بیماران نتیجهٔ مثبت و ۱۰ نفر از آنها نتیجهٔ منفی می‌گیرند.

۱۹۸۰۰ نفر از جمعیت مورد مطالعهٔ ما بیمار نیستند. ۹۵٪ از این افراد از آزمایش نتیجهٔ منفی می‌گیرند و ۵٪ از آنها نتیجهٔ مثبت می‌گیرند. پس ۱۸۸۱۰ نفر نتیجهٔ منفی و ۹۹۰ نفر نتیجهٔ مثبت می‌گیرند.

با محاسبات دو بند قبل درمی‌یابیم که ۹۹۰ + ۱۹۰، یعنی ۱۱۸۰ نفر نتیجهٔ مثبت و ۱۸۸۱۰ + ۱۰، یعنی ۱۸۸۲۰ نفر نتیجهٔ منفی می‌گیرند. پس احتمال اینکه شخصی بیمار باشد درصورتی‌که از آزمایش نتیجهٔ مثبت گرفته باشد برابر است با

$$\frac{\text{تعداد بیمارانی که نتیجهٔ مثبت گرفته‌اند}}{\text{تعداد همهٔ کسانی که نتیجهٔ مثبت گرفته‌اند}} = \frac{۱۹۰}{۱۱۸۰} \approx ۰/۱۶۱$$

و احتمال اینکه کسی نتیجهٔ مثبت بگیرد درصورتی‌که بیمار باشد برابر است با

$$\frac{\text{تعداد بیمارانی که نتیجهٔ مثبت گرفته‌اند}}{\text{تعداد بیماران}} = \frac{۱۹۰}{۲۰۰} = ۰/۹۵$$

می‌بینید که دو نتیجه تفاوت زیادی دارند. اگر بدون هیچ اطلاع قبلی از اینکه بیمارید یا نه آزمایش بدهید و نتیجه مثبت باشد، احتمال اینکه واقعاً بیمار باشید فقط ۱۶/۱٪ است. اما اگر بدانید که بیمارید و آزمایش بدهید احتمال اینکه نتیجهٔ آزمایش مثبت باشد ۹۵٪ است.

در این مثال مسأله خاصی از قضیهٔ بِیز در مورد احتمال شرطی را مطالعه کردیم. □

۳.۸ آمار

بخش بزرگی از اندیشهٔ تحلیلی جدید وابسته به آمار است. آمار در مطالعهٔ داده‌ها در حرفهٔ پزشکی، برای مطالعهٔ داده‌های سیاسی و عقیده‌سنجی، برای مطالعهٔ نتایج امتحانهای روانشناختی، برای تعیین دقت تشخیص هویت از روی DNA و غیره به‌کار می‌رود. در آمار می‌کوشیم با اطلاعاتی که از تعداد کمی از افراد جمعیت به‌دست می‌آوریم در مورد کل جمعیت نتیجه‌گیری کنیم. در این بخش استفاده‌های درست و نادرست از آمار را نشان می‌دهیم.

مسألهٔ ۱.۳.۸ ادعا شده است که اکثر کودکان وقتی برای مدرسه رفتن ندارند. زیرا هر کودک روزانه ۸ ساعت، یعنی یک‌سوم وقتش در خواب است. پس هر کودک در ۳۶۵ روز سال، ۱۲۱/۶۷ روز در خواب است.

همچنین، کودک سه تا چهار ساعت را در روز صرف خوردن می‌کند. پس کلاً ۴۵ روز در سال مشغول خوردن است.

همچنین ۹۰ روز در سال تعطیلات تابستانی است.

همچنین ۵۲ روز در سال به مناسبت عید یا مراسم دیگر تعطیل است.

همچنین ۵۲ روز جمعه در سال هست که تعطیل است.

پس فعالیتهای معمولی کودک کلاً

$$۱۲۲ + ۴۵ + ۹۰ + ۵۲ + ۵۲ = ۳۶۳$$

روز از ۳۶۵ روز سال را می‌گیرد. پس کودک تقریباً وقتی برای حاضر شدن در مدرسه ندارد. چه اشتباهی در این استدلال هست؟

راه‌حل. فقط اشاره‌ای به اشتباه این تحلیل می‌کنیم. در ۹۰ روز تعطیلات تابستانی کودک هم غذا می‌خورد هم می‌خوابد. پس این ساعتها را دوبار به‌حساب آورده‌ایم. به همین ترتیب، کودک در تعطیلات

آخر هفته هم غذا می‌خورد هم می‌خوابد.

اکنون باید با احتساب این اضافه‌شماریها تحلیل درستی انجام دهید و تعیین کنید که کودک چند ساعت برای حاضر شدن در مدرسه وقت دارد. □

مسألهٔ پیکارجوی ۲.۳.۸ در جنگ کوتاهی که در سال ۱۸۹۸ میلادی بین امریکا و اسپانیا درگرفت مرگ‌ومیر در نیروی دریایی امریکا ۹ نفر در هزار نفر بود. در همان زمان، مرگ‌ومیر در شهر نیویورک ۱۶ نفر در هزار نفر بود.

این آمارها درست‌اند. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا پیوستن به نیروی دریایی و رفتن به جنگ بی‌خطرتر از شهروندی بازنشسته در شهر نیویورک بودن است؟ آیا بزهکاری و جنایت در نیویورک آنقدر زیاد است که رفتن به میدان جنگ بهتر از قدم زدن در خیابانهای نیویورک است؟ چند تحلیل مختلف از این مسأله عرضه کنید.

مسألهٔ ۳.۳.۸ در شرکت کوچکی داده‌های زیر در پایان سال مالی به‌دست آمده است. شرکت چهار سهامدار و ۱۲۰ کارمند دارد. هر سهامدار سالانه ۱۰۰۰۰۰ دلار حقوق می‌گیرد. هر کارمند سالانه ۱۲۰۰۰ دلار حقوق می‌گیرد. شرکت کلاً ۲۴۰۰۰۰ دلار سود کرده است که باید بین سهامداران تقسیم شود. دو مدل آماری مختلف برای تهیهٔ گزارش مالی این شرکت بسازید.

راه‌حل. ساده‌لوحانه‌ترین (و احتمالاً صادقانه‌ترین) گزارش چنین است:

۱. هر کارمندی ۱۲۰۰۰ دلار دریافت کرده است.

۲. هر سهامدار ۱۰۰۰۰۰ دلار حقوق و ۶۰۰۰۰ دلار سود سهام، یعنی کلاً ۱۶۰۰۰۰ دلار دریافت کرده است.

اشکال این تحلیل آماری این است که نشان می‌دهد دریافتی هر سهامدار حدود ۱۳٫۳۳۳ برابر دریافتی هر کارمند بوده است. گذشته از این، سود هر سهامدار ۵۰۰٪ مزد هر کارمند بوده است. چنین آماری از دیدگاه مدیریت وجههٔ عمومی نامناسبی دارد.

البته راههای زیادی برای انجام امور حسابداری هست و می‌توان از این راهها (مانند هر آمار دیگری) به نفع صاحبان حساب استفاده کرد. فرض کنید بگوییم ۱۶۰۰۰۰ دلار از سود شرکت به عنوان پاداش به سهامداران پرداخت شده است. پس هر سهامدار سالانه ۱۰۰۰۰۰ دلار حقوق و ۴۰۰۰۰ دلار پاداش (یعنی کلاً ۱۴۰۰۰۰ دلار حقوق و مزایا)، و ۲۰۰۰۰ دلار سود سهام دریافت کرده است. ببینید این عددها را به چه صورت مفیدی می‌توان گزارش کرد:

$$\text{میانگین حقوق} = \frac{۱۲۰ \times ۱۲۰۰۰ + ۴ \times ۱۴۰۰۰۰}{۱۲۰ + ۴} = ۱۶۱۲۹٫۰۳$$

اکنون سود هر سهامدار نیز ۲۰۰۰۰ دلار است. این مطبوعتر به‌نظر می‌رسد: میانگین حقوق حدود $\frac{۴}{۳}$ مزد هر کارمند است؛ و این نسبت معقول است چون سهامداران باید بیشتر از کارمندان دریافت کنند. هر سهامدار هم ۲۰۰۰۰ دلار سود برده است و سود سهامداران کلاً ۸۰۰۰۰ دلار می‌شود؛ این هم در مقایسه با ۲ میلیون دلار حقوقی که پرداخت شده است چندان زیاد نیست. می‌بینیم که سود سهامداران در مقایسه با حقوق پرداخت شده بسیار کم است.

روشن است که این شرکت بیشتر در بند منافع کارمندان است و چندان به ثروتمند شدن سهامداران نمی‌اندیشد. □

مسألهٔ ۴.۳.۸ این مسأله قدیمی و مشهور است. صورت مسأله سطحی و بچه‌گانه می‌نماید: «احتمال اینکه در نفس بعدی که می‌کشید یک مولکول از هوای بازدم ژولیوس سزار را وقتی که گفت «وتو، بروتوس؟» به شُشهایتان وارد کنید چقدر است؟»

دو نکته در این مسأله هست: یکی اینکه واقعاً می‌توانید مدلی ریاضی بسازید و جوابی برای این مسأله بیابید؛ و دیگر اینکه احتمال اینکه شما و ژولیوس سزار هوای مشترکی را تنفس کرده باشید بسیار زیاد است. این مسأله را به جیمز جینز $[JEA]$ نسبت می‌دهند و به‌طور مبسوط در $[LIT]$، $[PAUL1]$ و $[REN]$ دربارهٔ آن بحث شده است. راه‌حل ما از این مراجع برداشته شده است.

راه‌حل. پیشاپیش چیزی نمی‌دانیم. باید فرضهای خاصی بکنیم. یکی از فرضها این است که آخرین بازدم ژولیوس سزار یکنواخت در سرتاسر جَو توزیع شده است. فرض دیگر این است که همهٔ مولکولهای این بازدم هنوز در جَو موجودند و در بخشهای ناشناختهٔ عالم پراکنده نشده‌اند و تجزیه و بازترکیب (مثلاً در فرایند اکسیداسیون) هم نشده‌اند. سرانجام فرض می‌کنیم که مولکولهای هوا یکنواخت در جَو توزیع شده‌اند (این فرض کاملاً درست نیست، چون هر چه از سطح زمین دورتر شویم جَو رقیقتر می‌شود؛ ولی نزدیک سطح زمین که ما زندگی می‌کنیم این فرض درست است).

همچنین به اطلاعاتی نیاز داریم که از مراجع ذکر شده وام می‌گیریم. ابتدا از کتاب دستی فیزیک و شیمی جرم جَو زمین، مقدار عدد آووگادرو و وزن مولکولی جَو را پیدا می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم که جَو حاوی $۱۰^{۴۴}$ مولکول است.

یک مول از هر گاز در دمای استاندارد ۲۲٫۴ لیتر فضا را اشغال می‌کند و حاوی ۶×۱۰^{۲۳} مولکول است. آزمایش نشان می‌دهد که به‌طور میانگین بازدم انسان حاوی ۰٫۴ لیتر هواست. پس تعداد مولکولها در بازدم میانگین برابر است با

$$۰٫۴ \times \frac{۱}{۲۲٫۴} \times (۶ \times ۱۰^{۲۳})$$

یعنی $۱٫۰۷۱۴ \times ۱۰^{۲۲}$ مولکول.

پس با وضعیتی ساده مواجهیم: در بازدم بعدی شما $۱٫۰۷۱۴ \times ۱۰^{۲۲}$ مولکول هست؛ در بازدم

سزار هم $۱٫۰۷۱۴ \times ۱۰^{۲۲}$ مولکول بوده است و این مولکولها در عالمی که $۱۰^{۴۴}$ مولکول دارد پخش شده‌اند. احتمال اینکه مولکول یکسانی در هر دو بازدم باشد چقدر است؟

ابتدا مسأله را به‌طور شهودی بررسی می‌کنیم. تعداد مولکولهای بازدم را به $۱۰^{۲۲}$ گرد می‌کنیم. چون جَو $۱۰^{۴۴}$ مولکول دارد، کلاً $۱۰^{۲۲}$ بازدم در جَو هست که هر کدام $۱۰^{۲۲}$ مولکول دارد. اگر نفس $۱۰^{۲۲}$ مولکولی سزار به‌طور یکنواخت و تصادفی در جَو پخش شده باشد، در هر نفس دیگری یک مولکول از این بازدم هست (چون تعداد مولکولهای بازدم سزار به تعداد نفسهای موجود در جَو است). پس تقریباً مطمئنیم که در نفس بعدی شما یک مولکول از بازدم سزار هست.

ترفند مسأله دقیق کردن این وضعیت شهودی است. فرایندِ دقیق کردن محاسبات ما را با یکی از مهمترین مشکلات محاسبات علمی آشنا می‌کند. براساس عددهای ساده شدهٔ قبلی، در جَو $۱۰^{۴۴} - ۱۰^{۲۲}$ مولکولی هست که در بازدم سزار نبوده‌اند. یکی از مولکولهای نفس بعدی خود را درنظر بگیرید. احتمال اینکه این مولکول غیرسزاری باشد برابر است با

$$\frac{۱۰^{۴۴} - ۱۰^{۲۲}}{۱۰^{۴۴}} = ۱ - ۱۰^{-۲۲} \qquad (*)$$

این احتمال در مورد هر یک از مولکولهای نفس بعدی شما درست است. پس احتمال اینکه هر مولکول در نفس بعدی شما غیرسزاری باشد حاصل‌ضرب عدد سمت راست برابری (*)، $۱۰^{۲۲}$ بار در خودش است (برای هر مولکول نفس بعدی شما یک‌بار). پس

$$(**) \qquad \text{احتمال اینکه نفس بعدی شما کاملاً غیرسزاری باشد} = (۱ - ۱۰^{-۲۲})^{۱۰^{۲۲}}$$

اکنون اشکال اینجاست: اگر عدد $۱ - ۱۰^{-۲۲}$ را به ماشین‌حساب وارد کنید نتیجه ۱ خواهد بود، چون احتمالاً ماشین حسابتان حداکثر ۱۰ رقم دقت دارد. عدد سمت راست برابری (**) مطمئناً یک نیست. چه‌کار باید بکنیم؟ بیشتر زبانهای کامپیوتری (مانند فرترن) هشت رقم دقت دارند (شانزده رقم در حالت دقت دوگانه). باز هم گرفتار شده‌ایم.

ماشین‌حساب و کامپیوتر جایگزین ریاضیات نظری نیستند و ریاضیات نظری اساساً تنها ابزاری است که در اینجا ممکن است نجاتمان دهد (اگرچه می‌توانید از نرم‌افزار جبری کامپیوتری متمتیکا استفاده کنید). می‌دانیم که عبارت $\left(۱ - \frac{۱}{k}\right)^{k}$ وقتی $k \to \infty$ به عکس عدد اویلر میل می‌کند (عدد اویلر... $e \approx ۲٫۷۱۸$). همچنین می‌دانیم که $\left(۱ - \frac{۱}{k}\right)^{k}$ با دقت k رقم اعشار تقریبی از $e^{-۱}$ است. عدد ما، یعنی $(۱ - ۱۰^{-۲۲})^{۱۰^{۲۲}}$، وقتی $k = ۱۰^{۲۲}$، دقیقاً در این مدل می‌گنجد. نتیجه می‌گیریم احتمال اینکه نفس بعدی شما حاوی مولکولی از بازدم سزار نباشد برابر است با

$$(۱ - ۱۰^{-۲۲})^{۱۰^{۲۲}} \approx \frac{۱}{e} \approx \frac{۱}{۲٫۷۱۸} = ۰٫۳۶۸$$

به بیان دیگر، احتمال اینکه نفس بعدی شما حاوی مولکولی از بازدم سزار باشد ۶۳٪ است. □

مسألهٔ پیکارجوی ۵.۳.۸ فرض کنید که عدد اویلر، e، را نمی‌شناسید. آیا می‌توانید راه دیگری برای تخمین $(۱ - ۱۰^{-۲۲})^{۱۰^{۲۲}}$ بیابید؟ [راهنمایی: لگاریتم ممکن است راهگشا باشد.]

تمرین فصل ۸

۱. طول خط آهنی دقیقاً یک مایل است. خط آهن در زمینی تخت قرار دارد. روزی بسیار گرم در تابستان خط آهن به اندازهٔ یک فوت منبسط می‌شود. خط آهن، چون دو طرفش محکم به زمین وصل شده است، خم می‌شود و به شکل کمانی مستدیر به طول ۵۲۸۱ فوت درمی‌آید (هر مایل ۵۲۸۰ فوت است). در وسط این کمان ارتفاع خط آهن از زمین چقدر است؟ [راهنمایی: فقط با محاسبات دستی تا جایی می‌توانید این مسأله را پیش ببرید. بعد از آن باید از ابزارهای محاسباتی، یا شاید ابزاری برای رسم دقیق مانند CAD استفاده کنید. فنِ دیگری برای حل کردن این مسأله استفاده از روش نیوتون است. در مورد این مسأله با دیگران بحث کنید.] این مسأله از [HAL] است.

۲. روزنامه‌ای بردارید و اولین صد عدد صحیحی را که در روزنامه می‌بینید بنویسید. مثلاً اگر در مقاله‌ای می‌خوانید که ارزش سهام شرکتی ۲۷ درصد افزایش یافت و به ۳۵۴۲ رسید، عددهای ۲۷ و ۳۵۴۲ را بنویسید. اکنون عددهایی را که نوشته‌اید براساس اینکه کدامها با ۱ شروع می‌شوند، کدامها با ۲ شروع می‌شوند و غیره مرتب کنید. تحلیلی ابتدایی از این موقعیت این است که حدود یک‌نهم از عددها با ۱ شروع می‌شوند، حدود یک‌نهم از عددها با ۲ شروع می‌شوند، و غیره (توجه کنید که معمولاً عددی با ۰ شروع نمی‌شود و بنابراین ۰ را درنظر نگرفته‌ایم). اما احتمالاً در فهرست شما درصد عددهایی که با ۱ شروع می‌شوند بیشتر از ...۱۱٫۱۱۱۱۱ است. آیا می‌توانید با تحلیلی توضیح دهید که چرا این‌طور است؟ چند راهنمایی می‌کنیم:

به‌ازای هر عددی مانند N از ۱ تا ۱۰۰ تعداد عددهای صحیح از ۱ تا N را که با ۱ شروع می‌شوند حساب کنید و این عدد را $i(N)$ بنامید. سپس نسبت $\frac{i(N)}{N}$ را تعیین کنید. توجه کنید که این نسبت همیشه دست‌کم $\frac{۱}{۹}$ است. اکنون همین کار را برای عددهایی مانند N از ۱۰۱ تا ۱۰۰۰ انجام دهید. باز هم نسبت $\frac{i(N)}{N}$ همیشه دست‌کم $\frac{۱}{۹}$ است. آیا الگویی می‌بینید؟

اکنون به‌ازای هر عدد طبیعی مانند K، میانگین مجموعهٔ عددهای

$$\left\{\frac{i(۱)}{۱}, \frac{i(۲)}{۲}, \ldots, \frac{i(K)}{K}\right\}$$

را حساب کنید. این میانگین وقتی $K \to \infty$ به‌حدی میل می‌کند. این حد چیست؟ آیا می‌توانید کران پایینی برای این حد بیابید؟ آیا می‌توانید این حد را دقیقاً تعیین کنید؟

۳. به کتابخانه بروید و شکل و ابعاد قلهٔ فوجی را تعیین کنید. با تحلیلی تعیین کنید که چقدر طول می‌کشد تا قلهٔ فوجی با کامیون به جایی در فاصلهٔ ۱۰۰ مایلی جای فعلی حمل شود. [راهنمایی: تحلیلتان باید پذیرفتنی باشد. مثلاً نمی‌توانید فرض کنید که کامیونی می‌تواند یک کیلومتر مکعب خالی را حمل کند یا نمی‌توانید فرض کنید که یک میلیون کامیون در اختیار دارید.] بحث نسبتاً مفصلی از این مسأله در [PAUL1] و در [RENZ] هست.

۴. احتمال اینکه در نفس بعدی که می‌کشید یک مولکول از هوای بازدم اسب مسابقهٔ مشهوری را درست در لحظهٔ قبل از مردنش به ششهایتان وارد کنید چقدر است؟ تحلیلی برای رسیدن به جواب این مسأله عرضه کنید. لازم است بدانید که به‌طور میانگین چند لیتر هوا در نفس هر اسب مسابقه هست. البته می‌توانید بعضی از ایده‌های مسألهٔ ۴.۳.۸ را به‌کار گیرید.

۵. فرض کنید اقتصاد کشور بر مبنای نان و شیر بنا شده است. سال پیش قیمت هر قرص نان پنجاه سنت و قیمت هر لیتر شیر یک دلار بوده است. امسال قیمت هر قرص نان یک دلار و قیمت هر لیتر شیر پنجاه سنت است. تحلیلی عرضه کنید که نشان دهد هزینهٔ زندگی بالا رفته است. تحلیلی عرضه کنید که نشان دهد هزینهٔ زندگی پایین آمده است. تحلیلی عرضه کنید که نشان دهد هزینهٔ زندگی تغییر نکرده است.

۶. پژوهشی نشان داده است که ارتباط تنگاتنگی بین دانشجویانی که سیگار می‌کشند و دانشجویانی که نمرهٔ پایین می‌گیرند وجود دارد. ممکن است نتیجه بگیرید که ارتباطی بین سیگار کشیدن و نمرهٔ کم گرفتن دانشجویان وجود دارد. یا اینکه سیگار نکشیدن باعث گرفتن نمرهٔ بالا می‌شود.

سه دلیل بیان کنید که نشان دهند این نتیجه‌گیری ممکن است نادرست باشد.

۷. یک سال است که هر روز صبح جنسی را به قیمت ۹۹ سنت خریده‌ام و بعدازظهر آن را به قیمت یک دلار فروخته‌ام.

تحلیلی عرضه کنید که نشان دهد در کلِّ فروش یکساله‌ام ۱٪ سود برده‌ام.

اکنون تحلیلی عرضه کنید که نشان دهد ۳۶۵٪ نسبت به پولی که سرمایه‌گذاری کرده‌ام سود برده‌ام.

۸. سازندهٔ روان‌نویسی در آگهیهای تبلیغاتی عنوان می‌کرد که روان‌نویس ساخت او یک مایل می‌نویسد (یعنی با آن می‌توان خطی به طول یک مایل رسم کرد). آیا این ادعا شگفت‌انگیز است؟ این طول به‌طور میانگین معادل چند صفحه نوشته است؟

۹. سرعت رشد مو برحسب مایل بر ساعت چقدر است؟

۱۰. شما ۱۰۰ دلار از بانک وام گرفته‌اید تا یک ساله با سود سادهٔ ۶٪ بازپرداخت کنید. تا آخر سال چه مقدار پول به بانک پرداخت می‌کنید؟ [راهنمایی: فرض کنید ماهانه دقیقاً یک دوازدهم اصل وام را بازپرداخت می‌کنید. پرداخت سود ماهانه ثابت نیست.]

۱۱. می‌دانیم که آزمایشی برای تشخیص نوعی بیماری ۹۸٪ دقت دارد. این به معنای آن است که اگر شخصی مبتلا به بیماری باشد و آزمایش بدهد در ۹۸٪ موارد نتیجه مثبت است؛ و اگر شخصی مبتلا به بیماری نباشد و آزمایش بدهد در ۹۸٪ موارد نتیجه منفی است.

اکنون فرض کنید که شخصی آزمایش داده و نتیجه مثبت بوده است. احتمال اینکه او واقعاً بیمار باشد چقدر است؟ برای اینکه مسأله ملموستر باشد فرض کنید که در جمعیت نمونه ۰٫۵٪ افراد بیمار باشند. همچنین فرض کنید، جمعیت نمونه ۱۰۰۰۰۰ نفر است.

اکنون فرض کنید که شخص موردنظر ما دوبار آزمایش بدهد و هر دو بار نتیجه منفی باشد. احتمال اینکه او بیمار باشد چقدر است؟

۱۲. برخی پژوهشها نشان داده‌اند که آزمایشهای دروغ‌سنجی ۷۵٪ دقت دارند. تحلیلی، مشابه تمرین ۱۱، طرح کنید که تعیین کند رد شدن در آزمایش دروغ‌سنجی دقیقاً به چه معناست.

۱۳. دانشجویی در دانشگاه پرینستون دوستی در نیویورک و دوستی در فیلادلفیا دارد. او برای رفتن به دیدار دوستانش در ایستگاه پرینستون سوار قطار می‌شود. تعداد قطارهای نیویورک و فیلادلفیا یکی است و قطارهای هر دو شهر هر بیست دقیقه حرکت می‌کنند. دانشجوی ما هر وقت که هوای دیدار دوستان به سرش بزند به ایستگاه پرینستون می‌رود و سوار اولین قطاری که برسد (چه به مقصد نیویورک چه به مقصد فیلادلفیا) می‌شود. او درمی‌یابد که طی مدت دو سال تعداد دفعاتی که دوست نیویورکی‌اش را دیده است نُه برابر تعداد دفعاتی است که دوست فیلادلفیایی را دیده است. چگونه چنین چیزی ممکن است؟

۱۴. شخصی متنی را در ۱۰ ساعت تایپ می‌کند. دوستش همان متن را در ۵ ساعت تایپ می‌کند. چقدر طول می‌کشد تا این متن را دو نفری تایپ کنند؟

۱۵. این مسأله اغلب به مسألهٔ «ساعت کانت» مشهور است. ایمانوئل کانت (۱۷۲۴-۱۸۰۴) فیلسوف و ریاضیدان مشهور آلمان در قرن هجدهم بوده است. او در کونیگسبرگ به دنیا آمد و همانجا زندگی کرد و می‌گویند هیچ‌وقت شهر را ترک نکرد. او هر روز سر ساعت معینی به پیاده‌روی می‌رفت. هر روز هم مسیر معینی را طی می‌کرد. می‌گویند قدم‌زدنش چنان منظم بود که مدت پیاده‌رویش همیشه یکسان بود.

روزی ساعت کانت خوابید. او ساعت دیگری نداشت. او به طرف خانهٔ دوستی راه افتاد. مدتی در خانهٔ دوستش ماند و با او گَپ زد. بعد یکراست از همان مسیری که آمده بود به خانه برگشت. وقتی به خانه رسید ساعتش را درست تنظیم کرد. او چگونه توانست این کار را بکند؟ [راهنمایی: این مسأله ترفندی ندارد، بلکه مسأله‌ای منطقی است.]

۱۶. فرض کنید ۲۵۰ میلیون نفر در ایالات متحد امریکا زندگی می‌کنند. فرض کنید هر کس با ۱۵۰۰ نفر آشناست. اگر دو نفر را به تصادف در قطاری انتخاب کنیم: احتمال اینکه این دو نفر آشنای مشترکی داشته باشند چقدر است؟ [راهنمایی: می‌توانید فرض کنید که آشنایان هر کس به‌طور یکنواخت در سراسر ایالات متحد امریکا پخش شده‌اند.]

سؤالی دیگر: اگر دو نفر به نامهای A و B را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه افرادی مانند α و β باشند به‌طوری‌که A، α را بشناسد و B، β را بشناسد و α، β را بشناسد چقدر است؟

۱۷. مدلی آماری برای جواب دادن به این سؤال ابداع کنید: احتمال اینکه تعداد موهای سر دو نفر در نیویورک یکی باشد چقدر است؟ [راهنمایی: باید جمعیت نیویورک و تعداد میانگین موهای سر را بدانید.]

۱۸. قرار است پانزده بار سکه‌ای را پرتاب کنید تا «شیر» بنشیند. اگر تا پانزدهمین پرتاب این اتفاق نیفتد یک میلیون دلار می‌گیرید. اگر پیش از پانزدهمین پرتاب سکه شیر بنشیند ۱۰ دلار باید بپردازید.

آیا عاقلانه است که در این بازی شرکت کنید؟ امکان بردنتان چقدر است؟ امکان باختنتان چقدر است؟ نسبت این عددها را با مقدار پاداش (اختلاف برد و باخت) مقایسه کنید.

۱۹. غروب روز چهارشنبه هواشناسی اعلام کرد که احتمال بارش باران در روز پنجشنبه ۵۰٪ و احتمال بارش باران در روز جمعه هم ۵۰٪ است. احتمال اینکه در تعطیلات آخر هفته شاهد بارندگی باشیم چقدر است؟ [راهنمایی: باید به دقت بیندیشید که معنی ۵۰٪ احتمال باران آمدن چیست؟ اگر نتیجه بگیرید که احتمال بارندگی در تعطیلات آخر هفته ۱۰۰٪ است درست نیست.]

۲۰. سرعت افزایش قد نوزاد برحسب کیلومتر بر دقیقه چقدر است؟ [راهنمایی: باید به کتابخانه بروید و ببینید که نوزادان به‌طور میانگین چقدر رشد می‌کنند. بعد می‌توانید جواب دادن به این مسأله را شروع کنید.]

۲۱. ورزشگاهی به شکل استوانه‌ای بزرگ بنا شده است. اگر خون همهٔ مردم ایالات متحد امریکا را بکشید و در این ورزشگاه بریزید ارتفاع خون چقدر خواهد بود؟ [راهنمایی: جمعیت ایالات متحد امریکا چقدر است؟ حجم خون انسان به‌طور میانگین چقدر است؟ مساحت قاعدهٔ ورزشگاه چقدر است؟]

۲۲. اگر همهٔ موهای سرتان را بکَنید و آنها را دنبال هم روی زمین بچینید طول آنها چقدر می‌شود؟

۲۳. متخصصی در حال مطالعهٔ نحوهٔ کار رستورانی برای افزایش بهره‌وری رستوران است. او متوجه می‌شود پیشخدمتی ناشی در رستوران کار می‌کند که ۳۰٪ از همبرگرهایی را که برای مشتریان می‌برد به زمین می‌اندازد. احتمال اینکه این پیشخدمت دقیقاً ۴ تا از ده همبرگر بعدی را بیندازد چقدر است؟

۲۴. روی صفحهٔ دواری حرفهای A، B، C، D، E و F نوشته شده است. هر بار که صفحه را بچرخانیم، وقتی صفحه متوقف شود یکی از این حرفها را می‌توان خواند. صفحه را ۱۰۰ بار می‌چرخانیم و حرفهایی را که هر بار ظاهر می‌شود دنبال هم می‌نویسیم. احتمال اینکه یکی از واژه‌های BAD، CAD، DAD، FAD، BED، DAB، یا FED در این دنباله باشد چقدر است؟

۲۵. چند نفر باید در ساختمانی (بزرگ) باشند تا مطمئن باشیم دو نفر از آنها تعداد موهای سرشان یکی است؟ چند نفر باید باشند تا احتمال اینکه دو نفر از آنها تعداد موهای سرشان یکی باشد بیشتر از ۰٫۵ شود؟

۲۶. یکی از کلاهبرداریهای رایج در بازارهای بورس چنین است. کلاهبردار ۱۰۰۰ نامه به ۱۰۰۰ نفر می‌نویسید و پیشگویی می‌کند که شنبهٔ آینده قیمت سهام شرکت A بالا می‌رود؛ او ۱۰۰۰ نامه هم به ۱۰۰۰ نفر دیگر می‌نویسد و پیشگویی می‌کند که شنبهٔ آینده قیمت سهام شرکت A پایین می‌آید. روز شنبه می‌رسد و قیمت سهام شرکت A پایین می‌آید.

کلاهبردار ۱۰۰۰ نفر اول را فراموش می‌کند و ۵۰۰ نامه به ۵۰۰ نفر از گروه دوم می‌نویسد و پیشگویی می‌کند که شنبهٔ آینده قیمت سهام شرکت B بالا می‌رود؛ او ۵۰۰ نامه هم به ۵۰۰ نفر دیگر گروه دوم می‌نویسد و پیشگویی می‌کند که شنبهٔ آینده قیمت سهام شرکت B پایین می‌آید.

این شنبه هم می‌رسد و قیمت سهام شرکت B بالا می‌رود. کلاهبردار ما ۵۰۰ نفر دوم را کنار می‌گذارد و ۲۵۰ نامه به ۲۵۰ نفر گروه اول می‌نویسد و پیشگویی می‌کند که شنبهٔ آینده قیمت سهام شرکت C بالا می‌رود و ۲۵۰ نامه هم به ۲۵۰ نفر دیگر گروه اول می‌نویسد و پیشگویی می‌کند که شنبهٔ آینده قیمت سهام شرکت C پایین می‌آید.

شنبهٔ سوم هم می‌رسد. اکنون ۲۵۰ نفر هستند که به پیشگوییهای کلاهبردار ما اعتقاد دارند، چون او سه پیشگویی درست کرده است (و هیچ پیشگویی نادرستی نکرده است). او نامه‌هایی به این ۲۵۰ نفر می‌نویسد و ادعا می‌کند پیشگویی بی‌نظیری دارد، که باعث سود کلانی می‌شود، ولی این بار پیش از گفتن پیشگوییش پول می‌خواهد. با در نظرگرفتن هزینهٔ پست و هزینه‌های دیگر، کلاهبردار ما از هر نفر چقدر باید طلب کند تا ۱۰۰۰۰۰ دلار استفاده کند؟

۲۷. مشهورترین نوع کلاهبرداری «طرح پونزی» نام دارد که اولین بار چارلز پونزی (۱۹۴۹-۱۸۷۷) آن را به‌کار برده است. طرح پونزی چیزی شبیه به این است. فرض کنید که نوع بسیار خوبی از کامپیوتر ۱۰۰۰۰ دلار قیمت دارد. شما پیش «هدف» خود (یعنی همان قربانی) می‌روید و می‌گویید که می‌توانید این کامپیوتر را فقط با ۵۰۰۰ دلار برای او بخرید. فقط مسأله این است که خریدار باید پول را پیش بدهد و دو ماه بعد کامپیوتر را تحویل بگیرد.

تا اینجا مشکلی نیست. چیزی که هدف شما نمی‌داند این است که (۱) شما برای خرید هر کامپیوتر همان ۱۰۰۰۰ دلار را می‌پردازید، ولی (۲) سه برابر آنچه تحویل می‌دهید سفارش می‌گیرید.

پس مثلاً فرض کنید که در ماه اول دَه سفارش می‌گیرید ولی کامپیوتر تحویل نمی‌دهید. در ماه دوم بیست سفارش دیگر هم می‌گیرید، ولی فقط کامپیوترهای دَه مشتری ماه اول را تحویل می‌دهید. پس تا آخر ماه دوم ۵۰۰۰ × ۳۰ یعنی ۱۵۰۰۰۰ دلار از مشتریانتان پول گرفته‌اید ولی فقط ۱۰۰۰۰ × ۱۰ یعنی ۱۰۰۰۰۰ دلار برای خرید کامپیوتر پول پرداخته‌اید. تا اینجا ۵۰۰۰۰ دلار سود برده‌اید.

روشن است که اگر بخواهید پولی برای خودتان بماند روزی باید ناپدید شوید و به تعدادی (زیاد) از سفارشها عمل نکنید. طرح پونزی را طوری بریزید که کلاهبردار در پایان یک سال بتواند با یک میلیون دلار پول فرار کند.

۲۸. شرکت بیمه‌ای در بیمهٔ جراحات ناشی از ورزش تخصص دارد. این شرکت براساس جدولهای کارشناسی بیمه پیش‌بینی کرده است که اگر در سال ۵۰۰۰۰ نفر را بیمه کند این موارد پیش می‌آید: (الف) دو نفر از این افراد ادعای ۲۰۰۰۰ دلار خسارت می‌کنند؛ (ب) بیست نفر از این افراد ادعای ۱۰۰۰۰ دلار خسارت می‌کنند؛ (ج) دویست نفر از این افراد ادعای ۱۰۰۰ دلار خسارت می‌کنند؛ هزار نفر از این افراد ادعای ۲۵۰ دلار خسارت می‌کنند. مقدار متوسط پولی را که شرکت به‌ازای هر بیمه‌نامه باید پرداخت کند و همچنین حق بیمه‌ای را که شرکت باید از بیمه‌شدگان بگیرد تا در سال یک میلیون دلار درآمد داشته باشد حساب کنید.

۲۹. دو ماهیگیر با هم رقابت دارند. آنها هیچ‌وقت با هم به ماهیگیری نمی‌روند. در یک سال ماهیگیر اول به‌طور میانگین در هر صید بیشتر از ماهیگیر دوم ماهی صید کرده است و در سال بعد نیز ماهیگیر اول به‌طور میانگین در هر صید بیشتر از ماهیگیر دوم ماهی صید کرده است، ولی در مجموع دو سال ماهیگیر دوم به‌طور میانگین در هر صید بیشتر از ماهیگیر اول ماهی صید کرده است. چگونه چنین چیزی ممکن است؟

۳۰. این مسأله در مورد «تاس‌بازی» است (صفحهٔ ۱۰۰ از مرجع [PAUL1] را ببینید). تاس α چهاروجه ۴ و دووجه ۰ دارد. تاس β هر شش وجهش ۳ است. تاس γ چهاروجه ۲ و دووجه ۶ دارد. تاس δ سه‌وجه ۵ و سه‌وجه ۱ دارد.

چهار نفر، هر یک با یکی از این تاسها، با هم بازی می‌کنند. بازیکنی که تاسش با عدد بزرگتری بنشیند برنده می‌شود. ثابت کنید که اگر α با β بازی کند، α به احتمال $\frac{۲}{۳}$ می‌برد. اگر β با γ بازی کند، β به احتمال $\frac{۲}{۳}$ می‌برد. اگر γ با δ بازی کند، γ به احتمال $\frac{۲}{۳}$ می‌برد. چون α بر β و β بر γ و γ بر δ پیروز می‌شود (هر یک به احتمال $\frac{۲}{۳}$) ممکن است نتیجه بگیرید که α بر δ پیروز می‌شود. ولی ثابت کنید که درواقع اگر α با δ بازی کند δ به احتمال $\frac{۲}{۳}$ برنده می‌شود.

۳۱. معنای قضیهٔ اَرو این است که عملاً در هر سیستم رأی‌گیری می‌توان تقلب کرد. در مورد هر یک از سه سیستم رأی‌گیری‌یی که در متن کتاب بررسی کردیم نشان دهید که رأی‌دهندگان چگونه می‌توانند (احتمالاً) با رأی دادن به نامزدی که انتخاب مرجحشان نیست نتیجهٔ رأی‌گیری را به

نفع خود عوض کنند. به بیان دقیقتر، بگویید که چگونه رأی‌دهندگان می‌توانند در دور اول به نامزدی که کمتر مورد علاقه‌شان است رأی‌دهند و نامزدی را که واقعاً رقیب نامزد مورد علاقهٔ این رأی‌دهندگان است حذف کنند.

درمورد این مسأله فقط فلسفه‌بافی نکنید. داده‌هایی عینی، شبیه متن کتاب، را درنظر بگیرید.

۳۲. مقاله‌ای، مثلاً در دایرةالمعارف، دربارهٔ سیستم انتخاباتی ایالات متحد امریکا بخوانید. شیوهٔ عمل آن را یاد بگیرید. با مثالهایی نشان دهید که چطور ممکن است آرای عمومی به نفع نامزدی باشد ولی سیستم انتخاباتی نامزد دیگری را انتخاب کند.

۳۳. باید مسافتی را در بارانی یکنواخت بپیمایید. آیا بهتر است با سرعت ثابت بدوید یا با سرعت ثابت راه بروید؟ یعنی با کدام شیوه کمتر خیس می‌شوید؟ [راهنمایی: جواب بستگی به این دارد که باران عمودی می‌بارد یا با زاویه؟]

۳۴. کمی قبل از ظهر برف گرفته است. آهنگ تغییر ارتفاع برفی را که روی زمین می‌نشیند اندازه‌گیری می‌کنیم و درمی‌یابیم که برف با آهنگ یکنواخت می‌بارد. دقیقاً هنگام ظهر برف‌روبی با آهنگی ثابت (برحسب فوت مکعب برفی که در ساعت می‌روبد) شروع به‌کار می‌کند. در اولین ساعت کار دو ساختمان و در ساعت دوم یک ساختمان را از برف پاک می‌کند.

بارش برف در چه ساعتی شروع شده است؟

۳۵. شرکتی لاستیک اتومبیل می‌سازد. این شرکت سه نوع لاستیک دارد. لاستیکی که شرکت ضمانت می‌کند ۲۰۰۰۰ مایل کارکند هر حلقه ۴۵ دلار قیمت دارد. لاستیکی که شرکت ضمانت می‌کند ۳۰۰۰۰ مایل کارکند هر حلقه ۶۰ دلار قیمت دارد. لاستیکی که شرکت ضمانت می‌کند ۳۰۰۰۰ مایل کارکند هر حلقه ۶۰ دلار قیمت دارد. لاستیکی که شرکت ضمانت می‌کند ۴۰۰۰۰ مایل کار کند هر حلقه ۷۵ دلار قیمت دارد. روشن است که این شرکت اگر بخواهد می‌تواند فقط یک نوع لاستیک که n کیلومتر کار می‌کند تولید کند و آن را به سه قیمت مختلف بفروشد. با فرض اینکه تعداد فروش سه نوع لاستیک یکی باشد، چه مقداری از n سود شرکت را ماکسیمم می‌کند؟

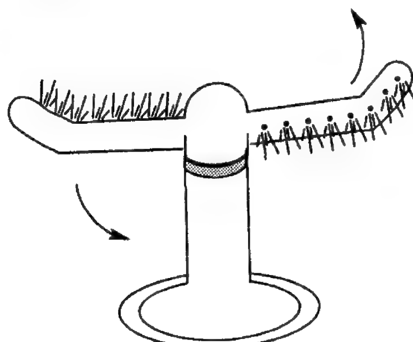
۳۶. ساندویچی تکه‌ای نان جو، تکه‌ای نان سفید و قطعه‌ای پنیر دارد. همان‌طور که معمول است، تکه‌های نان و پنیر هرکدام شکلی نامنظم دارند. آیا درست است که با یک برش مستقیم و مسطح چاقو می‌توان هر دو تکه نان و قطعهٔ پنیر را نصف کرد؟ (اینجا منظور از نصف کردن تقسیم به دو قطعه است که حجم یکسان داشته باشند.) [راهنمایی: ابتدا مسأله را برای یک تکه نان و قطعه‌ای پنیر حل کنید.]

۳۷. در بیشتر خیابانها دریچه‌های گردی هست. این دریچه‌ها را برای دسترسی کارگران به لوله‌های آب، گاز و غیره کار می‌گذارند. این دریچه‌های فولادی همیشه گردند. چرا این دریچه‌ها همیشه گردند؟ آیا شکل دیگری هست که همین کار را بکند؟

۳۸. در بزرگراهی به سمت غرب رانندگی می‌کنید. این بزرگراه از روی بزرگراهی شمالی-جنوبی می‌گذرد. بزرگراه شرقی-غربی خروجیهایی برای شمال و جنوب بزرگراه دوم دارد. شما می‌خواهید به سمت شمال بزرگراه شمالی-جنوبی بروید. باید از خروجی اول خارج شوید یا خروجی دوم؟

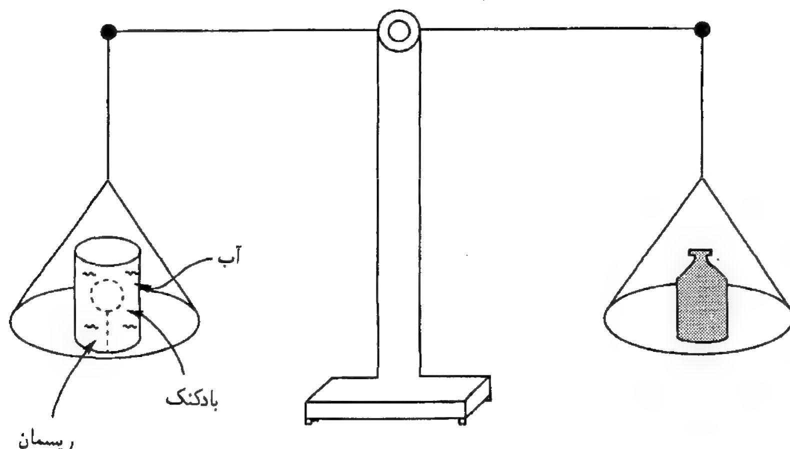
۳۹. [از فاینمن] نوع متداولی از آبپاش چمن مانند شکل ۱۸۳ است. توجه کنید که این آبپاش دو بازو دارد و بازوها حول پایه می‌چرخند. وقتی که آب از لوله وارد آبپاش می‌شود از حفره‌هایی که در بازوهاست فوران می‌کند. به این ترتیب، بازوها بنابر قانون دوم نیوتون می‌چرخند.

اکنون فرض کنید که چنین آبپاشی به شیلنگی وصل شده و درکف استخری پر از آب قرار گرفته است. شیلنگ را به مکنده‌ای وصل می‌کنیم تا آب استخر از طریق شیلنگ تخلیه شود. در لحظه‌ای که مکنده شروع به کار می‌کند آبپاش در چه جهتی می‌چرخد؟



شکل۱۸۳

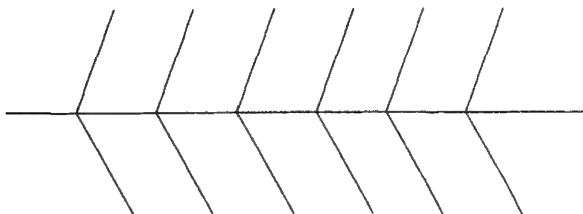
۴۰. قوطی کنسروی که درش باز نشده است در یک کفهٔ ترازویی قرار دارد. درون قوطی بادکنک کوچکی پر از هوا با ریسمانی به کف قوطی وصل شده است و قوطی کنسرو پر از آب است. درکفهٔ دیگر ترازو وزنه‌ای گذاشته‌ایم و ترازو در تعادل است (شکل ۱۸۴ را ببینید).

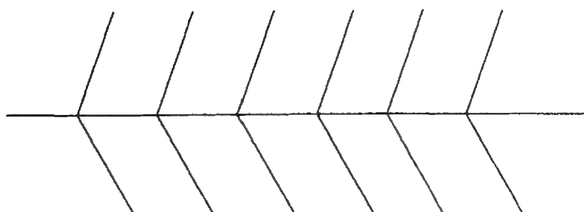


شکل۱۸۴

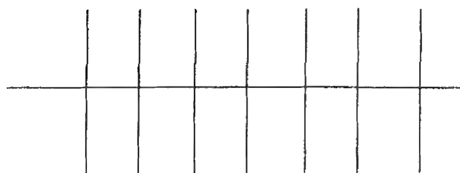
نخ متصل به بادکنک یکباره پاره می‌شود. [چون هوا بسیار سبکتر از آب است، اگر قوطی کنسرو در سیستم ساکنی در تعادل پایدار باشد بادکنک بالا می‌رود.] درست در لحظهٔ پاره شدن ریسمان کفه‌ای از ترازو که قوطی کنسرو در آن است بالا می‌رود یا پایین می‌آید؟

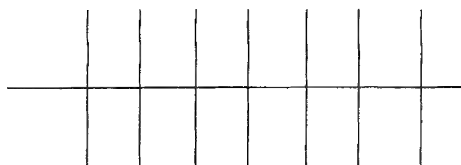
۴۱. در بسیاری از پارکینگهای بزرگ اتومبیلها را مورب پارک می‌کنند (شکل ۱۸۵ را ببینید). دلیل این کار چیست؟ پارکینگی را درنظر بگیرید که در آن اتومبیلها را با زاویهٔ °۳۰ پارک می‌کنند. در این حالت چه تعداد اتومبیل بیشتر از حالتی که اتومبیلها را عمودی (مانند شکل ۱۸۶) پارک کنند جا می‌گیرند؟ در چه زاویه‌ای بیشترین تعداد اتومبیل جا می‌گیرد؟ آیا این زاویهٔ اکسترم مشکلاتی برای ورود و خروج اتومبیلها به محل پارک ایجاد می‌کند؟ مدل مبسوطی برای این مسأله بسازید و در مورد آن با دیگران صحبت کنید.





شکل۱۸۵





شکل۱۸۶

۴۲. در خانواده‌ای طی هفت نسل ۴۷ پسر متولد شده‌اند و هیچ دختری به دنیا نیامده است. با فرض اینکه احتمال تولد نوزاد دختر و پسر یکسان باشد، احتمال وقوع چنین پیشامدی چقدر است؟ منبع این مسأله [HUF2] است.

۴۳. «اگر تعدادی کافی از میمونها در مدت زمان کافی روی کلیدهای تعدادی کافی از ماشینهای تایپ بزنند نهایتاً نمایشنامهٔ هَملت تایپ می‌شود.» فرض کنید که هَملت ۱۰۰۰۰۰ کلمه باشد و هر کلمه به‌طور میانگین ۵ حرف داشته باشد. چند میمون لازم است و یا چند سال طول می‌کشد تا احتمال چنین پیشامدی بیشتر از ۰/۵ شود؟

۴۴. آزمایش زیر را انجام دهید. سکه‌ای را با نوک انگشت اشاره روی لبه‌اش بر روی میز تختی نگاه دارید. بعد با دست دیگر تلنگر محکمی به سکه بزنید تا به سرعت بچرخد. وقتی که سکه روی میز می‌افتد توجه کنید که شیر نشسته است یا خط. این آزمایش را ۵۰ بار انجام دهید. چند بار «شیر» می‌آید؟

اکنون سکه‌ای را روی لبه‌اش روی میز نگه دارید. کف دست خود را روی میز فشار دهید تا سکه بیفتد. توجه کنید که سکه شیر نشسته است یا خط. این آزمایش را هم ۵۰ بار انجام دهید. چند بار «شیر» می‌آید؟

جوابهای شما اختلاف زیادی با هم دارند. چرا؟

۴۵. در بعضی از شهرهای امریکا اتومبیلی را که تعدادی جریمهٔ پرداخت نشده داشته باشد در خیابان «قفل» می‌کنند. برای این کار وسیلهٔ خاصی را به چرخ عقب سمت چپ اتومبیل وصل می‌کنند. این وسیله مانع حرکت اتومبیل می‌شود و تا وقتی که جریمه‌ها پرداخت نشود این وسیله را از چرخ اتومبیل باز نمی‌کنند. در این مسأله از شما می‌خواهیم که چنین وسیله‌ای را طراحی کنید. وسیله‌ای که طراحی می‌کنید باید ویژگیهای زیر را داشته باشد:

۱. به آسانی توسط افسر پلیس، بدون جابه‌جا کردن اتومبیل، به چرخ اتومبیل در سمت خیابان وصل شود.

۲. مانع حرکت اتومبیلها در خیابان نشود.

۳. صاحب اتومبیل نتواند آن را باز کند.

۴. مانع حرکت اتومبیل شود.

جواب شما باید شامل طرح، توصیف وسیله و دستورالعمل استفاده از آن باشد.

۴۶. شخصی به مغازه‌ای می‌رود و اجناسی را برمی‌دارد. او قیمت اجناسی را که برداشته است ذهنی جمع می‌زند و یک اسکناس ۱۰ دلاری به فروشنده می‌دهد. فروشنده با ماشین‌حساب دستی شروع به جمع‌زدن قیمتها می‌کند. اما خریدار متوجه می‌شود که فروشنده بعد از وارد کردن قیمت هر جنس به جای دکمهٔ «+»، دکمهٔ «×» را فشار می‌دهد. خریدار در فکر اعتراض کردن است

که در کمال تعجب می‌بیند فروشنده همان مبلغ ۷/۱۱ دلاری را که خودش ذهنی حساب کرده بود از او طلب می‌کند. قیمت اجناسی را که خریده است تعیین کنید.

۴۷. دو دانشجو روز چهارشنبه امتحان فیزیک داشتند. اما روز سه‌شنبه به شهر دیگری رفتند و موفق نشدند به موقع خود را به امتحان برسانند. آنها به استاد گفتند که لاستیک اتومبیلشان پنچر شده است و به امتحان نرسیده‌اند. استاد موافقت کرد که مجدداً از آنها امتحان بگیرد. او امتحان یکسانی از دو دانشجو گرفت ولی آنها را در دو اتاق نشاند. امتحان فقط دو سؤال داشت. سؤال اول مسأله‌ای ساده در مورد سقوط آزاد با ۵ نمره بود. سؤال دوم ۹۵ نمره دارد. در این سؤال استاد پرسیده است که کدام لاستیک اتومبیل پنچر شده است. به فرض اینکه اتومبیل چهار چرخ داشته باشد احتمال اینکه هر دو دانشجو یک جواب بدهند چقدر است؟

۴۸. دمای اتاقی که به‌خوبی عایقبندی شده است °۷۲ است. در اتاق یخچالی را به برق زده‌اند و درجهٔ تنظیم یخچال روی «حداکثر سرما» است و در یخچال باز است. فقط یخچال بر دمای اتاق تأثیر می‌گذارد. بعد از یک ساعت دمای اتاق کمتر از °۷۲، بیشتر از °۷۲، یا همان °۷۲ است؟

۴۹. سه نفر در هتلی یک اتاق می‌گیرند. هتلدار بابت یک شب کرایهٔ اتاق ۷۵ دلار از آنها می‌گیرد، ولی بعداً متوجه می‌شود که اشتباه کرده است و بایست ۷۰ دلار می‌گرفته است. او ۵ دلار به پیشخدمت هتل می‌دهد که برای مسافران ببرد. پیشخدمت فکر می‌کند که سه نفر نمی‌توانند ۵ دلار را به‌طور مساوی بین خود تقسیم کنند. پس تصمیم می‌گیرد ۳ دلار به آنها بدهد و ۲ دلار برای خودش بردارد.

بعداً پیشخدمت با خود فکر می‌کند که هر یک از مسافران ۲۴ دلار (یعنی ۲۵ دلار منهای ۱ دلار) برای کرایهٔ اتاق پرداخته است و خودش هم ۲ دلار دارد. این می‌شود ۷۴ دلار، $۳ \times ۲۴ + ۲ = ۷۴$. ۱ دلار دیگر چه شده است؟

راه‌حل مسائل شمارهٔ فرد

پیشگفتار

این راهنما شامل راه‌حل اکثر تمرینهای شمارهٔ فرد درکتاب **فنون مسأله حل کردن**، تألیف استیون ج. کرانتس است، که از این پس «متن» نامیده می‌شود.

از این راهنما فقط باید به‌عنوان مرجع استفاده شود، نه به‌عنوان وسیله‌ای برای آموختن راه‌حل تمرینها. قویاً توصیه می‌کنیم که راه‌حل هیچ تمرینی را پیش از اینکه برای حل آن کوشیده باشید نگاه نکنید. زمانی که صرف حل مسأله می‌کنید بی‌اجر نمی‌ماند. حاصل این تلاش حتی اگر به حل مسأله منجر نشود، ممکن است بیش از حل خود مسأله ارزش داشته باشد.

نمادگذاریها، ارجاعها، و نتایجی که برای حل مسأله‌ها به‌کار می‌رود مستقیماً از متن گرفته شده است.

در اینجا سپاس خود را به نیکولا آرکوزی، استیون کرانتس و ولادیمیر ماشِک که توصیه‌های ارزشمندی در مورد تعدادی از تمرینها به ما کردند، ابراز می‌کنیم.

لوئیس فرناندز و هایده گورانسراب

سنت لوئیس، پانزدهم مِی ۱۹۹۶

فصل ۱

مفاهیم پایه

۱.۱ از استقرا استفاده می‌کنیم. چیزی را ثابت می‌کنیم که ظاهراً قویتر از حکم مسأله است:

$$\left(\sqrt{۲}-۱\right)^k = \sqrt{N_k} - \sqrt{N_k - ۱}$$

که در آن N_k عددی طبیعی است به‌طوری‌که

$$\sqrt{۲}\sqrt{N_k}\sqrt{N_k - ۱} \in \mathbb{Z}$$

این شرط را به این دلیل اضافه کرده‌ایم که در استدلال استقرایی به ما کمک می‌کند.
گزاره به‌ازای $k = ۱$ درست است: با انتخاب $N_۱ = ۲$،

$$\left(\sqrt{۲}-۱\right) = \sqrt{۲} - \sqrt{۲ - ۱}$$

و

$$\sqrt{۲}\sqrt{۱}\sqrt{۲} = ۲ \in \mathbb{Z}$$

فرض کنید که گزاره به‌ازای $k = n$ درست باشد. هدف ما یافتن عدد $N_{n+۱}$ است به‌طوری‌که

$$\left(\sqrt{۲}-۱\right)^{n+۱} = \sqrt{N_{n+۱}} - \sqrt{N_{n+۱} - ۱}$$

و

$$\sqrt{۲}\sqrt{N_{n+۱}}\sqrt{N_{n+۱} - ۱} \in \mathbb{Z}$$

از فرض استقرا به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{۲}-۱\right)^{n+۱} &= \left(\sqrt{۲}-۱\right)^{n}\left(\sqrt{۲}-۱\right)\\ &= \left(\sqrt{N_n}-\sqrt{N_n-۱}\right)\left(\sqrt{۲}-۱\right)\\ &= \left(\sqrt{N_n}\sqrt{۲}+\sqrt{N_n-۱}\right)-\left(\sqrt{۲}\sqrt{N_n-۱}+\sqrt{N_n}\right)\end{aligned}$$

اکنون ملاحظه کنید که

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{N_n}\sqrt{۲}+\sqrt{N_n-۱}\right)^{۲} &= ۲N_n+(N_n-۱)+۲\sqrt{۲}\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-۱}\\ &= ۳N_n-۱+۲\sqrt{۲}\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-۱}\\ &\in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

عدد $۳N_n-۱+۲\sqrt{۲}\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-۱}$ را K بنامید.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{۲}\sqrt{N_n-۱}+\sqrt{N_n}\right)^{۲} &= ۲(N_n-۱)+N_n+۲\sqrt{۲}\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-۱}\\ &= ۳N_n-۲+۲\sqrt{۲}\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-۱}\\ &= K-۱\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\sqrt{K}-\sqrt{K-۱} &= \left(\sqrt{۲}\sqrt{N_n}+\sqrt{N_n-۱}\right)-\left(\sqrt{۲}\sqrt{N_n-۱}+\sqrt{N_n}\right)\\ &= \left(\sqrt{۲}-۱\right)^{n+۱}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}&\sqrt{K}\sqrt{K-۱}\sqrt{۲}\\ &= \left(\sqrt{N_n}\sqrt{۲}+\sqrt{N_n-۱}\right)\left(\sqrt{۲}\sqrt{N_n-۱}+\sqrt{N_n}\right)\sqrt{۲}\\ &= ۳\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-۱}\sqrt{۲}+۲N_n+۲(N_n-۱)\\ &\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

چون بنابر فرض استقرا $\sqrt{۲}\sqrt{N_n}\sqrt{N_n-۱}\in\mathbb{Z}$. پس K همهٔ ویژگیهایی را که برای ۱. لازم است دارد. بنابراین، اگر فرض کنیم $N_{n+۱}=K$، کار تمام است.

۳۱ ابتدا فرمولی برای مجموع اولین k عدد طبیعی مربع کامل پیدا می‌کنیم. از همان طرح مسألهٔ ۲.۱.۱ در متن استفاده می‌کنیم. ابتدا ملاحظه کنید که

$$\ell^3 - (\ell - 1)^3 = \ell^3 - \ell^3 + 3\ell^2 - 3\ell + 1 = 3\ell^2 - 3\ell + 1$$

اکنون این رابطه را به‌ازای $\ell = 1$ تا $\ell = k$ می‌نویسیم و همهٔ رابطه‌های به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. در طرف چپ «مجموعی ادغامی» داریم که اکثر جمله‌های آن حذف می‌شوند:

$$(k^3 - (k-1)^3) + ((k-1)^3 - (k-2)^3) + \cdots + (2^3 - 1) + (1 - 0)$$
$$= (3k^2 - 3k + 1) + (3(k-1)^2 - 3(k-1) + 1) + \cdots + (3 - 3 + 1)$$

با ساده کردن، بازآرایی، و استفاده از دستور مجموع اولین k عدد طبیعی به‌دست می‌آوریم

$$k^3 = 3(k^2 + (k-1)^2 + \cdots + 1)$$
$$- 3(k + (k-1) + \cdots + 1) + (1 + 1 + \cdots + 1)$$
$$= 3(k^2 + (k-1)^2 + \cdots + 1) - 3\frac{k(k+1)}{2} + k$$
$$= 3(k^2 + (k-1)^2 + \cdots + 1) - \frac{3k^2 + k}{2}$$

و سرانجام

$$k^2 + (k-1)^2 + \cdots + 1 = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6}$$

برای به‌دست آوردن مجموع مکعبها نیز همین طرح را به‌کار می‌بریم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$\ell^4 - (\ell - 1)^4 = \ell^4 - \ell^4 + 4\ell^3 - 6\ell^2 + 4\ell - 1 = 4\ell^3 - 6\ell^2 + 4\ell - 1$$

اکنون این رابطه را به‌ازای $\ell = 1$ تا $\ell = k$ می‌نویسیم و همهٔ رابطه‌های حاصل را با هم جمع می‌کنیم.

در سمت چپ «مجموعی ادغامی» داریم که اکثر جمله‌های آن حذف می‌شوند:

$$[k^4 - (k-1)^4] + [(k-1)^4 - (k-2)^4] + \cdots + [(2^4 - 1)] + [(1 - 0)]$$
$$= [4k^3 - 6k^2 + 4k - 1] + [4(k-1)^3 - 6(k-1)^2 + 4(k-1) - 1]$$
$$+ \cdots + (4 \times 1^3 - 6 \times 1^2 + 4 \times 1 - 1)$$

با ساده کردن و بازآرایی این عبارت به‌دست می‌آوریم

$$k^4 = 4(1 + 2^3 + \cdots + k^3) - 6(1 + 2^2 + \cdots + k^2) + 4(1 + 2 + \cdots + k) - (k)$$

در نتیجه

$$۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + k^۳ = \frac{k^۴ + ۶(۱ + ۲^۲ + \cdots + k^۲) - ۴(۱ + ۲ + \cdots + k) + (k)}{۴}$$

$$= \frac{۱}{۴}\left\{k^۴ + ۶\frac{۲k^۳ + ۳k^۲ + k}{۶} - ۴\frac{k^۲ + k}{۲} + k\right\}$$

$$= \frac{k^۲(k+۱)^۲}{۴}$$

۵.۱ معادله را به صورت

$$n(m-۱) = m$$

بنویسید. یعنی اینکه m بر $m - ۱$ بخش‌پذیر است. اما این امر تنها درصورتی ممکن است روی دهد که یا $m = ۲$ و یا $m = ۰$.

اگر $m = ۲$، معادلهٔ بالا چنین می‌شود:

$$n(۲-۱) = ۲$$

که در نتیجه $n = ۲$.

اگر $m = ۰$، معادله چنین می‌شود:

$$n(۰-۱) = ۰$$

که در نتیجه $n = ۰$.

پس تنها جوابها $m = n = ۲$ و $m = n = ۰$ هستند.

۷.۱ عملیات زیر را انجام می‌دهیم:

$$۲^{۳۰۰} \times ۵^{۶۰۰} \times ۴^{۴۰۰} = ۲^{۳۰۰} \times ۵^{۶۰۰} \times ۲^{۸۰۰}$$

$$= ۲^{۶۰۰} \times ۵^{۶۰۰} \times ۲^{۵۰۰}$$

$$= ۱۰^{۶۰۰} \times ۲^{۵۰۰}$$

پس عدد $۴^{۴۰۰} \times ۵^{۶۰۰} \times ۲^{۳۰۰}$ به ۶۰۰ صفر ختم می‌شود.

۹.۱ عددهای بین ۱ و ۱۰۰ را چنین دسته‌بندی می‌کنیم:

۹ عدد یک رقمی:	۹ رقم
۹۰ عدد دو رقمی:	۱۸۰ رقم
۱ عدد سه رقمی:	۳ رقم
تعداد رقمهای همهٔ عددهای ۱ تا ۱۰۰:	۱۹۲ رقم

۱۱.۱ عدد k رقمی N را درنظر بگیرید. این عدد را می‌توانیم به صورت

$$N = a_k a_{k-۱} \cdots a_۱ a_۰$$

بنویسیم. عدد N را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$N = a_k ۱۰^k + a_{k-۱} ۱۰^{k-۱} + \cdots + a_۱ ۱۰ + a_۰$$

$$= a_k(\underbrace{۹۹\cdots۹}_{k \text{ رقم}}+۱) + a_{k-۱}(\underbrace{۹۹\cdots۹}_{k-۱ \text{ رقم}}+۱) + \cdots + a_۱(۹+۱) + a_۰$$

$$= [a_k \underbrace{۹۹\cdots۹}_{k \text{ رقم}} + a_{k-۱}\underbrace{۹۹\cdots۹}_{k-۱ \text{ رقم}} + \cdots + ۹] + [a_k + a_{k-۱} + \cdots + a_۰]$$

چون هم N و هم عبارت درون کروشهٔ اول بر ۹ بخش‌پذیر است، عبارت درون کروشهٔ دوم، یعنی $a_k + a_{k-۱} + \cdots + a_۰$، هم باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد. همچنین تعداد رقمهای عدد

$$a_k + a_{k-۱} + \cdots + a_۰$$

کمتر از تعداد رقمهای عدد N است. پس وقتی رقمهای عددی را که بر ۹ بخش‌پذیر است با هم جمع کنیم، عدد دیگری به‌دست می‌آوریم که باز هم بر ۹ بخش‌پذیر است، ولی تعداد رقمهای آن کمتر از تعداد رقمهای عدد اولیه است. اگر این فرایند را ادامه دهیم، سرانجام به عددی می‌رسیم که یک رقم دارد و بر ۹ بخش‌پذیر است. این عدد باید ۹ باشد.

۱۳.۱ با همان راه‌کار تمرین ۶ پیش می‌رویم. همهٔ عددهایی را که در هم ضرب می‌شوند تا $n!$ به دست آید می‌نویسیم؛ یعنی $n \times \cdots \times ۳ \times ۲ \times ۱$. از اولین عدد شروع می‌کنیم و بالای هر عددی که بر p^k بخش‌پذیر است ستونی حاوی k نقطه می‌گذاریم، تا به آخرین عدد، یعنی n، برسیم. روشن است که تعداد عاملهای p در $n!$ برابر تعداد نقاطی است که بالای عددها گذاشته‌ایم. پس نقطه‌ها را می‌شماریم.

وقتی تعداد عددهایی از ۱ تا n را که بر p بخش‌پذیرند می‌شماریم، مثل این است که تعداد نقطه‌های سطر اول را در آرایهٔ نقاطی که بالای عددها گذاشته‌ایم بشماریم. اگر تعداد عددهایی را که بر $p^۲$ بخش‌پذیرند بشماریم، مثل این است که تعداد نقطه‌ها را در سطر دوم آرایهٔ نقاط بشماریم. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، به عددی مثل k می‌رسیم به‌طوری‌که هیچ عددی از ۱ تا n بر p^k بخش‌پذیر نیست (وقتی $p^k > n$)، یعنی نقطه‌های همهٔ سطرهای آرایه را شمرده‌ایم.

بنابراین، تعداد عاملهای p در $n!$ برابر است با تعداد عددهای از ۱ تا n که بر p بخش‌پذیرند، بعلاوهٔ تعداد عددهای از ۱ تا n که بر $p^۲$ بخش‌پذیرند، و غیره. اکنون چند عدد از عددهای از ۱ تا n بر p^k بخش‌پذیرند؟ عددهای $۱ \times p^k$، $۲ \times p^k$، ...، $l \times p^k$، درصورتی‌که l بزرگترین

عددی باشد که $l \times p^k$ کوچکتر از یا برابر با n باشد، همهٔ عددهای بخش‌پذیر بر p^k هستند. این یعنی اینکه از ۱ تا n، دقیقاً

$$\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

عدد بر p^k بخش‌پذیرند (نماد $[x]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از یا برابر با x را نشان می‌دهد)، چون

$$p^k \cdot \left[\frac{n}{p^k}\right] < n$$

و

$$p^k \cdot \left(\left[\frac{n}{p^k}\right] + ۱\right) > n$$

و در نتیجه $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ بزرگترین عدد صحیح مانند l است به‌طوری‌که $l \cdot p^k$ کوچکتر از یا برابر با n باشد. پس فرمول نهایی عبارت است از

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

(توجه کنید که بی هیچ دغدغه‌ای می‌توانیم مجموعیابی را تا ∞ ادامه دهیم، چون $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ به‌ازای همهٔ kهایی که به اندازهٔ کافی بزرگ باشند صفر است.)

۱۵.۱ اگر هر تیم دقیقاً یک بار با هر تیم دیگر بازی کرده باشد، تعداد کلِّ بازیهای انجام شده

$$۱۴ + ۱۳ + ۱۲ + \cdots + ۲ + ۱ = ۱۰۵$$

است. برای اینکه مطمئن شوید، بازیهای تیم اول این دوره را بشمارید (۱۴)، سپس بازیهای تیم دوم را بشمارید ولی بازی این تیم با تیم اول را که قبلاً شمرده‌اید به حساب نیاورید (۱۳)، و غیره. هر بازی کلاً ۴ امتیاز دارد که بین دو تیم شرکت‌کننده در بازی تقسیم می‌شود. پس کلِّ امتیازهای این دوره مسابقات $۴۲۰ = ۱۰۵ \times ۴$ است.

حال اگر امتیاز تیمها با هم فرق داشته باشد و تیم آخر در این دوره مسابقات ۲۱ امتیاز کسب کرده باشد، تیم ماقبل آخر دست‌کم باید ۲۲ امتیاز داشته باشد، تیم بعدی باید دست‌کم ۲۳ امتیا داشته باشد؛ و به همین ترتیب، تیم اول باید دست‌کم ۳۵ امتیاز داشته باشد. مجموع امتیاز تیمه باید بزرگتر از یا برابر با مجموع این حداقل امتیازها باشد. اما

$$۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + \cdots + ۳۴ + ۳۵ = ۴۲۰$$

چون این همان کلِّ امتیازهای بازیهاست، باید تیم ماقبل آخر ۲۲، تیم بعدی ۲۳، $\cdots$ و تیم اوا ۳۵ امتیاز کسب کرده باشند (اگر امتیاز تیمی بیشتر از حداقل امتیاز ممکن باشد، مجموع امتیازه بیشتر از کلِّ امتیازها می‌شود).

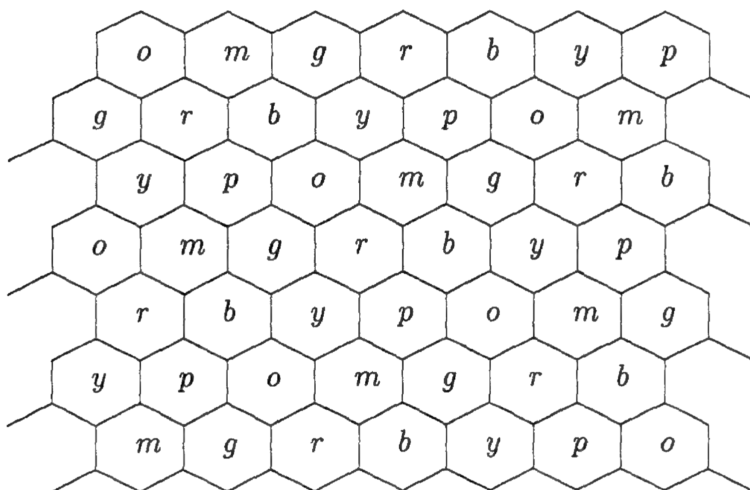
بیشترین امتیازی که هر تیم ممکن بوده است کسب کند

$$۴۲ = (۱۴ \text{ بازی}) \times (۳ \text{ امتیاز})$$

است. پس تیم اول ۷ امتیاز از دست داده است. توجه کنید که با هر باخت، ۲ امتیاز از بیشترین امتیاز ممکن برای تیم کسر می‌شود (چون برد ۳ امتیاز و باخت ۱ امتیاز دارد). تیم اول اگر تساوی نداشت بایست امتیازهای از دست‌داده‌اش زوج می‌بود و هرگز ۷ نمی‌شد. پس دست‌کم یک بازی تیم اول به تساوی انجامیده است.

۱۷.۱ عدد درست $۲k - ۲$ است.

۱۹.۱ می‌توان صفحه را مانند شکل زیر رنگ کرد. شش‌ضلعیها منتظم‌اند و طول قطر هرکدام ۱ است. هر حرف در این شکل یکی از رنگها را نشان می‌دهد. درون و نیمهٔ چپ مرز هر شش‌ضلعی را، به انضمام رأس بالایی آن و بدون درنظر گرفتن رأس پایینی آن، با رنگ مشخص‌شده رنگ می‌کنیم. توجه کنید که فاصلهٔ هر دو شش‌ضلعی همرنگ همیشه بیشتر از ۱ است.



۲۱.۱ اگر رئیس قبیله اعلام کند که چند شوهر دروغ گفته‌اند، همه‌چیز بی‌درنگ روشن می‌شود: همهٔ زنهایی که تعداد دروغگویانی که در موردشان شنیده‌اند کمتر از تعدادی است که رئیس قبیله گفته است بی‌درنگ متوجه می‌شوند که شوهرشان دروغگوست.

۲۳.۱ توجه کنید که

$$\left[\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+\cdots+\frac{n}{(n+۱)!}\right]+\left[\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\cdots+\frac{۱}{(n+۱)!}\right]$$

$$=\left[\frac{۲}{۲!}+\frac{۳}{۳!}+\cdots+\frac{n+۱}{(n+۱)!}\right]=\left[\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\cdots+\frac{۱}{n!}\right]$$

بنابراین

$$\left[\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+\cdots+\frac{n}{(n+۱)!}\right]$$
$$=\left[\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\cdots+\frac{۱}{n!}\right]-\left[\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\cdots+\frac{۱}{(n+۱)!}\right]$$
$$=۱-\frac{۱}{(n+۱)!}$$

۲۵.۱ در راه‌کار اول احتمال برد برابر است با

$$\frac{\text{تعداد حالتهای برنده}}{\text{تعداد همهٔ حالتهای ممکن}}=\frac{a}{a+b}$$

برای یافتن احتمال برد در راه‌کار دوم، باید این واقعیت را درنظر بگیریم که احتمال بیرون کشیدن توپ سفید در دفعهٔ دوم بستگی به این دارد که دفعهٔ اول چه توپی بیرون آمده است. می‌توان نوشت

$$\mathbf{Pr}\{\text{بیرون کشیدن توپ سفید در دفعهٔ دوم}\}$$
$$=\mathbf{Pr}\{\text{سفید بودن توپ در دفعهٔ دوم | با فرض سفید بودن توپ در دفعهٔ اول}\}$$
$$\times\mathbf{Pr}\{\text{سفید بودن توپ در دفعهٔ اول}\}$$
$$+\mathbf{Pr}\{\text{سفید بودن توپ در دفعهٔ دوم | با فرض سیاه بودن توپ در دفعهٔ اول}\}$$
$$\times\mathbf{Pr}\{\text{سیاه بودن توپ در دفعهٔ اول}\}$$
$$=\frac{a-۱}{a+b-۲}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+b-۲}\cdot\frac{b}{a+b}$$
$$=\frac{a^۲-a+ab}{(a+b)(a+b-۲)}$$
$$=\frac{a(a+b-۲)+a}{(a+b)(a+b-۲)}$$
$$=\frac{a}{a+b}+\frac{a}{(a+b)(a+b-۲)}$$

این مسأله شبیه به مسأله مونتی‌هال است: بازیکن B یکی از توپهای سیاه را کنار می‌گذارد درست مثل وقتی که مجری مسابقهٔ تلویزیونی یکی از درها را باز می‌کند.

۲۷.۱ در همهٔ حالتهایی که در مسأله ذکر شده است، موزاییک کردن کف حمام ممکن است، و درواقع این کار چندان هم دشوار نیست. اگر مربعهای دو گوشهٔ مجاور حذف شده باشند، کافی است موزاییکها را موازی با ضلعی که دو مربع حذف‌شده در امتداد آن قرار دارند بچینیم. اگر مربعهای

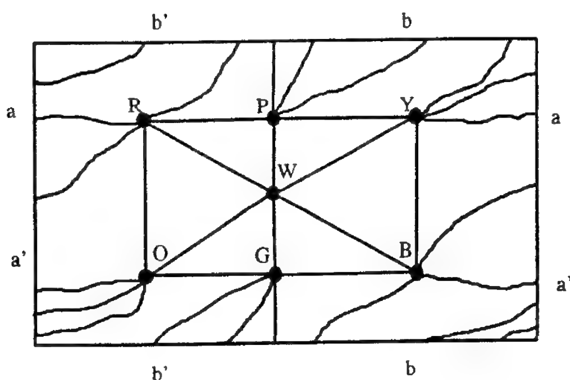
حذف‌شده مجاور باشند، موزاییکها را می‌توانید موازی با ضلع بزرگتر مستطیل حاوی این دو مربع حذف‌شده بچینید؛ پر کردن کف حمام کار ساده‌ای است.

فصل ۲

نگاهی عمیقتر به هندسه

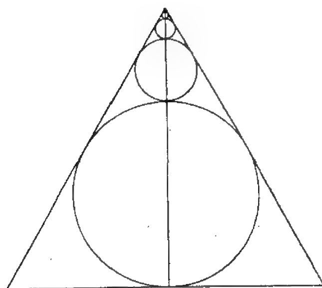
۱.۲ الف) مثلاً برای گراف کامل چهار رأسی روی کره ۴ رنگ لازم است.

ب) همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، گراف کامل هفت رأسی روی چنبره ۷ رنگ لازم دارد. چنبره را به‌صورت مستطیلی نشان می‌دهیم که لبهٔ بالایش را با لبهٔ پایین و لبهٔ چپش را با لبهٔ راست یکی کرده‌ایم. حرفهای a، a'، b، b' در شکل این یکی‌سازیها را نشان می‌دهند.



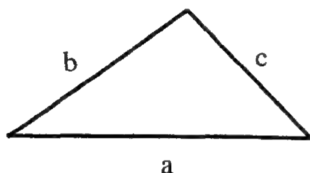
ج) عدد رنگی چنبره دو حفره‌ای ۸ است.

۳.۲ مثلث را مانند شکل زیر درنظر بگیرید:



اگر پاره‌خط قائم را از قاعدهٔ مثلث به رأس بالایی رسم کنیم، طول پاره‌خط دقیقاً برابر با مجموع قطر همهٔ دایره‌ها خواهد بود. چون طول ارتفاع مثلث ۳ است، مجموع همهٔ قطرها ۳ و در نتیجه، مجموع همهٔ شعاعها ۱/۵ است. اکنون چون این فرایند را در هر سه رأس مثلث انجام می‌دهیم، مجموع شعاع همهٔ دایره‌ها $۲/۵ = ۲ - ۱/۵ \times ۳$ است. توجه کنید که ۲ را کم کرده‌ایم، چون در غیراین‌صورت شعاع دایره‌ای که در مرکز قرار دارد (و طول آن ۱ است) سه بار به‌حساب می‌آید.

۵.۲ مثلث را به صورت شکل زیر درنظر بگیرید: در این شکل، مثلث روی ضلع بزرگتر، که آن را با a نشان داده‌ایم، قرار دارد و ضلعهای چپ و راست را با b و c نشان داده‌ایم.



فرض می‌کنیم که $a = n$. اگر $b = k$، که در آن k عددی طبیعی بین ۱ و n (و یا خود ۱ و n) است، c ممکن است $(n-k+۱)$، $(n-k+۲)$، ... و n باشد (توجه کنید که باید $a < b+c$، چون در غیراین‌صورت شکل مثلث نیست). پس اگر $b = k$، k انتخاب برای c وجود دارد. پس روی‌هم‌رفته تعداد مثلثها برابر است با

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

اما توجه کنید همهٔ مثلثهای متساوی‌الساقینی که طول دو ضلعشان n باشد همنهشت‌اند و بنابراین، چنین مثلثهایی دو بار به حساب آمده‌اند (یک‌بار به‌ازای $a = b = n$ و $c = k < n$، و یک‌بار به‌ازای $a = c = n$ و $b = k < n$). چون $n - ۱$ مثلث از این نوع وجود دارد، جواب نهایی، یعنی تعداد مثلثهای غیرهمنهشت برابر است با

$$\frac{n(n+۱)}{۲} - (n-۱) = \frac{n^۲ - n + ۲}{۲}$$

۷.۲ برای یافتن نسبتی از صفحه که مربعها پوشانده‌اند کافی است مساحت دایرهٔ محاطی (به قطر ۱) را بر مساحت مربع به طول ضلع ۱ که دایره در آن محاط شده است تقسیم کنید. با این عمل مقدار $\frac{\pi}{۴}$ به‌دست می‌آید.

در مورد شش‌ضلعی، مساحت دایرهٔ محاطی (به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$) را بر مساحت شش‌ضلعی به طول ضلع ۱ که دایره در آن محاط شده است تقسیم کنید. با این عمل مقدار $\frac{\pi}{۲\sqrt{۳}}$ به‌دست می‌آید.

توجه کنید که پوشش دوم بهتر است.

۹.۲ با چسباندن دو مثلث همنهشت در امتداد یک ضلع متناظرشان متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید. همواره می‌توان صفحه را با متوازی‌الاضلاعهایی به هر شکل پوشاند (شکل ۱۳ را در متن کتاب ببینید)؛ پس جواب مثبت است.

۱۱.۲ نادرست: مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع d درنظر بگیرید. قطر چنین مثلثی d است، ولی نمی‌توان آن را در دایره‌ای به قطر d محاط کرد، چون فاصلهٔ مرکز مثلث تا هر رأسش $\frac{d}{\sqrt{۳}}$ است که از شعاع دایره بزرگتر است.

۱۳.۲ تحدب را می‌توان چنین تعریف کرد: مجموعه‌ای محدب است که به‌ازای هر دو نقطهٔ p و q در این مجموعه، همهٔ نقطه‌هایی به شکل

$$p \cdot t + q \cdot (۱ - t), \quad ۰ \leqslant t \leqslant ۱$$

نیز در این مجموعه باشند.

فرض کنید $p, q \in X + Y$ و $۰ \leqslant t \leqslant ۱$. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$p \cdot t + q \cdot (۱ - t) \in X + Y$$

بنابر تعریف $X + Y$، می‌توانیم بنویسیم $p = p_X + p_Y$ و $q = q_X + q_Y$ به‌طوری‌که $p_X, q_X \in X$ و $p_Y, q_Y \in Y$. چون X محدب است، نقطهٔ

$$p_X \cdot t + q_X \cdot (۱ - t)$$

در X است و چون Y محدب است، نقطهٔ $p_Y \cdot t + q_Y \cdot (۱ - t)$ در Y است. بنابراین،

$$\begin{aligned} & p \cdot t + q \cdot (۱ - t) \\ & \quad = (p_X + p_Y) \cdot t + (q_X + q_Y) \cdot (۱ - t) \\ & \quad = (p_X \cdot t + q_X \cdot (۱ - t)) + (p_Y \cdot t + q_Y \cdot (۱ - t)) \in X + Y \end{aligned}$$

پس $X + Y$ محدب است.

تنها چیزی که می‌توان در مورد قطر گفت این است که دست‌کم $d\sqrt{۲}$ و حداکثر $۲d$ است. برای اثبات این ادعا از نابرابری مثلثی استفاده کنید. توجه کنید که خود این دو کران هم به عنوان قطر حاصل می‌شوند. مثلاً دو قرص به قطر ۱ درنظر بگیرید. مجموع آنها قرصی به قطر ۲ است. از طرف دیگر، دو پاره‌خط عمود بر هم هر یک به طول ۱ درنظر بگیرید. مجموع آنها مربعی به طول ضلع d است که قطرش $d\sqrt{۲}$ می‌شود.

در مورد پهنا هیچ‌چیز نمی‌توان گفت. مثلاً X را نواری افقی و نامتناهی به قطر d و Y را نواری عمودی و نامتناهی به قطر d بگیرید. $X + Y$ تمامی صفحه و قطرش بینهایت است.

۱۵.۲ مساحت در $۲^۲$، یعنی ۴، ضرب می‌شود. برای اثبات این موضوع ابتدا توجه کنید که وقتی طولها را در ۲ ضرب می‌کنید طول ضلع هر مربع در صفحه دو برابر، و بنابراین مساحت هر مربع چهار برابر می‌شود. چون مربعها عناصر اساسی در اندازه‌گیری مساحت‌اند (برای یافتن مساحت هر مجموعه، آن را به بهترین صورتی‌که بتوانیم با مربعهایی بسیار کوچک می‌پوشانیم)، مساحت هر مجموعه در ۴ ضرب می‌شود.

توجه کنید که وضعیت اولیهٔ مجموعه در این مسأله نقشی ندارد. وقتی‌که طولها را در ۲ ضرب می‌کنیم اگر مجموعه ابتدا از ۰ دور باشد، بعد از ضرب در ۲، دو برابر دورتر می‌شود اما شکل آن همان شکل اولیه خواهد بود که ابعادش دو برابر شده است.

۱۷.۲ در مورد زیرمجموعه‌های خط، مجموعه‌ای محدب است اگر و فقط اگر شامل همهٔ نقطه‌های بین دو نقطهٔ مفروض باشد، یعنی اگر همبند باشد. مجموع دو مجموعهٔ همبند (در اینجا منظور از همبند بدون «حفره» است) به‌روشنی همبند است.

در مورد زیرمجموعه‌های خط، قطر و پهنا یک کمیت‌اند. در مورد زیرمجموعه‌های خط، قطر مجموع دو مجموعه مجموع قطرهای آن دو مجموعه است.

۱۹.۲ زاویهٔ بزرگتر را α و زاویهٔ کوچکتر را β بنامید. دراین صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\sin\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۵}}, \quad \cos\alpha = \frac{۲}{\sqrt{۵}}, \quad \sin\beta = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}, \quad \cos\beta = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۵}}\frac{۳}{\sqrt{۱۰}} + \frac{۲}{\sqrt{۵}}\frac{۱}{\sqrt{۱۰}} \\ &= \frac{۳}{۵\sqrt{۲}} + \frac{۲}{۵\sqrt{۲}} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \sin ۴۵^\circ\end{aligned}$$

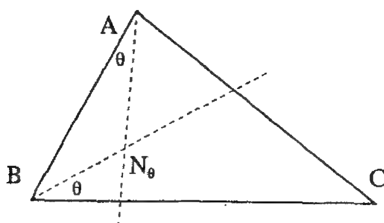
بنابراین $\alpha + \beta = ۴۵^\circ$.

۲۱.۲ می‌توانیم فرض کنیم که رأسهای مثلث روی مرز چندضلعی واقع‌اند. محیط چندضلعی مجموع بخشهایی از چندضلعی است که رأسهای مثلث را دوبه‌دو به هم وصل می‌کنند. هیچ‌یک از این طولها کمتر از طول ضلع متناظر مثلث نیست. پس مجموع طول بخشهایی از چندضلعی که رأسهای مثلث را دوبه‌دو به هم وصل می‌کنند بزرگتر از یا برابر با مجموع طول ضلعهای متناظر مثلث، یعنی همان محیط مثلث است.

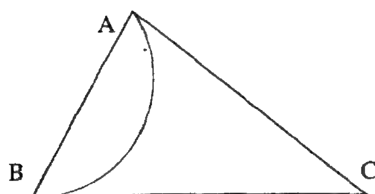
۲۳.۲ رأسهای مثلث را A، B و C بنامید. مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند N را می‌یابیم به‌طوری‌که $\angle NAB = \angle NBC$. اگر زاویهٔ θ مفروض باشد، N_θ را نقطه‌ای می‌گیریم به‌طوری‌که

$$\angle N_\theta AB = \angle N_\theta BC = \theta$$

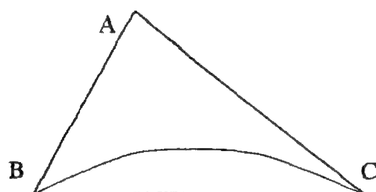
برای یافتن این نقطه، از A خطی رسم می‌کنیم که با پاره‌خط AB زاویهٔ θ بسازد و از B نیز خطی رسم می‌کنیم که با پاره‌خط BC زاویهٔ θ بسازد. این دو خط موازی نیستند (اگر موازی باشند به آسانی نتیجه می‌شود که $\angle ABC$ برابر با 180° است). نقطهٔ N_θ نقطهٔ تقاطع دو خط است (توجه کنید که چون N_θ روی خط اول است، $\angle N_\theta AB = \theta$ و چون N_θ روی خط دوم است، $\angle N_\theta BC = \theta$). این را در شکل زیر می‌بینید:



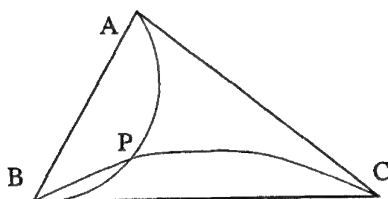
وقتی θ را تغییر می‌دهیم، N_θ همان‌طورکه در شکل زیر می‌بینید کمان محدبی را می‌پیماید:



به همین ترتیب، مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند M به‌طوری‌که $\angle MBC = \angle MCA$، همان‌طورکه در شکل زیر می‌بینید کمانی مقعر است:



کمان اول بر BC مماس است ولی کمان دوم BC را قطع می‌کند. چون کمان اول به A و کمان دوم به C ختم می‌شود، همان‌طورکه در شکل صفحهٔ بعد می‌بینید دو کمان باید یکدیگر را قطع کنند.



نقطهٔ تقاطع دوکمان را P می‌نامیم. چون P روی کمان اول است، $\angle PAB = \angle PBC$ و چون P روی کمان دوم است، $\angle PBC = \angle PCA$. پس تساوی مطلوب حاصل می‌شود:

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$$

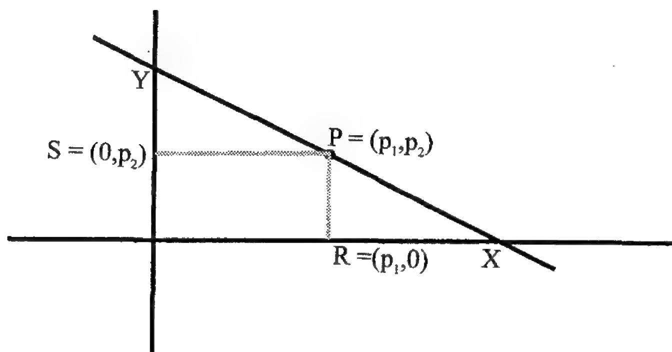
۲۵.۲ این مسأله را می‌توان از طریق هندسهٔ تحلیلی حل کرد. دو محور مختصات ثابت درنظر بگیرید و همه‌چیز را صریحاً بنویسید. راه زیباتری برای حل این مسأله چنین است: ضلعها را با p، q و r نشان دهید و a، b و c را به ترتیب فاصلهٔ p از ضلعهای p، q و r بگیرید. ضلع r را قاعدهٔ مثلث فرض کنید و ارتفاع مثلث را h بگیرید.
از P خطی موازی با ضلع p رسم کنید. مثلث کوچکتر $T1$ حاصل می‌شود که ارتفاعش $h - a$ است. سپس از P خطی موازی با q رسم کنید. مثلثی باز هم کوچکتر، $T2$، درون $T1$ حاصل می‌شود که ارتفاعش برابر با ارتفاع $T1$ منهای b، یعنی $h - a - b$ است. از طرف دیگر، رأس بالایی $T2$ نقطهٔ P است و قاعدهٔ آن روی r است. پس ارتفاع $T2$ برابر با فاصلهٔ P تا r، یعنی برابر با c است. پس $h - a - b = c$ و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۲۷.۲ فرض کنید m طول وتر باشد. دراین‌صورت باید تساوی $m^۲ = \ell^۲ + ۱۰۰$ یا $m^۲ - \ell^۲ = ۱۰۰$ برقرار باشد. این تساوی را می‌توان به‌صورت $(m + \ell)(m - \ell) = ۱۰۰$ نوشت. $m + \ell$ را با a و $m - \ell$ را با b نشان می‌دهیم. دراین‌صورت a و b هر دو ۱۰۰ را می‌شمارند و حاصل‌ضربشان ۱۰۰ است. همچنین $m = \frac{a+b}{۲}$ و $\ell = \frac{a-b}{۲}$. پس برای اینکه m و ℓ صحیح باشند باید a و b هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. با بررسی همهٔ مقسوم‌علیه‌های ۱۰۰ درمی‌یابیم که تنها امکانات $a = b = ۱۰$ و $a = ۵۰$، $b = ۲$ هستند. اینها متناظرند با $m = ۱۰$، $\ell = ۰$ که حالت تباهیده است و $m = ۲۶$، $\ell = ۲۴$.

۲۹.۲ فرض کنید یکی از محورهای تقارن افقی باشد. محور دیگری را با ℓ و زاویهٔ بین دو محور را با α نشان دهید. اگر ابتدا از تقارن در امتداد محور افقی استفاده کنیم، محور دیگر طوری منتقل می‌شود که با محور افقی زاویهٔ $-\alpha$ بسازد. این به معنی آن است که خط m که با محور افقی زاویهٔ $-\alpha$ می‌سازد نیز محور تقارن است. چون تنها دو محور تقارن داریم، باید $m = \ell$ که نتیجه می‌دهد $\alpha = ۹۰^\circ$.

۳۱.۲ چون مسأله را می‌توان بدون دانستن شعاع حفره، r، حل کرد، جواب باید مستقل از r باشد. باید محاسباتی انجام دهیم و می‌دانیم که جواب نهایی مستقل از مقدار r است. پس می‌توانیم r را ۰ بگیریم (مقدار r را هر عدد دیگری نیز می‌توانیم بگیریم ولی مقدارهای دیگر محاسبات را پیچیده می‌کنند). در این حالت، حجم بخش باقی‌مانده همان حجم گوی اصلی است و چون طول حفره ۶ اینچ است، قطر گوی باید ۶ اینچ باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که حجم گوی ۳۶π است. پس حجم بخش باقی‌مانده ۳۶π است.

۳۳.۲ فرض کنید $P = (p_۱, p_۲)$. فرض کنید $X = (x, ۰)$ نقطهٔ تقاطع خط با محور x و $Y = (۰, y)$ نقطهٔ تقاطع خط با محور y باشد. سرانجام نقطهٔ $(p_۱, ۰)$ را با R و نقطهٔ $(۰, p_۲)$ را با S نشان دهید. همهٔ این فرضها در شکل زیر نشان داده شده است:



بنابر تشابه مثلثهای YSP و RXP می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{(y - p_۲)}{p_۲} = \frac{p_۱}{(x - p_۱)}$$

در نتیجه

$$y = \frac{p_۲ x}{(x - p_۱)}$$

مساحت مثلث را با $A(x)$ نشان دهید. دراین‌صورت $A(x) = \frac{xy}{۲}$.

بنابراین

$$A(x) = \frac{p_۲}{۲} \cdot \frac{x^۲}{(x - p_۱)}$$

می‌خواهیم مقدار x را طوری بیابیم که مثلث با کمترین مساحت را به‌دست دهد. توجه کنید که از نابرابری

$$۰ \leqslant (x - ۲p_۱)^۲ = x^۲ - ۴p_۱ \cdot (x - p_۱)$$

به‌دست می‌آوریم

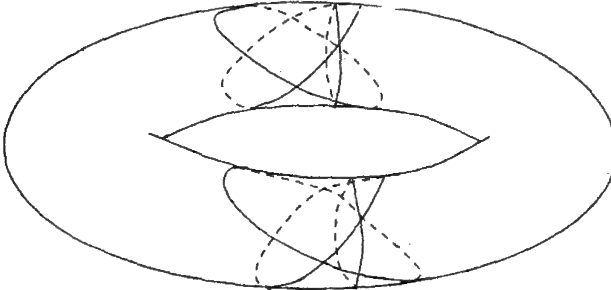
$$۴p_۱ \leqslant \frac{x^۲}{(x - p_۱)}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$A(x) \leqslant ۲p_۱p_۲$$

ولی $A(۲p_۱) = ۲p_۱p_۲$. بنابراین کمترین مساحت وقتی حاصل می‌شود که $x = ۲p_۱$ و $y = ۲p_۲$.

۳۹.۲ در شکل زیر راهی را برای بریدن چنبره به ۱۲ قطعه با سه برش مستقیم می‌بینید:



نمی‌دانیم که این تعداد بیشترین تعداد قطعاتی است که با سه برش به‌دست می‌آید یا نه.

۴۱.۲ طول هر یک از تقریبها دقیقاً ۲ است (توجه کنید که در nاُمین تقریب n گام هر یک به طول $\frac{۱}{n}$ با بالا و n گام هر یک به طول $\frac{۱}{n}$ به چپ می‌رویم؛ پس کلاً طول مسیر ۲ است). پس به نظر می‌رسد که طول قطر ۲ است. ولی از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود که طول قطر $\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}$، یعنی $\sqrt{۲}$، است. ظاهراً به تناقض رسیده‌ایم. اما این تناقض نیست. طول حد دنباله‌ای از مجموعه‌ها لزوماً با حد طول مجموعه‌ها برابر نیست.

توجه کنید که ممکن است دو منحنی بسیار نزدیک هم باشند ولی طولشان تفاوت زیادی داشته باشد مثلاً در شکل زیر، منحنی زیگزاگ بسیار طویلتر از خط است ولی دو منحنی خیلی نزدیک هم‌اند



فصل ۳

مسأله‌های شمارشی

۱.۳ دو نفری را که کارتها باید بینشان تقسیم شود A و B بنامید. برای اینکه A یک کارت بگیرد n انتخاب وجود دارد، که همان n راه برای انتخاب کارتی است که A می‌گیرد.

اگر بازیکن A دو کارت بگیرد، باید همهٔ راههای ممکن برای انتخاب ۲ کارت از n کارت را بشماریم که $\binom{n}{۲}$ است.
با ادامهٔ این روش نتیجه می‌گیریم که اگر بازیکن A، k کارت بگیرد تعداد راههای ممکن $\binom{n}{k}$ است.
پس تعداد کلِّ راههای توزیع کارتها برابر است با

$$\sum_{k=۱}^{n-۱}\binom{n}{k}=۲(۲^{n-۱}-۱)$$

تساوی اخیر را چنین می‌توان ثابت کرد:
از متن می‌دانیم که

$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}=۲^{n}$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{n-۱}\binom{n}{k}&=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}-\binom{n}{۰}-\binom{n}{n}\\&=۲^{n}-۱-۱\\&=۲(۲^{n-۱}-۱)\end{aligned}$$

که همان چیزی است که می‌خواهیم.

۳.۳ زوج یا فرد بودنِ اولین چهار عدد هر سطر را بررسی می‌کنیم. «ف» را به جای «فرد» و «ز» را به جای «زوج» می‌نویسیم. اولین چهار عدد سطر سوم {ز,ف,ز,۱} است:

سطر سوم:	{۱,ز,ف,ز,...}
سطر چهارم:	{۱,ف,ز,ف,...}
سطر پنجم:	{۱,ز,ز,ز,...}
سطر ششم:	{۱,ف,ف,ز,...}
سطر هفتم:	{۱,ز,ف,ز,...}
⋮	⋮

بعد از سطر هفتم الگوی بالا تکرار می‌شود. چون در هر یک از سطرهای سوم تا هفتم بین اولین چهار عدد دست‌کم یک عدد زوج هست و الگو تکرار می‌شود، در همهٔ سطرها بین اولین چهار عدد دست‌کم یک عدد زوج هست.

۵.۳ از راه‌کار زیر استفاده می‌کنیم: اگر خانواده‌ای n فرزند داشته باشد احتمال این را که دو پسر و یک دختر داشته باشد حساب می‌کنیم. سپس n را طوری می‌یابیم که این احتمال بزرگتر از ۰٫۵ باشد. با فرض اینکه خانواده‌ای n فرزند داشته باشد،

$$\mathbf{Pr}\{\text{پسر ۲, دختر ۱}\} = ۱ - (\mathbf{Pr}\{\text{کمتر از دو پسر}\} + \mathbf{Pr}\{\text{کمتر از یک دختر}\})$$

$$= ۱ - (\mathbf{Pr}\{\text{پسر نداشتن}\} + \mathbf{Pr}\{\text{پسر ۱}\} + \mathbf{Pr}\{\text{دختر نداشتن}\})$$

$$= ۱ - \left(\frac{۱}{۲^n} + \frac{n}{۲^n} + \frac{۱}{۲^n}\right)$$

می‌خواهیم کمترین مقدار n را بیابیم به‌طوری‌که

$$۱ - \left(\frac{۱}{۲^n} + \frac{n}{۲^n} + \frac{۱}{۲^n}\right) > \frac{۱}{۲}$$

و یا

$$۲^{n-۱} > n + ۲$$

با بررسی ساده‌ای درمی‌یابیم که $n = ۴$.

۷.۳ این مسأله کاملاً دشوار است و برای حل آن به مفاهیم پیشرفته‌تری از نظریهٔ احتمال نیاز داریم. در اینجا برای هر خرید یک کارت از ۵۲ کارت می‌گیریم. حالت کلی‌تری را درنظر می‌گیریم فرض می‌کنیم که برای هر خرید یک کارت از n کارت که از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند دریافت می‌کنیم. X_n را تعداد خودکارهایی بگیرید که وقتی همهٔ n کارت را در اختیار داریم خریداری شده‌اند. می‌خواهیم مقدار $E[X]$ را بیابیم:

$$E[X] = ۱ \times \mathbf{Pr}\{X = ۱\} + ۲ \times \mathbf{Pr}\{X = ۲\} + \cdots + m \times \mathbf{Pr}\{X = m\} + \cdots$$

ابتدا احتمال این را که $X_n \geqslant k$ می‌یابیم. درحالتی‌که $k \leqslant n$، این احتمال همیشه ۱ است محاسبهٔ این احتمال در حالت کلی پیچیده است، ولی می‌توانیم چنین عمل کنیم:

$$\mathbf{Pr}(X_n \geqslant k) = \mathbf{Pr}\{\text{پس از } k-۱ \text{ خرید کارتی را در اختیار نداشته باشیم}\}$$

اکنون توجه می‌کنیم که احتمال اینکه کارتی را در اختیار نداشته باشیم اجتماع پیشامدهای ز است:

$$A_i^k = \{\text{کارت } i \text{ را پس از } k-۱ \text{ خرید در اختیار نداریم}\}, \qquad ۱ \leqslant i \leqslant n$$

احتمال اجتماع n پیشامد را از فرمول زیر می‌توان به‌دست آورد. برهان درستی آن با استفاده استقرا چندان دشوار نیست، و آن را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. بهتر است

چند حالت ساده (مثلاً $n = ۱, ۲, ۳$) را بررسی کنید تا مطمئن شوید این فرمول بی‌راه نیست (تمرین ۱۹ در انتهای فصل ۳ را ببینید).

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Pr}\{A_۱^k \cup A_۲^k \cup A_۳^k \cup \cdots \cup A_n^k\} \\
&= \sum_{\ell=۱}^{n} \mathbf{Pr}\{A_i^k\} - \sum_{i<j} \mathbf{Pr}\{A_i^k \cap A_j^k\} + \sum_{i_۱<i_۲<i_۳} \mathbf{Pr}\{A_{i_۱}^k \cap A_{i_۲}^k \cap A_{i_۳}^k\} \\
&+ \cdots + (-۱)^{d+۱} \sum_{i_۱<i_۲<\cdots<i_d} \mathbf{Pr}\{A_{i_۱}^k \cap A_{i_۲}^k \cap \cdots \cap A_{i_d}^k\} \\
&+ \cdots + (-۱)^{n+۱} \mathbf{Pr}\{A_۱^k \cap A_۲^k \cap A_۳^k \cap \cdots \cap A_n^k\}
\end{aligned}$$

اکنون توجه می‌کنیم که $\mathbf{Pr}\{A_i\}$ به‌ازای همهٔ iها مقدار یکسانی است (احتمال اینکه کارت ۱ را نداشته باشیم با احتمال اینکه کارتی دیگر را نداشته باشیم یکی است). احتمال اینکه پس از $k - ۱$ خرید کارت i را نداشته باشیم برابر است با

$$\left(\frac{n-۱}{n}\right)^{k-۱}$$

احتمال اینکه دو کارت نداشته باشیم (یعنی $\mathbf{Pr}(A_i^k \cap A_j^k)$) نیز مستقل از i و j و برابر است با

$$\left(\frac{n-۲}{n}\right)^{k-۱}$$

به‌طورکلی، احتمال اینکه d کارت نداشته باشیم (یعنی $\mathbf{Pr}(A_{i_۱}^k \cap A_{i_۲}^k \cap \cdots \cap A_{i_d}^k)$) نیز مستقل از $i_۱$، $i_۲$، $\cdots$ و i_d و برابر است با

$$\left(\frac{n-d}{n}\right)^{k-۱}$$

پس با استفاده از فرمول بالا نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Pr}\{X_n \geqslant k\} \\
&= \sum_{\ell=۱}^{n} \left(\frac{n-۱}{n}\right)^{k-۱} - \sum_{i<j} \left(\frac{n-۲}{n}\right)^{k-۱} + \sum_{i_۱<i_۲<i_۳} \left(\frac{n-۳}{n}\right)^{k-۱} \\
&+ \cdots + (-۱)^{d+۱} \sum_{i_۱<i_۲<\cdots<i_d} \left(\frac{n-d}{n}\right)^{k-۱} \\
&+ \cdots + (-۱)^{n+۱} \left(\frac{n-n}{n}\right)^{k-۱}
\end{aligned}$$

در مجموعیابی سطر سوم $\binom{n}{d}$ جمله وجود دارد. با استفاده از این واقعیت و صرفنظر از جملهٔ آخر (که صفر است) می‌توانیم عبارت اخیر را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}\{X_n \geqslant k\} &\\ = \binom{n}{1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} - \binom{n}{2}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{k-1} &+ \binom{n}{3}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{k-1} \\ &+ \cdots + (-1)^{d+1}\binom{n}{d}\left(\frac{n-d}{n}\right)^{k-1} \\ &+ \cdots + (-1)^{n}\binom{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

تساوی بالا را می‌توانیم به شکل فشرده‌تر زیر بنویسیم:

$$\mathbf{Pr}\{X_n \geqslant k\} = \sum_{d=1}^{n-1}(-1)^{d+1}\binom{n}{d}\left(\frac{n-d}{n}\right)^{k-1}$$

اکنون که $\mathbf{Pr}\{X_n \geqslant k\}$ را یافته‌ایم می‌توانیم $\mathbf{Pr}\{X_n = k\}$ را بیابیم و از فرمول $[X_n]$ استفاده کنیم. اما به روش زیر عمل می‌کنیم. می‌دانیم که

$$\mathrm{E}[X_n] = \sum_{k=1}^{\infty} i \cdot \mathbf{Pr}\{X_n = k\}$$

چون ضرب در i مانند i بار جمع کردن است، می‌توانیم عبارت اخیر را به صورت زیر بنویسی

$$\mathrm{E}[X_n] = \sum_{i=k}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\mathbf{Pr}\{X_n = k\}$$

ترتیب مجموعیابی را عوض می‌کنیم:

$$\mathrm{E}[X_n] = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\mathbf{Pr}\{X_n = k\}$$

همچنین می‌دانیم که

$$\sum_{k=j}^{\infty}\mathbf{Pr}\{X_n = k\} = \mathbf{Pr}\{X_n \geqslant j\}$$

پس فرمول زیر نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{E}[X_n] = \sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{Pr}\{X_n \geqslant j\}$$

بنابراین درحالت مورد نظر ما می‌توان نوشت (به خاطر آورید که به‌ازای $k \leqslant n$، $\{X \geqslant k\} = 1$).

$$\mathrm{E}[X_n] = \sum_{j=1}^{n} 1 + \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{d=1}^{n-1} (-1)^{d+1} \binom{n}{d} \left(\frac{n-d}{n}\right)^{j-1}$$

مجموع اول را ساده و ترتیب مجموعیابی دوم را عوض می‌کنیم:

$$\mathrm{E}[X_n] = n + \sum_{d=1}^{n-1} (-1)^{d+1} \binom{n}{d} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{n-d}{n}\right)^{j-1}$$

با استفاده از فرمول تصاعد هندسی نتیجه می‌شود

$$\mathrm{E}[X_n] = n + \sum_{d=1}^{n-1} (-1)^{d+1} \binom{n}{d} \frac{n}{d} \left(\frac{n-d}{n}\right)^{n}$$

و این درواقع جواب نهایی است. تنها چیزی که باقی می‌ماند قرار دادن ۵۲ به جای n است. محاسبهٔ این مجموع با دست‌کاری خسته‌کننده است. خوشبختانه کامپیوتر می‌تواند این کار را انجام دهد. ما با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا مقدار $\mathrm{E}[X_{52}]$ را ۲۳۵٫۹۷۸ به‌دست آوردیم.

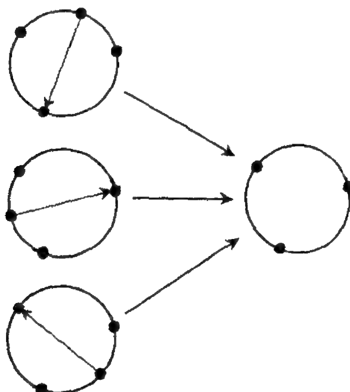
۹.۳ اگر هر سه نقطه در یک نیم‌قرص باشند، یکی از نقطه‌ها درون زاویهٔ متشکل از شعاعهایی قرار دارد که از دو نقطهٔ دیگر می‌گذرند و اندازهٔ این زاویه کمتر از یا برابر با 180° است. اگر به جای نقطهٔ میانی نقطهٔ متقاطرش را بگذاریم، سه نقطهٔ دیگر در یک نیم‌قرص نیستند.
به بیان دیگر، عوض کردن نقطهٔ میانی با نقطهٔ متقاطرش تابعی از مجموعهٔ

{آرایشهایی از سه نقطه که در یک نیم‌قرص‌اند}

به مجموعهٔ

{آرایشهایی از سه نقطه که در یک نیم‌قرص نیستند}

به دست می‌دهد. این تابع ۳ به ۱ است: هر آرایشی از سه نقطه که در یک نیم‌قرص نباشند همانطور که در شکل زیر می‌بینید، سه پیش‌تصویر تحت این تابع دارد:



پس دو مجموعه‌ای که در بالا بیان کردیم در تناظر ۳ به ۱ قرار دارند. بنابراین، احتمال اینکه سه نقطه در یک نیم‌قرص نباشند $\frac{۱}{۴}$ است.

۱۱.۳ اگرچه این مسأله ظاهراً شبیه دو مسألهٔ قبل است، ولی درواقع بسیار ساده‌تر از آن دوست. فرض می‌کنیم مربع قبلاً به صورت قطری، افقی یا هر شکل دیگری تقسیم شده باشد. دراین‌صورت احتمال اینکه هر یک از نقطه‌ها در نصف مربع مفروضی باشد $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین احتمال اینکه هر سه نقطه در نصف مربع مفروضی باشند برابر است با

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$$

چون دو نصف مربع داریم، احتمال اینکه هر سه نقطه در یک نصف مربع باشند $۲ \times \frac{۱}{۸}$ یعنی $\frac{۱}{۴}$ است.

۱۳.۳ در مسألهٔ قبل فقط این واقعیت را که ترتیبی وجود دارد به حساب آوردیم و به مقدار عدده توجهی نکردیم. در این مسأله اگرچه نمی‌دانیم عددها چه هستند یا چه ترتیبی دارند، ولی می‌دانیم که به هر حال ترتیبی وجود دارد. و این تنها چیزی است که مهم است. پس جواب این مسأله همان جواب مسألهٔ قبل است.

۱۵.۳ مرحلهٔ ۱: ظرف ۸ لیتری را پر کنید. سپس از ظرف ۸ لیتری آنقدر آب در ظرف ۵ لیتری بریزید تا این ظرف پر شود. دراین‌صورت، ۳ لیتر آب در ظرف ۸ لیتری می‌ماند.

مرحلهٔ ۲: ظرف ۵ لیتری را خالی کنید و ۳ لیتر آب را از ظرف ۸ لیتری در ظرف ۵ لیتری بریزید سپس دوباره ظرف ۸ لیتری را پر کنید و از آن آنقدر در ظرف ۵ لیتری آب بریزید تا این ظرف پر شود. چون در ظرف ۵ لیتری قبلاً ۳ لیتر آب بوده است، ۲ لیتر از آب ظرف ۸ لیتری را بیرون ریخته‌ایم و ۶ لیتر آب در این ظرف باقی مانده است.

مرحلهٔ ۳: ظرف ۵ لیتری را خالی کنید و آن را دوباره با آب درون ظرف ۸ لیتری پر کنید. چون ۶ لیتر آب در ظرف ۸ لیتری بوده است، بعد از پر شدن ظرف ۵ لیتری ۱ لیتر آب در ظرف ۸ لیتری باقی می‌ماند.

۱۷.۳ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

از ۱ تا ۹،	رقم ۹	$۹ \times ۱ =$
از ۱۰ تا ۹۹،	رقم ۱۸۰	$۹۰ \times ۲ =$
از ۱۰۰ تا ۷۵۰،	رقم ۱۹۵۳	$۶۵۱ \times ۳ =$
جمعاً،	رقم ۲۱۴۱	

به ۲۱۴۱ رقم نیاز داریم.

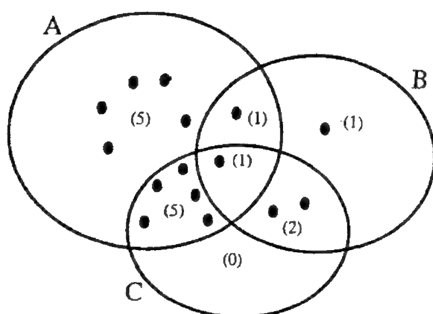
۱۹.۱ راهی ساده برای حل این‌گونه مسأله‌ها استفاده از نمودار ون است. فرمول زیر نیز وجود دارد (که اثبات آن بعد از دیدن نمودار ون چندان دشوار نیست). اگر A، B و C سه مجموعهٔ متناهی باشند،

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

که در آن نماد $|\cdot|$ به معنی «تعداد عضوهای ...» است. در این مسأله A، B و C به ترتیب نشانهٔ «جبر»، «زیست‌شناسی» و «شیمی» هستند. می‌توانیم بنویسیم

#{دانش‌آموزانی که در درسی قبول نشده‌اند} = ۱۲ + ۵ + ۸ − ۲ − ۶ − ۳ + ۱ = ۱۵

نمودار ون زیر هم این را نشان می‌دهد:



۲۱.۲ درواقع درست است که اکثر مردم از خانواده‌های بزرگتر از متوسط‌اند. این ادعا را می‌توان چنین ثابت کرد: فرض کنید f_i تعداد خانواده‌هایی باشد که i فرزند دارند و c_i تعداد کسانی باشد که از خانواده‌های i فرزندی برخاسته‌اند. تساوی $c_i = if_i$ برقرار است. تعداد فرزندان خانوادهٔ متوسط مجموع تعداد خانواده‌ها ضرب در تعداد فرزندانشان تقسیم بر تعداد کلِ خانواده‌هاست:

$$\mathrm{Av}_f = \frac{\sum_{i=1}^{K} if_i}{\sum_{i=1}^{K} f_i}$$

که در آن K حداکثر تعداد فرزندانی است که خانواده‌ای دارد. از طرف دیگر، اگر شخصی را انتخاب کنیم خانواده‌اش به‌طور متوسط چند نفری است؟ این سؤال با سؤال قبل فرق دارد. باید همهٔ حاصل‌ضربهای تعداد افراد در اندازهٔ خانوادهٔ هر فرد را با هم جمع کنیم و سپس مجموع را بر تعداد کلِ افراد تقسیم کنیم:

$$\mathrm{Av}_p = \frac{\sum_{i=1}^{K} ic_i}{\sum_{i=1}^{K} c_i} = \frac{\sum_{i=1}^{K} i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{K} if_i}$$

ثابت می‌کنیم که $\mathrm{Av}_f \leqslant \mathrm{Av}_c$ و به این ترتیب ثابت می‌شود که اگر شخصی را در خیابار انتخاب کنیم او، به‌طور متوسط، از خانواده‌ای بزرگتر از متوسط برخاسته است.

باید ثابت کنیم که

$$\frac{\sum_{i=1}^{K} if_i}{\sum_{i=1}^{K} f_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{K} i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{K} if_i}$$

و یا

$$\left(\sum_{i=1}^{K} if_i\right)\left(\sum_{i=1}^{K} if_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{K} i^2 f_i\right)\left(\sum_{i=1}^{K} f_i\right)$$

مجموعهای درون پرانتز را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{K} ijf_if_j \leqslant \sum_{i=1}^{K} i^2 f_if_j$$

هر یک از مجموعها را به دو مجموع تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant K} ijf_if_j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant K} ijf_if_j \leqslant \sum_{1\leq i<j\leqslant K} i^2 f_if_j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant K} i^2 f_if_j$$

در هر دو طرف نابرابری در مجموعیابی دوم جای i و j را عوض می‌کنیم (این کار فقط تغیی متغیر است). نتیجه می‌شود

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant K} ijf_if_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant K} jif_jf_i \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant K} i^2 f_if_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant K} j^2 f_jf_i$$

این نابرابری را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant K} ijf_if_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant K} jif_jf_i + \sum_{1\leqslant i\leqslant K} i^2 f_i^2$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant K} i^2 f_if_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant K} j^2 f_jf_i + \sum_{1\leqslant i\leqslant K} i^2 f_i^2$$

$\sum_{1\leqslant i\leqslant K} I^2 f_i^2$ را از دو طرف کم می‌کنیم:

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant K} ijf_if_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant K} jif_jf_i \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant K} i^2 f_if_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant K} j^2 f_jf_i$$

اکنون دو جملهٔ سمت چپ با هم برابرند و در سمت راست می‌توانیم از f_if_j فاکتور بگیریم. نتیجه می‌شود

$$\sum_{۱\leqslant i<j\leqslant K} ۲ijf_if_j \leqslant \sum_{۱\leqslant i<j\leqslant K} (i^۲+j^۲)f_if_j$$

سرانجام توجه کنید که چون

$$۰ \leqslant (i-j)^۲ = i^۲+j^۲-۲ij$$

نتیجه می‌شود $۲ij \leqslant i^۲+j^۲$. بنابراین، ضریبهای f_if_j در سمت چپ همیشه کوچکتر از یا برابر با ضریبهای متناظر در سمت راست‌اند. پس نابرابری درست است و به این ترتیب ثابت می‌شود که اکثر مردم از خانواده‌های بزرگتر از متوسط برخاسته‌اند.

۲۳.۳ به چند طریق می‌توانیم l حبهٔ انگور را در k لیوان، با توجه به قاعده‌های بیان‌شده، توزیع‌کنیم. بنابر تعریف، دقیقاً به $\binom{k}{l}$ طریق. پس اگر تعداد زیرمجموعه‌های ۰ عضوی، بعلاوهٔ تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی، بعلاوهٔ تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی، ...، بعلاوهٔ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی را حساب کنیم به مجموع زیر می‌رسیم:

$$\binom{k}{۰}+\binom{k}{۱}+\binom{k}{۲}+\cdots+\binom{k}{k}$$

مجموع بالا بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای برابر ۲^n است.

۲۵.۳ احتمال اینکه روی دیگر کارت نیز قرمز باشد همان احتمال انتخاب کردن کارت دورو قرمز است. احتمال اینکه کارت دورو قرمز را انتخاب کرده باشیم درحالی‌که می‌دانیم یک روی کارت انتخاب شده قرمز است، $\frac{۲}{۳}$ است. ۲ حالت مطلوب وجود دارد (هر یک از دو روی کارت دورو قرمز) و کلاً ۳ حالت وجود دارد (دوروی کارت دورو قرمز و یک روی کارت قرمز و سیاه). پس احتمال اینکه روی دیگر کارت هم قرمز باشد $\frac{۲}{۳}$ است.

۲۷.۳ عدد $۳۰^۴$ را می‌توان به صورت $۵^۴ \times ۳^۴ \times ۲^۴$ تجزیه کرد. هر مقسوم‌علیه $۳۰^۴$ تجزیهٔ یکتایی به صورت $۲^a \times ۳^b \times ۵^c$ دارد که در آن a، b و c عددهایی صحیح و نامنفی‌اند و هیچ‌کدام از آنها بزرگتر از ۴ نیست. پس تعداد مقسوم‌علیه‌ها دقیقاً برابر است با تعداد سه‌تاییهای مرتب (a,b,c) به‌طوری‌که a، b و c عددهایی صحیح بین ۰ و ۴ (و یا خود ۰ و ۴) باشند. این تعداد دقیقاً $۵\times۵\times۵$، یعنی ۱۲۵ است.

۲۹.۳ فقط باید تعداد رقمهای به‌کار رفته را بشماریم:

از ۱ تا ۹،	رقم $۹ = ۱ \times ۹$
از ۱۰ تا ۹۹،	رقم $۱۸۰ = ۲ \times ۹۰$
از ۱۰۰ تا ۵۹۹،	رقم $۱۵۰۰ = ۳ \times ۵۰۰$
از ۶۰۰ تا ۶۵۹،	رقم $۱۸۰ = ۳ \times ۶۰$
از ۶۶۰ تا ۶۶۶،	رقم $۲۱ = ۳ \times ۷$
جمعاً،	رقم ۱۸۹۰

پس کتاب ۶۶۶ صفحه دارد.

۳۱.۳ الگوی کلی چنین است:

$$۱^۲ - ۲^۲ + ۳^۲ - ۴^۲ + \cdots + (-۱)^{n+۱}n^۲ = (-۱)^{n+۱} \cdot (۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n)$$

اگر n زوج باشد، سمت چپ را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}
&(۱^۲ - ۲^۲) + (۳^۲ - ۴^۲) + \cdots + ((n-۱)^۲ - n^۲) \\
&= (۱-۲)(۱+۲) + (۳-۴)(۳+۴) + \cdots \\
&\qquad + ((n-۱) - n)((n-۱) + n) \\
&= -(۱+۲) - (۳+۴) - \cdots - ((n-۱) + n) \\
&= -(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n)
\end{aligned}$$

که همان فرمول مطلوب است. اگر n فرد باشد، سمت چپ را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}
&(۱^۲ - ۲^۲) + (۳^۲ - ۴^۲) + \cdots + ((n-۲)^۲ - (n-۱)^۲) + n^۲ \\
&= (۱-۲)(۱+۲) + (۳-۴)(۳+۴) + \cdots \\
&\qquad + ((n-۲) - (n-۱))((n-۲) + (n-۱)) + n^۲ \\
&= -(۱+۲) - (۳+۴) - \cdots - ((n-۲) + (n-۱)) + n^۲ \\
&= -(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (n-۱)) + ۲(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n) - n \\
&= ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n
\end{aligned}$$

که همان فرمول مطلوب است.

توجه کنید که از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که

$$\begin{aligned}
۲(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n) - n &= ۲ \times \frac{(n+۱)n}{۲} - n \\
&= n^۲ + n - n = n^۲
\end{aligned}$$

و این همان فرمولی است که در مسألهٔ ۳۰ باید به‌دست می‌آوردید.

۳۳.۳ الگوی کلی چنین است:

$$(n^۲ - n + ۱) + (n^۲ - n + ۳) + (n^۲ - n + ۵) + \cdots + (n^۲ - n + (۲n - ۱)) = n^۳$$

توجه کنید در طرف چپ n جمعوند هست. پس می‌توان آن را چنین نوشت:

$$n \times n^۲ - n \times n + (۱ + ۳ + ۵ + \cdots + ۲n - ۱)$$

اکنون توجه کنید که $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + ۲n - ۱$ برابر است با

$$\begin{aligned} & ۱ + ۳ + ۵ + \cdots + ۲n - ۱ \\ & = (۲ \times ۱ - ۱) + (۲ \times ۲ - ۱) + (۲ \times ۳ - ۱) + \cdots + (۲ \times n - ۱) \\ & = ۲(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n) - \underbrace{(۱ + ۱ + ۱ + \cdots + ۱)}_{n \text{ جمعوند}} \\ & = ۲ \times \frac{n^۲ + n}{۲} - n \\ & = n^۲ \end{aligned}$$

پس عبارت بالا برابر است با

$$n \times n^۲ - n \times n + (۱ + ۳ + ۵ + \cdots + ۲n - ۱) = n^۳ + n^۲ - n^۲ = n^۳$$

و این همان نتیجهٔ مطلوب است.

۳۵.۳ احتمال اینکه TOLEDO درست سرهم شده باشد چنین به‌دست می‌آید: احتمال اینکه T درست باشد $\frac{۱}{۲۰}$ است، چون ۱۰ حرف داریم و T را می‌توان درست سر جایش گذاشت یا سروته. احتمال اینکه O درست باشد، درصورتی‌که T درست باشد، $\frac{۴}{۹}$ است، چون ۹ حرف باقی مانده است، ۴ تا از آنها O است، و O از هر دو طرف درست خوانده می‌شود. احتمال اینکه L درست باشد، درصورتی‌که T و O درست باشند، $\frac{۱}{۱۶}$ است، چون ۸ حرف باقی مانده است و L را می‌توان درست گذاشت یا سروته. با ادامهٔ این استدلال نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \Pr\{\text{TOLEDO درست بودن}\} & = \frac{۱}{۲۰} \times \frac{۴}{۹} \times \frac{۱}{۱۶} \times \frac{۱}{۱۴} \times \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۳}{۵} \\ & = \frac{۱}{۲۰۱۶۰۰} \\ & \approx ۴{,}۹۶۰۳۲ \times ۱۰^{-۶} \end{aligned}$$

به همین روش نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \Pr\{\text{OHIO درست بودن}\} & = \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۱}{۹} \times \frac{۱}{۸} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۱}{۴۲۰} \\ & \approx ۲{,}۳۸۰۹۵ \times ۱۰^{-۳} \end{aligned}$$

احتمال اینکه هر دو واژه درست باشند برابر است با احتمال اینکه TOLEDO درست باشد ضرب در احتمال اینکه OHIO درست باشد درصورتی‌که TOLEDO درست باشد. به همان روش قبل نتیجه می‌شود

$$\Pr\{\text{هر دو واژه درست باشند}\} = \frac{۱}{۲۰۱۶۰۰} \times \frac{۲}{۴} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲}$$
$$= \frac{۱}{۲۴۱۹۲۰۰}$$
$$\approx ۴{,}۱۳۳۶ \times ۱۰^{-۷}$$

۳۷.۳ ابتدا توجه کنید که برای دو تیمی که بازی اول را انجام داده‌اند تعداد باختها برابر است با تعداد بازیهایی که بیرون بوده‌اند. این به دلیل آن است که هر یک از این دو تیم فقط و فقط وقتی بیرون می‌ماند که بازی قبل را باخته باشد و یکی از این دو تیم بازی آخر را در برابر تیم A انجام داده و برده است. این قاعده برای تیم A نیز به استثنای بازی اول برقرار است؛ در بازی اول تیم A بدون اینکه قبلاً باخته باشد بیرون مانده است. ولی چون تیم A بازی آخر را باخته است دیگر استثنایی وجود ندارد (درواقع می‌توانیم فکر کنیم که A در بازی اول بیرون مانده است چون در بازی آخر باخته است). پس برای هر تیم، تعداد باختها برابر است با تعداد بازیهایی که آن تیم بیرون بوده است.

از طرف دیگر، برای هر تیم می‌توانیم بنویسیم

$$\#\{\text{بازیهای برده}\} + \#\{\text{بازیهای باخته}\} + \#\{\text{بازیهایی که بیرون بوده است}\}$$
$$= \#\{\text{کلِّ بازیها}\} = ۱۱$$

پس برای هر تیم باید تساوی زیر برقرار باشد:

$$\#\{\text{بازیهای برده}\} + ۲ \times \#\{\text{بازیهایی که بیرون بوده است}\} = ۱۱$$

این یعنی اینکه تعداد بردهای هر تیم عددی فرد است.

فرض کنید $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$ تعداد بردهای سه تیم باشند. چون، بنابر فرض، تعداد بردهای هیچ دو تیمی یکسان نیست، w_iها باید سه عدد متفاوت باشند. پس w_iها باید فرد و متمایز باشند و مجموعشان ۱۱ شود (چون هر بازی برنده‌ای داشته است). می‌توانیم بررسی کنیم که تنها امکان ۱، ۳ و ۷ است. همچنین از معادلهٔ بالا معلوم می‌شود تیمی که ۷ برد داشته است ۲ بازی را باخته است؛ تیمی که ۳ برد داشته ۴ بازی را باخته است و تیمی که یک بازی را برده ۵ بازی را باخته است. توجه کنید که مشخص نکرده‌ایم کدام تیم ۱، ۳ یا ۷ برد داشته است. درواقع می‌توان آرایشهایی را ترتیب داد که تیم A یک، سه یا هفت بازی را برده باشد. پس این را نمی‌توان از داده‌های مسأله نتیجه گرفت.

۳۹.۳ احتمال آمدن ۱۲ در بیست‌وچهار بار ریختن دو تاس برابر است با

$$\begin{aligned} & ۱ - \mathbf{Pr}\{\text{نیامدن ۱۲ در بیست‌وچهار بار ریختن دو تاس}\} \\ &= ۱ - \left(\frac{۳۵}{۳۶}\right)^{۲۴} \\ &= ۱ - \left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴} \times \left(\frac{۷}{۶}\right)^{۲۴} \times \left(\frac{۵}{۶}\right)^{۲۰} \\ &= ۱ - ۰/۵۰۸۵۹۶ \\ &= ۰/۴۹۱۴۰۴ \\ &< ۰/۵ \end{aligned}$$

شوالیه پنجاه پنجاه شرط می‌بسته است درحالی‌که بازی کمی برای او نامنصفانه بوده است.

۴۱.۳ تعداد برامدهای ممکن در هر پرتاب $۲^۵$، یعنی ۳۲، است. تعداد برامدهایی که نتیجهٔ بازی را معلوم می‌کنند می‌توان چنین شمرد. اگر بازی تمام شود، یک نفر خط و چهار نفر دیگر شیر، یا یک نفر شیر و چهار نفر دیگر خط آورده‌اند. بنابراین هر نفر با ۲ برامد از ۳۲ برامد ممکن می‌تواند برنده شود. پس تعداد برامدهایی که نتیجهٔ بازی را معلوم می‌کنند ۵×۲، یعنی ۱۰ ، است. پس احتمال اینکه بازی در اولین بار پرتاب سکه‌ها تمام شود $\frac{۵}{۱۶}$ است. احتمال اینکه بازی در دومین بار پرتاب سکه‌ها تمام شود برابر است با احتمال اینکه در پرتاب اول کسی برنده نشود ضرب در احتمال اینکه یکی در پرتاب دوم برنده شود. پس می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{Pr}\{\text{بازی با پرتاب دوم تمام شود}\} = \left(۱ - \frac{۵}{۱۶}\right) \times \frac{۵}{۱۶} = \frac{۵۵}{۲۵۶}$$

۴۳.۳ از طرحی که در مسألهٔ ۳.۳.۳ عرضه شد استفاده می‌کنیم. فرض کنید

$$F(x) = a_۰ + a_۱x^۱ + a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + a_۴x^۴ + \cdots$$

توجه کنید که

$$۳xF(x) = ۳a_۰x + ۳a_۱x^۲ + ۳a_۲x^۳ + ۳a_۳x^۴ + ۳a_۴x^۵ + \cdots$$

و

$$x^۲F(x) = a_۰x^۲ + a_۱x^۳ + a_۲x^۴ + a_۳x^۵ + a_۴x^۶ + \cdots$$

توانهای مشابه x را گروهبندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & F(x) - ۳xF(x) + x^۲F(x) \\ &= a_۰ + (a_۱ - ۳a_۰)x + (a_۲ - ۳a_۱ + a_۰)x^۲ \\ &\quad + (a_۳ - ۳a_۲ + a_۱)x^۳ + (a_۴ - ۳a_۳ + a_۲)x^۴ + \cdots \end{aligned}$$

اکنون چون به‌ازای $j \geqslant ۲$، $a_j - a_{j-۱} + a_{j-۲} = ۰$، عبارت بالا چنین ساده می‌شود:

$$F(x) - ۳xF(x) + x^۲F(x) = a_۰ + (a_۱ - ۳a_۰)x$$

چون $a_۰ = ۲$ و $a_۱ = ۱$، نتیجه می‌شود

$$F(x)(۱ - ۳x + x^۲) = ۲ - ۵x$$

و یا

$$F(x) = \frac{۲ - ۵x}{۱ - ۳x + x^۲}$$

عبارت بالا را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$F(x) = \left(۱ - \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)\left[\frac{۱}{۱ - \frac{۲}{۳-\sqrt{۵}}x}\right] + \left(۱ + \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)\left[\frac{۱}{۱ - \frac{۲}{۳+\sqrt{۵}}x}\right]$$

و این عبارت را نیز می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$F(x) = \left(۱ - \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)\sum_{j=۰}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳ - \sqrt{۵}}x\right)^j + \left(۱ + \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)\sum_{j=۰}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳ + \sqrt{۵}}x\right)^j$$

پس ضریب x^j در عبارت اخیر برابر است با

$$\left(۱ - \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)\left(\frac{۲}{۳ - \sqrt{۵}}\right)^j + \left(۱ + \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)\left(\frac{۲}{۳ + \sqrt{۵}}\right)^j$$

چون از طرف دیگر،

$$F(x) = \sum_{j=۱}^{\infty} a_j x^j$$

باید

$$a_j = \left(۱ - \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)\left(\frac{۲}{۳ - \sqrt{۵}}\right)^j + \left(۱ + \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)\left(\frac{۲}{۳ + \sqrt{۵}}\right)^j$$

۴۵.۳ مانند مسألهٔ ۴۳.۳ عمل کنید. جواب چنین است:

$$a_j = ۱ - ۲^j$$

۴۷.۳ مانند مسألهٔ قبل عمل می‌کنیم. احتمال مطلوب برابر است با

$$\frac{\binom{۱۲}{۱}\binom{۴۰}{k-۱}}{\binom{۵۲}{k}}$$

توجه کنید که اگر $k > ۴۰$، این احتمال ۱ می‌شود (مثلاً بنابر اصل لانه‌کبوتری).

۴۹.۳ فرض می‌کنیم هرگاو، مستقل از اینکه گاوهای دیگر بیمار باشند یا نباشند، به احتمال $\frac{۱}{۵۰۰}$ مبتلا به بیماری است. پس در گروهی ۱۰۰تایی از گاوها که به تصادف انتخاب شده باشند احتمال اینکه گاوی بیمار باشد $\frac{۱}{۵}$ است.

امید تعداد آزمایشها برای ۱۰۰ گاو برابر است با

$$۱ \times \mathbf{Pr}\{\text{هر ۱۰۰ گاو سالم باشد}\} + ۱۰۱ \times \mathbf{Pr}\{\text{گاو بیمار بین ۱۰۰ گاو باشد}\}$$

$$= ۱\times \frac{۴}{۵} + ۱۰۱ \times \frac{۱}{۵} = \frac{۱۰۵}{۵}$$

$$= ۲۱$$

پس امید تعداد آزمایشها برای ۵۰۰۰ گاو ۲۱×۵۰، یعنی ۱۰۵۰، است.

۵۳.۳ احتمال این را که B دست‌کم دوکارت با عدد یکسان داشته باشد، هم در حالتی که A دوکارت با عدد یکسان دارد و هم در حالتی که هر پنج کارت A عددهایی متمایزند حساب می‌کنیم.

فرض کنید هر پنج کارت A عددهایی متمایز باشند. توجه کنید که در این حالت فرق نمی‌کند که A چه کارتهایی دارد و می‌توانیم فرض کنیم که کارتهایش ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ قرمزند. می‌خواهیم احتمال این را که B دست‌کم دوکارت با عدد یکسان داشته باشد حساب کنیم. توجه کنید که

$$\mathbf{Pr}\{\text{دست‌کم دوکارت با عدد یکسان}\} = ۱ - \mathbf{Pr}\{\text{پنج کارت با عددهای متمایز}\}$$

پس احتمال این را که هر پنج کارت B متمایز باشند حساب می‌کنیم. تعداد طرق انتخاب ۵ کارت از بین ۴۷ کارت باقی‌مانده (۵ کارت در دست A است) برابر است با $\binom{۴۷}{۵}$. برای یافتن تعداد طرق دادن ۵ کارت متمایز به B باید چند حالت را درنظر بگیریم:

اگر هر پنج کارت B از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشند، $۳^۵$ طریق مختلف برای دادن ۵ کارت متمایز به B وجود دارد (چون ۳ انتخاب برای کارت ۱ وجود دارد، ۳ انتخاب برای کارت ۲ وجود دارد، و غیره).

اگر دقیقاً ۴ کارت B از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشند، $\binom{۵}{۴}۳^۴\binom{۸}{۱}۴^۱$ طریق مختلف برای دادن ۵ کارت متمایز به B وجود دارد. توجه کنید که $\binom{۵}{۴}$ طریق برای انتخاب ۴ عدد از بین عددهای $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ وجود دارد و برای هر عدد ۳ انتخاب هست؛ $\binom{۸}{۱}$ طریق برای انتخاب یک عدد از بین عددهای $\{۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳\}$ وجود دارد و چهارکارت با عدد انتخاب شده وجود دارد.

اگر دقیقاً سه تا از کارتها از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشند، $\binom{۵}{۳}۳^۳\binom{۸}{۲}۴^۲$ طریق مختلف برای دادن ۵ کارت متمایز به B وجود دارد. توضیحات مانند قبل است.

اگر دقیقاً دو تا از کارتها از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشند، $\binom{۵}{۲}۳^۲\binom{۸}{۳}۴^۳$ طریق مختلف برای دادن ۵ کارت متمایز به B وجود دارد.

اگر دقیقاً یکی از کارتها از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشد، $۴^۴\binom{۸}{۴}۳^۱\binom{۵}{۱}$ طریق مختلف برای دادن ۵ کارت متمایز به B وجود دارد.
سرانجام، اگر هیچ‌یک از کارتها در مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ نباشند، $۴^۵\binom{۸}{۵}$ طریق مختلف برای دادن ۵ کارت متمایز به B وجود دارد.
بنابراین، احتمال اینکه B دست‌کم دو کارت با عددهای یکسان داشته باشد، درصورتی که هر پنج کارت A متمایز باشند، برابر است با

$$۱ - \frac{۱}{\binom{۴۷}{۵}}\left(۳^۵ + \binom{۵}{۴}۳^۴\binom{۸}{۱}۴^۱ + \binom{۵}{۳}۳^۳\binom{۸}{۲}۴^۲ + \binom{۵}{۲}۳^۲\binom{۸}{۳}۴^۳ \right.$$
$$\left. + \binom{۵}{۱}۳^۱\binom{۸}{۴}۴^۴ + \binom{۸}{۵}۴^۵\right)$$

اکنون احتمال این را که هر پنج کارت B متمایز باشند درصورتی‌که A دو کارت با عددهای یکسان داشته باشد حساب می‌کنیم. باز هم می‌توانیم فرض کنیم که کارتهای B مثلاً کارت ۱ قرمز و کارتهای ۱، ۲، ۳ و ۴ آبی باشند. باز هم چند حالت وجود دارد. در هر حالت، تعداد طرق دادن ۵ کارت متمایز به B را با همان ایده‌های قبل حساب می‌کنیم.
اگر B یک کارت ۱ و دقیقاً ۳ کارت از مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۴\}$ داشته باشد، $۲ \times ۳^۳ \times \binom{۱۴}{۱} \times ۴^۱$ طریق برای دادن ۵ کارت متمایز به B وجود دارد (دو انتخاب برای ۱ و سه انتخاب برای هر یک از کارتهای مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۴\}$ داریم؛ $\binom{۱۴}{۱}$ طریق برای انتخاب یکی از عددهای مجموعهٔ $\{۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳\}$ و چهار انتخاب برای عدد انتخاب شده داریم).
اگر B یک‌کارت ۱ و دقیقاً دوکارت از مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۴\}$ داشته باشد، $۲ \times \binom{۳}{۲} \times ۳^۲ \times \binom{۱۴}{۲} \times ۴^۲$ طریق برای دادن ۵ کارت متمایز به B وجود دارد.
اگر B یک‌کارت ۱ و دقیقاً یک‌کارت از مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۴\}$ داشته باشد، $۲ \times \binom{۳}{۱} \times ۳^۱ \times \binom{۱۴}{۳} \times ۴^۳$ طریق برای دادن ۵ کارت متمایز به B وجود دارد.
اگر B یک کارت ۱ داشته باشد و هیچ کارتی از مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۴\}$ نداشته باشد، $۲ \times \binom{۱۴}{۴} \times ۴^۴$ طریق برای دادن ۵ کارت متمایز به B وجود دارد.
اگر B کارت ۱ نداشته باشد، به شیوه‌ای مشابه عمل می‌کنیم:
هیچ کارت ۱ و سه کارت از مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۴\}$: $\binom{۳}{۳} \times ۳^۳ \times \binom{۱۴}{۲} \times ۴^۲$ طریق برای دادن ۵ کارت متمایز به B.
هیچ کارت ۱ و دقیقاً دوکارت از مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۴\}$: $\binom{۳}{۲} \times ۳^۲ \times \binom{۱۴}{۳} \times ۴^۳$ طریق برای دادن ۵ کارت متمایز به B.
هیچ کارت ۱ و دقیقاً یک کارت از مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۴\}$: $\binom{۳}{۱} \times ۳^۱ \times \binom{۱۴}{۴} \times ۴^۴$ طریق برای دادن ۵ کارت متمایز به B.

هیچ کارت ۱ و هیچ کارتی از مجموعهٔ $\{۲,۳,۴\}$: $۴^۵ \times \binom{۱۴}{۵}$ طریق برای دادن ۵ کارت متمایز به B.
نتیجه می‌شود وقتی A دو کارت با عدد یکسان دارد احتمال اینکه B دست‌کم دو کارت با عدد یکسان داشته باشد برابر است با

$$۱ - \frac{۱}{\binom{۴۷}{۵۲}}\left(۲ \times ۳^۳ \times \binom{۹}{۱}۴^۱ + ۲ \times \binom{۳}{۲}۳^۲ \times \binom{۹}{۲}۴^۲ + ۲ \times \binom{۳}{۱}۳^۱ \times \binom{۹}{۳}۴^۳\right.$$
$$+ ۲ \times \binom{۹}{۴}۴^۴ + \binom{۳}{۳}۳^۳ \times \binom{۹}{۲}۴^۲ + \binom{۳}{۲}۳^۲ \times \binom{۹}{۳}۴^۳$$
$$\left.+\binom{۳}{۱}۳^۱ \times \binom{۹}{۴}۴^۴ + \binom{۹}{۵}۴^۵\right)$$

با محاسبهٔ مقادیر بالا درمی‌یابیم وقتی A پنج کارت متمایز نداشته باشد احتمال اینکه B دست‌کم دو کارت با عدد یکسان داشته باشد تقریباً ۰٫۴۸۹۶۳۶ است، و وقتی A دو کارت با عدد یکسان داشته باشد احتمال اینکه B دست‌کم دو کارت با عدد یکسان داشته باشد تقریباً ۰٫۴۹۵۱۸۲ است. بنابراین احتمال حالت دوم کمی بزرگتر است.

فصل ۴

مسأله‌های منطقی

۱.۴ الف) کار را از E شروع می‌کنیم. مجموع E و O عددی با رقم یکان O است. پس یا $E = ۰$ و از ستون قبل نقلی نداریم، یا $E = ۹$ و مجموع N و R نقلی داشته است. فرض کنیم حالت اول، یعنی $E = ۰$، درست باشد. دراین صورت A باید ۵ باشد (در غیراین صورت، چگونه ممکن است از $A + A$ در ستون چهارم ۰ حاصل شود؟) اکنون می‌توان نوشت

```
      ۱
   DON۵LD
 + G۰R۵LD
 --------
   ROB۰RT
```

چون $N + R$ نقلی ندارد، و مجموع ۵ + ۵ که ۱۰ است نقلی دارد، نتیجه می‌شود که $N + R$ باید حداکثر ۸ باشد. به‌خصوص، چون ۰ را قبلاً به‌کار برده‌ایم و N دست‌کم باید ۱ باشد، R باید ۷ یا کوچکتر از ۷ باشد. از طرف دیگر، $D + G = R$ و در نتیجه، R باید دست‌کم ۳ باشد. اکنون توجه کنید که R ممکن نیست ۳ باشد، چون اگر $N = ۳$، یکی

از D و G برابر ۱ (و دیگری ۲) است، و در عین حال چون از $L + L$ در ستون پنجم ۳ حاصل شده است، L هم باید ۱ باشد.

اگر $R = ۴$، آنگاه L باید ۲ باشد، و چون $D + G = R = ۴$، یکی از D و G باید ۱ و دیگری باید ۳ باشد. پس تا اینجا همهٔ عددهای از ۰ تا ۵ را به‌کار برده‌ایم. دراین صورت، N باید دست‌کم ۶ باشد، و در نتیجه $R + N$ دست‌کم ۱۰ است و این ستون باید نقلی ایجاد کند. ولی این با $O = O + ۰$ در ستون بعدی تناقض دارد. پس R نمی‌تواند ۴ باشد.

چون ۵ را قبلاً به‌کار برده‌ایم، فقط ۶ و ۷ را می‌توانیم برای R انتخاب کنیم. R را ۶ می‌گیریم. دراین صورت، L باید ۳ باشد و $D + D$ در ستون اول نقلی ایجاد نمی‌کند. پس D یا ۴ است یا کوچکتر از ۴. در ضمن، N نباید بزرگتر از ۲ باشد، چون اگر N از ۲ بزرگتر باشد، $N + R + ۱$ نقلی ناخواسته‌ای ایجاد می‌کند. نتیجه می‌شود که D برابر با ۱ نیست، چون اگر باشد آنگاه $T = ۲$ و گزینهٔ بعدی برای N بسیار بزرگ می‌شود. همچنین، D را نمی‌توانیم ۲ بگیریم چون دراین صورت G و T هر دو باید ۴ باشند. پس اگر $R = ۶$، D باید ۴ باشد. اکنون می‌توان نوشت

$$\begin{array}{r} ۱ \\ \mathrm{D\,O\,N}\,۵\,۳\,۴ \\ +\ \mathrm{G}\,۰\,\mathrm{R}\,۵\,۳\,۴ \\ \hline \mathrm{R\,O\,B}\,۰\,۶\,\mathrm{T} \end{array}$$

پس $T = ۸$ و $G = ۲$. اکنون N باید ۱ باشد؛ ولی چنین چیزی ممکن نیست، چون دراین صورت B باید ۸ باشد و ۸ را قبلاً به‌کار برده‌ایم.

آخرین امکان این است که R را ۷ بگیریم. با این فرض، N فقط می‌تواند ۱ باشد. گذشته از این، $L = ۳$ و برای اینکه $L + L$ به ۷ منجر شود باید از $D + D$ نقلی داشته باشیم. اکنون می‌توان نوشت

$$\begin{array}{r} ۱\ \ ۱ \\ \mathrm{D\,O}\,۱\,۵\,۳\,\mathrm{D} \\ +\ \mathrm{G}\,۰\,۷\,۵\,۳\,\mathrm{D} \\ \hline ۷\,\mathrm{O\,B}\,۰\,۷\,\mathrm{T} \end{array}$$

D از ۵ بزرگتر است، چون در غیراین صورت $D + D$ نقلی ایجاد نمی‌کند. در ضمن، چون $D + G = R = ۷$، D کوچکتر از ۷ است. پس D فقط ممکن است ۶ باشد. ولی اگر D را ۶ بگیریم، G باید ۱ باشد و ۱ را قبلاً به‌کار برده‌ایم.

دیگر گزینه‌ای برای R نداریم و نمی‌توانیم پیشتر برویم. تنها کاری که می‌توانیم بکنیم این است که به عقب برگردیم و $E = ۰$ را به $E = ۹$ تبدیل کنیم. دراین‌صورت A باید ۴ باشد و $L + L$ نقلی ایجاد می‌کند. می‌توان نوشت

```
   ۱ ۱   ۱
   D O N ۴ L D
 + G ۹ R ۴ L D
 -------------
   R O B ۹ R T
```

چون $R = G + D + ۱$ و D یا G هیچ‌کدام نمی‌توانند صفر باشند، R دست‌کم ۴ است. ولی R را نمی‌توانیم ۴ بگیریم، چون $A = ۴$. پس R باید ۵ یا بزرگتر از ۵ باشد. فرض کنیم $R = ۵$. دراین‌صورت، L باید ۷ باشد و باید از $D + D$ نقلی داشته باشیم. پس D باید بزرگتر از ۵ باشد و این ممکن نیست، چون $۵ = R = G + D + ۱$. به همین ترتیب، اگر R را ۷ (یا هر عدد فرد دیگری) بگیریم D باید بزرگتر از ۵ باشد. ولی این بار تساوی $R = G + D + ۱$ ایجاب می‌کند که D برابر با ۵ باشد. دراین‌صورت G باید ۱ و L باید ۸ باشد. می‌توان نوشت

```
   ۱ ۱   ۱
   ۵ O N ۴ ۸ ۵
 + ۱ ۹ ۷ ۴ ۸ ۵
 -------------
   ۷ O B ۹ ۷ T
```

روشن است که T باید صفر باشد. فقط عددهای ۲، ۳ و ۶ باقی می‌مانند. با کمی آزمون و خطا می‌بینیم که $N = ۶$، $B = ۳$ و $O = ۲$. پس معما حل شده است:

```
   ۵ ۲ ۶ ۴ ۸ ۵
 + ۱ ۹ ۷ ۴ ۸ ۵
 -------------
   ۷ ۲ ۳ ۹ ۷ ۰
```

امتحان این را که $R = ۶$ یا $R = ۸$ جوابی به‌دست نمی‌دهد به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

ج) T در $TWELVE$ حاصل ده بر یک است و چون

$$SEVEN + EIGHT < ۱۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ = ۲۰۰۰۰۰۰$$

T باید ۱ باشد. گذشته از این توجه کنید که در ستون سوم از چپ، $E + I$ به E منجر شده است. پس I یا صفر است یا ۹. ابتدا فرض می‌کنیم $I = ۰$.

درآخرین ستون (از چپ)، $N+T$ که اکنون می‌دانیم $N+1$ است به E منجر شده است.
چون E نمی‌تواند صفر باشد، مجموع $N+1$ نقلی ایجاد نمی‌کند. پس $E = N+1$.
می‌توان نوشت

$$\begin{array}{r} \text{SEVEN} \\ +\ \text{E}0\text{GH}1 \\ \hline 1\ \text{WELVE} \end{array}$$

E پنج بار در جمع بالا ظاهر شده است. پس دانستن E اطلاعات زیادی در اختیارمان می‌گذارد. پس امتحان کردن مقادیر مختلف برای E به زحمتش می‌ارزد.
چون $E = N+1$ و N دست‌کم ۲ است، کار را با $E = 3$ شروع می‌کنیم. دراین صورت

$$\begin{array}{r} \text{S}3\text{V}32 \\ +\ 30\text{GH}1 \\ \hline 1\ \text{W}3\text{LV}3 \end{array}$$

اکنون S باید ۷، ۸ یا ۹ باشد تا $S+3$ در ستون دوم نقلی ایجاد کند. دراین صورت، W باید ۰، ۱ یا ۲ باشد. ولی همهٔ این عددها را قبلاً به‌کار برده‌ایم. پس باید عدد دیگری برای E انتخاب کنیم. اگر $E = 4$، می‌توان نوشت

$$\begin{array}{r} \text{S}4\text{V}43 \\ +\ 40\text{GH}1 \\ \hline 1\ \text{W}4\text{LV}4 \end{array}$$

روشن است که S دست‌کم باید ۶ باشد تا نقلی ایجاد شود. از طرف دیگر، S نمی‌تواند ۶، ۷ یا ۹ باشد (چون در غیراین صورت W برابر با ۰، ۱ یا ۳ می‌شود که همهٔ آنها را قبلاً به‌کار برده‌ایم). پس S باید ۸ و W باید ۲ باشد. اکنون چون همهٔ عددهای از ۰ تا ۴ را به‌کار برده‌ایم، $V+G$ باید دست‌کم ۱۱ باشد. ولی این ستون نباید نقلی ایجاد کند. پس فرض $E = 4$ به تناقض انجامیده است.
انتخاب طبیعی بعدی $E = 5$ است. با این فرض به‌دست می‌آوریم

$$\begin{array}{r} \text{S}5\text{V}54 \\ +\ 50\text{GH}1 \\ \hline 1\ \text{W}5\text{LV}5 \end{array}$$

S فقط می‌تواند ۷ یا ۸ باشد. اگر $S = 7$، آنگاه $W = 2$. چون $V+G$ نباید نقلی ایجاد کند یکی از دو عدد V و G باید کوچکتر از ۵ باشد. همین موضوع در مورد V و H

نیز درست است (چرا؟). چون فقط یک عدد کوچکتر از ۵، یعنی ۳، باقی مانده است، پس $V = ۳$. دراین‌صورت $H = ۸$ و G باید ۶ باشد. ولی دچار مشکل شده‌ایم، چون ۳ + ۶ با نقلی حاصل از ستون قبل به ۰ و ده بر یک منجر می‌شود. به تناقض رسیده‌ایم و بنابراین گزینهٔ بعدی را برای S انتخاب می‌کنیم.

اگر $S = ۸$، به $W = ۳$ می‌رسیم. با استدلالی مشابه استدلال بند قبل نتیجه می‌گیریم $V = ۲$، $H = ۷$ و $G = ۶$. دراین‌صورت $L = ۹$ و معما حل شده است:

```
  ۸۵۲۵۴
+ ۵۰۶۷۱
-------
 ۱۳۵۹۲۵
```

اگر به ابتدای راه‌حل توجه کنید درمی‌یابید که امکان $I = ۹$ را بررسی نکرده‌ایم. درواقع این انتخاب جواب دیگری به‌دست می‌دهد:

```
  ۶۳۷۳۲
+ ۳۹۸۴۱
-------
 ۱۰۳۵۷۳
```

تکمیل جزئیات را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

ه) این معما جوابهای زیادی دارد، از جمله

```
   ۳۴۲
+ ۱۳۵۰
------
  ۱۶۹۲
```

و

```
   ۴۶۲
+ ۸۴۵۰
------
  ۸۹۱۲
```

ز) جوابهای زیادی وجود دارد، از جمله

```
  ۱۷۳
+ ۲۹۵
-----
  ۴۶۸
```

و

```
  ۲۸۹
+ ۴۶۱
-----
  ۷۵۰
```

ط) با آزمون و خطا جوابهای زیر به‌دست می‌آید:

$$۶۳ \times ۱۵۴ = ۹۷۰۲$$

$$۵۴ \times ۱۶۸ = ۹۰۷۲$$

$$۵۹ \times ۱۳۶ = ۸۰۲۴$$

$$۲۶ \times ۳۴۵ = ۸۹۷۰$$

۳.۴ در تقویم گرگوری هر سال عادی ۵۲ هفته و یک روز دارد. سالهای کبیسه یک روز اضافی دارند که ۲۹ فوریه است. پس اگر سال x با شنبه شروع شود، سال $x + ۱$ اگر سال عادی باشد با یکشنبه و اگر سال کبیسه باشد با دوشنبه شروع می‌شود.

به یاد آورید که همهٔ سالهای مضرب ۴ جز سالهایی که بر ۱۰۰ بخش‌پذیرند کبیسه‌اند، و در میان آنها سالهایی که بر ۴۰۰ بخش‌پذیرند نیز کبیسه‌اند. پس سال ۲۱۰۰ کبیسه نیست، درحالی‌که سال ۲۰۰۰ کبیسه است.[۱]

از طرف دیگر، هر دورهٔ ۴۰۰ ساله دقیقاً ۲۰۸۷۱ هفته دارد (تمرین ۱۲ را ببینید). پس سالهای x و $x + ۴۰۰$، مستقل از اینکه سال x چه باشد، با یک روز هفته شروع می‌شوند. پس برای اینکه بدانیم روز اول سال با چه فراوانیهای نسبی‌یی به هر یک از روزهای هفته می‌افتد، کافی است این فراوانیهای نسبی را در یک دورهٔ ۴۰۰ ساله بدانیم. اگر بخواهیم بنشینیم و ۴۰۰ سال متوالی را همراه با روز اول هر سال بنویسیم کاری بسیار دشوار و خسته‌کننده خواهد بود. خوشبختانه می‌توانیم گامهایی برداریم که کار را آسانتر سازد.

پیش از هر چیز روشن است که در هر دورهٔ ۴۰۰ ساله یک و فقط یک سال هست که بر ۴۰۰ بخش‌پذیر است. اگر این یک سال نبود، می‌توانستیم دورهٔ ۴۰۰ ساله را به ۴ زیردورهٔ ۱۰۰ ساله تقسیم کنیم و سپس ببینیم که هر روز هفته چند بار در ۱۰۰ سالهٔ اول روز اول سال می‌شود. سپس با توجه به اینکه هر یک از سه زیردورهٔ دیگر همان الگوی زیردورهٔ اول را داشتند، جز اینکه هرکدام با روز متفاوتی شروع می‌شدند، می‌توانستیم با تغییر نام روزهای هفته، تعداد دفعاتی را که هر روز هفته در هر یک از زیردوره‌ها روز اول سال می‌شود حساب کنیم. سپس همهٔ این عددها را جمع می‌کردیم و پاسخ مسأله را به‌دست می‌آوردیم.

اگر دورهٔ ۴۰۰ ساله را طوری انتخاب کنیم که سال «مزاحم» در پایان یکی از زیردوره‌ها، و ترجیحاً در پایان خود دورهٔ ۴۰۰ ساله باشد، باز هم می‌توانیم همین کار را بکنیم. مثلاً دورهٔ ۲۰۰۱ تا ۲۴۰۰ مناسب است.

---

۱. محاسبهٔ سالهای کبیسه در تقویم هجری شمسی (تقویم جلالی) پیچیده‌تر از این است و دقت بیشتری دارد. در تقویم جلالی سالهای کبیسه را می‌توان براساس جدولی به نام جدول خیامی تعیین کرد. برای اطلاعات بیشتر به کتاب گاهنامهٔ تطبیقی سه هزار ساله، احمد بیرشک، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۶۷ مراجعه کنید. ـ م.

پیش از شروع شمارش، روزهای هفته را ۱، ۲، . . . و ۷ می‌نامیم و فرض می‌کنیم که سال ۲۰۰۱ با روز ۱ شروع شود. در پایان کار نام روزهای هفته را تعیین می‌کنیم.
برای اینکه کار شمارش باز هم آسانتر شود توجه می‌کنیم که در هر دورهٔ ۲۸ ساله که حاوی سال بخش‌پذیر بر ۱۰۰ نباشد، روز اول سال دقیقاً ۴ بار به هر یک از روزهای هفته می‌افتد. از خواننده می‌خواهیم که یا این موضوع را ثابت کند یا با شمارش خود را قانع سازد. پس تا سال ۲۰۸۴، هر روز هفته دقیقاً ۱۲ (یعنی ۴×۳) بار روز اول سال می‌شود. باید ۱۶ سال بعد را هم اضافه کنیم و این کار به‌سادگی با شمارش انجام می‌شود. می‌دانیم که سالهای ۲۰۰۱ و ۲۰۸۵ با یک روز هفته شروع می‌شوند. پس در ۱۶ سال آخر زیردورهٔ ۱۰۰ سالهٔ اول، روزهای اول سال عبارت‌اند از

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۷, ۱, ۲, ۴, ۵, ۶, ۷, ۲, ۳, ۴, ۵$$

توجه کنید که دورهٔ ۱۰۰ سالهٔ بعدی با روز ۶ شروع می‌شود.
همهٔ این نتایج را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$A_۱(n)$	۱۴	۱۵	۱۴	۱۵	۱۴	۱۴	۱۴

در اینجا $A_i(n)$ تعداد دفعاتی است که در دورهٔ ۱۰۰ سالهٔ iام روز اول سال به روز n می‌افتد.
همان‌طور که قبلاً گفتیم، دورهٔ ۱۰۰ سالهٔ بعدی با روز ۶ شروع می‌شود. پس با تغییر نام روزهای هفته در جدول قبل، می‌توانیم جدول زیر را بنویسیم:

n	۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵
$A_۲(n)$	۱۴	۱۵	۱۴	۱۵	۱۴	۱۴	۱۴

به همین ترتیب، جدولهای زیر را می‌نویسیم:

n	۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
$A_۳(n)$	۱۴	۱۵	۱۴	۱۵	۱۴	۱۴	۱۴

n	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱
$A_۴(n)$	۱۴	۱۵	۱۴	۱۵	۱۴	۱۴	۱۴

با جمع کردن عددهای متناظر هر روز هفته، جدول ۱ را به‌دست می‌آوریم که در آن $A(n)$ تعداد دفعاتی است که در دورهٔ ۴۰۰ سالهٔ ۲۰۰۱ تا ۲۴۰۰ روز اول سال به روز n می‌افتد. اکنون فقط باقی می‌ماند که نام مناسبی به هر یک از عددهای ۱، ۲، . . . و ۷ بدهیم. این کار با بررسی تقویم به آسانی انجام می‌شود. سال ۲۰۰۱ با روز دوشنبه شروع می‌شود. پس در جدول ۱ ، شنبه روز ۶ و یکشنبه روز ۷ است. پس روز اول سال بیشتر به یکشنبه می‌افتد تا به شنبه.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$A(n)$	۵۶	۵۸	۵۷	۵۷	۵۷	۵۶	۵۸

جدول ۱

۵.۴ بازیکن اول در حرکت اول باید مرکز مهرهٔ خود را در مرکز میز بگذارد. بعد از آن، هر بار که بازیکن دوم حرکتی انجام می‌دهد بازیکن اول باید مهرهٔ خود را در محلی متقارن نسبت به مرکز میز بگذارد. به این ترتیب، هر بار که بازیکن اول حرکت خود را انجام می‌دهد مهره‌های روی میز نسبت به مرکز میز متقارن‌اند. پس اگر بازیکن دوم حرکتی انجام دهد بازیکن اول هم می‌تواند حرکتی انجام دهد. پس بازیکن اول کسی است که آخرین مهره را روی میز می‌گذارد.

۷.۴ اولین و آخرین جملهٔ D یا هر دو راست‌اند یا هر دو دروغ. چون هر دانش‌آموز دقیقاً یک جملهٔ دروغ گفته است، این دو جمله هر دو راست‌اند. پس D مجرم نیست.
اکنون جمله‌های C را بررسی می‌کنیم. او در جملهٔ سوم ادعا کرده که D کیف را دزدیده است. می‌دانیم که این جمله دروغ است. پس دو جملهٔ دیگر او راست‌اند. پس اینکه ادعا کرده است او، یعنی C، قبل از شروع سال تحصیلی E را نمی‌شناخته است راست است. پس نتیجه می‌گیریم که E دروغ گفته است که C سالهاست او را می‌شناسد. پس دو جملهٔ دیگر E راست‌اند. پس اینکه گفته است B کیف را برداشته راست است.

۹.۴ از جملهٔ اول نتیجه می‌شود که مادر ناد مادر شموتزکی نیست. پس این دو یک نفر نیستند. پس نام کوچک ناد، شموتزکی نیست. از طرف دیگر، بنابر جملهٔ چهارم، بلینکن و شموتزکی یک نفر نیستند. پس نام‌خانوادگی شموتزکی باید وینکن باشد. در ضمن، شموتزکی باید ۱۲ ساله باشد چون در ۷ سالگی کلاس اول را شروع کرده است و اکنون کلاس ششم را شروع کرده است.
از جملهٔ آخر نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که بلینکن و پلوتزکی یک نفر نیستند. و این فرض که نام‌خانوادگی پلوتزکی، بلینکن است با همهٔ جمله‌های دیگر سازگار است. ولی با این فرض، اطلاعات کافی برای تعیین سن بلوتزکی ناد نخواهیم داشت. پس این مسأله فقط درصورتی حل‌پذیر است که پلوتزکی و بلینکن دو نفر باشند. دراین‌صورت، سه پسر مورد نظر عبارت‌اند از شموتزکی وینکن ۱۲ ساله، بلوتزکی ناد ۱۳ ساله و پلوتزکی بلینکن ۱۳ ساله.

۱۱.۴ سؤال این است که چند بار می‌توانیم جای عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار را عوض کنیم به‌طوری که باز هم عقربه‌ها زمان درستی را نشان دهند. مثلاً اگر ساعت ۱ باشد، بعد از عوض کردن جای عقربه‌ها، عقربهٔ ساعت‌شمار دقیقاً روی ۱۲ و عقربهٔ دقیقه‌شمار روی ۱ خواهد بود و این زمان درست نیست، چون به‌محض اینکه عقربهٔ دقیقه‌شمار از ۱۲ بگذرد، عقربهٔ ساعت‌شمار هم اندکی از ۱۲ می‌گذرد.

اکنون فرض کنید ساعت زمان h را نشان دهد. h محل عقربهٔ ساعت‌شمار را هم نشان می‌دهد (قرار می‌گذاریم که ۰۰ : ۱۲ ساعت صفر باشد). فرض کنید L محل عقربهٔ دقیقه‌شمار را نشان دهد. دراین صورت

$$h = k + \frac{L}{۱۲}$$

که در آن k ممکن است ۰، ۱، ... یا ۱۱ باشد. اگر جای عقربه‌ها را عوض کنیم و ساعت باز هم زمان درستی را نشان دهد، باید

$$L = k' + \frac{h}{۱۲}$$

که درآن k' ممکن است ۰، ۱، ... یا ۱۱ باشد. اگر L را بین دو معادلهٔ بالا حذف کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$h = \frac{۱۴۴k + ۱۲k'}{۱۴۳}$$

و این رابطه ۱۲ × ۱۲ ترکیب به‌دست می‌دهد. باید درنظر داشته باشیم که شروع چرخه، یعنی $k = k' = ۰$، و پایان چرخه، یعنی $k = k' = ۱۱$، درواقع یک زمان را نشان می‌دهند که ساعت ۰۰ : ۱۲ است. پس با گذشت زمان در طول ۱۲ ساعت، ۱۴۳ بار با عوض کردن جای عقربه‌ها باز هم ساعت زمان درستی را نشان می‌دهد.
به خواننده‌ای که قانع نشده باشد پیشنهاد می‌کنیم جدولی از مقادیر h به‌ازای همهٔ ۱۴۴ ترکیب k و k' تهیه کند و ببیند که در جدول فقط به‌ازای $k = k' = ۰$ و $k = k' = ۱۱$ مقادیر تکراری به‌دست می‌آید. فکر می‌کنیم که چنین خوانندهٔ شکاکی با محاسبهٔ دو سطر اول و دو ستون اول جدول قانع خواهد شد.

۱۳.۴ با ۶۴ حرکت می‌توان کلِّ صفحه را پیمود. برای یافتن راهی برای این کار، صفحه‌ای شطرنجی با ۶۴ خانه رسم می‌کنیم. اسب را آنقدر روی صفحه حرکت می‌دهیم تا دیگر حرکتی ممکن نباشد. خانه‌های باقی‌مانده را a، b، c، ... می‌نامیم. سپس می‌کوشیم این خانه‌ها را به مسیر اضافه کنیم. این را با یک مثال نشان می‌دهیم. فرض کنید مسیر زیر را داشته باشیم:

۴۲	۲۱	۵۴	۹	۴۰	۱۹	۵۲	۷
۵۵	۱۰	۴۱	۲۰	۵۳	۸	۳۹	۱۸
۲۲	۴۳	۲۴	۶۳	۳۰	۵۹	۶	۵۱
۱۱	۵۶	۳۱	۶۰	۲۷	۶۲	۱۷	۳۸
۳۲	۲۳	۴۴	۲۵	۵۸	۲۹	۵۰	۵
۴۵	۱۲	۵۷	۲۸	۶۱	۲۶	۳۷	۱۶
a	۳۳	۲	۴۷	۱۴	۳۵	۴	۴۹
۱	۴۶	۱۳	۳۴	۳	۴۸	۱۵	۳۶

همهٔ خانه‌های صفحه را غیر از خانهٔ a پیموده‌ایم. توجه کنید که حرکت از ۵۷ به a و از ۵۶ به ۶۳ ممکن است. پس اگر مسیر را به ۱، ...، ۵۶، ۶۳، ...، ۵۷ تغییر دهیم می‌توانیم a را به انتهای مسیر اضافه کنیم. با عوض کردن شماره‌ها، مسیر زیر را به‌دست می‌آوریم:

۴۲	۲۱	۵۴	۹	۴۰	۱۹	۵۲	۷
۵۵	۱۰	۴۱	۲۰	۵۳	۸	۳۹	۱۸
۲۲	۴۳	۲۴	۵۷	۳۰	۶۱	۶	۵۱
۱۱	۵۶	۳۱	۶۰	۲۷	۵۸	۱۷	۳۸
۳۲	۲۳	۴۴	۲۵	۶۲	۲۹	۵۰	۵
۴۵	۱۲	۶۳	۲۸	۵۹	۲۶	۳۷	۱۶
۶۴	۳۳	۲	۴۷	۱۴	۳۵	۴	۴۹
۱	۴۶	۱۳	۳۴	۳	۴۸	۱۵	۳۶

گاهی ممکن است لازم باشد که دنبالهٔ خانه‌های مسیر را چند بار تغییر داد تا بتوان خانهٔ جدیدی به مسیر اضافه کرد. خواننده می‌تواند به عنوان تمرین بکوشد که مسیر بالا را طوری تغییر دهد که آخرین خانهٔ مسیر همان اولین خانه باشد. برای مطالعهٔ بیشتر در این مورد می‌توانید به کتاب

"Mathematical Recreations and Essays"

نوشتهٔ و. روز بال مراجعه کنید.

۱۵.۴ شمارش ساده نشان می‌دهد که ۴۹ راه برای پرداخت ۵۰ سنت با سکه‌های ۲۵، ۱۰، ۵ و ۱ سنتی وجود دارد. در اینجا شمارشی روشمند انجام می‌دهیم.

فرض کنید $N_i(k)$، به‌ازای i برابر با ۱، ۵، ۱۰ و ۲۵، تعداد راههایی را نشان دهد که می‌توان k سنت را با سکه‌هایی به ارزش کمتر از یا برابر با i پرداخت. در اینجا می‌خواهیم $N_{۲۵}(۵۰)$ را بیابیم. روشن است که $N_۱(k) = ۱$ و $N_۵(۵k) = k + ۱$.

برای محاسبهٔ $N_{۲۵}(۵۰)$ مسأله را به سه زیرمسأله تقسیم می‌کنیم. ابتدا کل مبلغ را بدون سکهٔ ۲۵ سنتی می‌پردازیم. در این حالت تعداد راهها $N_{۱۰}(۵۰)$ است. یا می‌توانیم یک ۲۵ سنتی بدهیم و ۲۵ سنت دیگر را با سکه‌های ۱۰ سنتی، ۵ سنتی و ۱ سنتی بپردازیم. در این حالت تعداد راهها $N_{۱۰}(۲۵)$ است. سرانجام می‌توانیم دو سکهٔ ۲۵ سنتی بدهیم و روشن است که در این حالت فقط یک راه برای پرداخت ۵۰ سنت وجود دارد. همهٔ حالتها را درنظر گرفته‌ایم. بنابراین

$$N_{۲۵}(۵۰) = N_{۱۰}(۵۰) + N_{۱۰}(۲۵) + ۱ \qquad (۱.۴)$$

اکنون باید $N_{۱۰}(۵۰)$ و $N_{۱۰}(۲۵)$ را حساب کنیم. بازهم برای پرداخت ۵۰ سنت با سکه‌های ۱۰، ۵ و ۱ سنتی می‌توانیم سکهٔ ۱۰ سنتی ندهیم، ۱ سکه ۱۰ سنتی بدهیم، ۲ سکهٔ ۱۰ سنتی بدهیم، و غیره. پس

$$N_{۱۰}(۵۰) = N_۵(۵۰) + N_۵(۴۰) + \cdots + N_۵ + ۱$$
$$= ۱۱ + ۹ + ۷ + ۵ + ۳ + ۱$$
$$= ۳۶$$

و

$$N_{۱۰}(۲۵) = N_۵(۲۵) + N_۵(۱۵) + N_۵(۵)$$
$$= ۶ + ۴ + ۲$$
$$= ۱۲$$

با قرار دادن این مقادیر در (۱.۴) به‌دست می‌آوریم

$$N_{۲۵}(۵۰) = ۳۶ + ۱۲ + ۱$$
$$= ۴۹$$

با این شیوه می‌توانیم $N_{۲۵}(k)$ را برای هر مقدار دلار محاسبه کنیم. مثلاً

$$N_{۲۵}(۱۰۰) = N_{۱۰}(۱۰۰) + N_{۱۰}(۷۵) + N_{۱۰}(۵۰) + N_{۱۰}(۲۵) + ۱$$

در رابطهٔ بالا، سه جملهٔ آخر را می‌دانیم. پس فقط باید دو جملهٔ اول را حساب کنیم که این کار هم مانند قبل انجام می‌شود. سپس می‌توانیم $N_{۲۵}(۱۲۵)$، و غیره را حساب کنیم.
می‌توان فرمولی برای $N_{۲۵}(۵۰k)$ به‌دست آورد. درواقع

$$N_{۲۵}(۵۰k) = \frac{۱۰۰k^۳ + ۱۳۵k^۲ + ۵۳k + ۶}{۶}$$

فرایند محاسبهٔ دستور بالا نسبتاً پیچیده است و در اینجا از ذکر آن صرف‌نظر می‌کنیم. ولی وقتی که فرمول را بدانیم می‌توانیم آن را به استقرا ثابت کنیم. ابتدا فرمول را به‌ازای $k = ۱$ بررسی می‌کنیم (چون قبلاً $N_{۲۵}(۵۰)$ را به‌دست آورده‌ایم بررسی درستی فرمول در این حالت آسان است). سپس ثابت می‌کنیم که اگر فرمول به‌ازای k درست باشد به‌ازای $k + ۱$ هم درست است. به این ترتیب، درستی فرمول به‌ازای همهٔ عددهای طبیعی ثابت می‌شود. [رابطهٔ

$$N_{۲۵}(۵۰(k + ۱)) = N_{۱۰}(۵۰(k + ۱)) + N_{۱۰}(۵۰k + ۲۵) + N_{۲۵}(۵۰k)$$

درگام استقرایی به‌کار می‌آید.]

۱۷.۴ جدول زیر سودمند است:

$$
\begin{array}{ll}
۱ + ۱ + ۷۲ = ۷۴ & ۷۲ = ۱ \times ۱ \times ۷۲ \\
۱ + ۲ + ۳۶ = ۳۹ & ۷۲ = ۱ \times ۲ \times ۳۶ \\
۱ + ۳ + ۲۴ = ۲۸ & ۷۲ = ۱ \times ۳ \times ۲۴ \\
۱ + ۴ + ۱۸ = ۲۳ & ۷۲ = ۱ \times ۴ \times ۱۸ \\
۱ + ۶ + ۱۲ = ۱۹ & ۷۲ = ۱ \times ۶ \times ۱۲ \\
۱ + ۸ + ۹ = ۱۸ & ۷۲ = ۱ \times ۸ \times ۹ \\
۲ + ۲ + ۱۸ = ۲۲ & ۷۲ = ۲ \times ۲ \times ۱۸ \\
۲ + ۳ + ۱۲ = ۱۷ & ۷۲ = ۲ \times ۳ \times ۱۲ \\
۲ + ۴ + ۹ = ۱۵ & ۷۲ = ۲ \times ۴ \times ۹ \\
۲ + ۶ + ۶ = ۱۴ & ۷۲ = ۲ \times ۶ \times ۶ \\
۳ + ۳ + ۸ = ۱۴ & ۷۲ = ۳ \times ۳ \times ۸ \\
۳ + ۴ + ۶ = ۱۳ & ۷۲ = ۳ \times ۴ \times ۶
\end{array}
$$

می‌دانیم که سام حاصل‌ضرب سن پسرها را، که ۷۲ است، می‌داند. او همچنین مجموع سن پسرها را، که ما نمی‌دانیم، می‌داند. اما می‌دانیم که مسأله سیاله است. در جدول بالا همهٔ راههای نوشتن ۷۲ به صورت حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی را نوشته‌ایم. همچنین در هر سطر مجموع سه عدد طبیعی متناظر را نوشته‌ایم. اکنون توجه کنید که ۱۴ تنها مجموعی است که بیش از یک‌بار حاصل شده است. اگر شمارهٔ خیابان هر یک از عددهای دیگر بود، سام اطلاعات کافی برای دریافتن سن پسرها داشت. پس شمارهٔ خیابان ۱۴ است و دوست او سه پسر به سنهای ۲، ۶، ۶ یا ۳، ۳، ۸ دارد. اما دوست سام گفته است که امید دارد روزی پسر بزرگش فوتبالیست شود. پس یکی از پسرها بزرگتر از دو پسر دیگر است. و نتیجه می‌شود که سن پسرها ۳، ۳، ۸ است.

۱۹.۴ این مسأله مانند مسألهٔ قبل حل می‌شود.

۲۵.۴ «به هیچ‌وجه با شما موافق نیستم.»

۲۷.۴ ابتدا توجه کنید که تجزیهٔ ۳۲۱۱۸ به عاملهای اول به‌صورت $۱۰۱ \times ۵۳ \times ۳ \times ۲$ است. از جملهٔ سوم درمی‌یابیم که $C \geqslant ۲$. چون $C < A < ۱۰۰$، فقط ۵۳ را می‌توانیم برای A بپذیریم. از طرف دیگر، چند انتخاب موجه برای C و l داریم که عبارت‌اند از

$$
\begin{array}{ll}
C = ۲, & l = ۳۰۳ \\
C = ۳, & l = ۲۰۲ \\
C = ۶, & l = ۱۰۱
\end{array}
$$

۲۹.۴ درست بعد از ساعت ۱۲ عقربه‌ها شروع به حرکت می‌کنند. ولی چون عقربهٔ دقیقه‌شمار سریعتر از عقربهٔ ساعت شمار حرکت می‌کند، تا وقتی که عقربهٔ دقیقه‌شمار یک دورکامل بزند عقربه‌ها بر هم منطبق نمی‌شوند. اکنون عقربهٔ ساعت‌شمار روی ۱ است. عقربه‌ها به حرکت ادامه می‌دهند و این‌بار عقربهٔ دقیقه‌شمار عقبتر از عقربهٔ ساعت‌شمار است. پیش از اینکه عقربهٔ دقیقه‌شمار یک دور

دیگر بزند، عقربه‌ها باید بر هم منطبق شوند. در این لحظه عقربهٔ دقیقه‌شمار یک دور کامل و کسری از یک دور، مثلاً λ، طی کرده است. در این مدت، عقربهٔ ساعت‌شمار فقط کسر λ از یک دور کامل را طی کرده است. چون عقربهٔ دقیقه‌شمار ۱۲ بار سریعتر از عقربهٔ ساعت‌شمار حرکت می‌کند،

$$۱ + \lambda = ۱۲\lambda$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که λ برابر $\frac{۱}{۱۱}$ دور کامل است. یک ساعت طول می‌کشد تا عقربهٔ دقیقه‌شمار یک دور کامل طی کند. پس بعد از یک ساعت و $\frac{۶۰}{۱۱}$ دقیقه عقربه‌ها دوباره بر هم منطبق می‌شوند.

۳۱.۴ توجه کنید که

$$CRUDE = C \times ۱۰۰۰۰ + RUDE$$

پس می‌توانیم $RUDE$ را از دو طرف معادله حذف کنیم:

$$NUDE + NOT + NOR = C \times ۱۰۰۰۰$$

از طرف دیگر، سمت چپ معادلهٔ بالا از ۱۲۰۰۰ کوچکتر است. پس C برابر ۱ است. پس می‌توان نوشت

$$NUDE + NOT + NOR = ۱۰۰۰۰$$

اگر N برابر با ۷ یا کوچکتر از ۷ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} NUDE + NOT + NOR &< ۸۰۰۰ + ۸۰۰ + ۸۰۰ \\ &= ۹۶۰۰ \\ &< ۱۰۰۰۰ \end{aligned}$$

بنابراین N باید ۸ یا بزرگتر از ۸ باشد. از طرف دیگر، $N = ۹$ بیش از حد بزرگ است، چون

$$\begin{aligned} NUDE + NOT + NOR &> ۹۰۰۰ + ۹۰۰ + ۹۰۰ \\ &= ۱۰۸۰۰ \\ &> ۱۰۰۰۰ \end{aligned}$$

پس $N = ۸$.

با توجه به این، جوابهای زیادی وجود دارد، از جمله

$$۸۳۵۰ + ۸۲۴ + ۸۲۶ = ۱۰۰۰۰$$

$$۸۲۵۱ + ۸۷۳ + ۸۷۶ = ۱۰۰۰۰$$

$$۸۲۱۳ + ۸۹۰ + ۸۹۷ = ۱۰۰۰۰$$

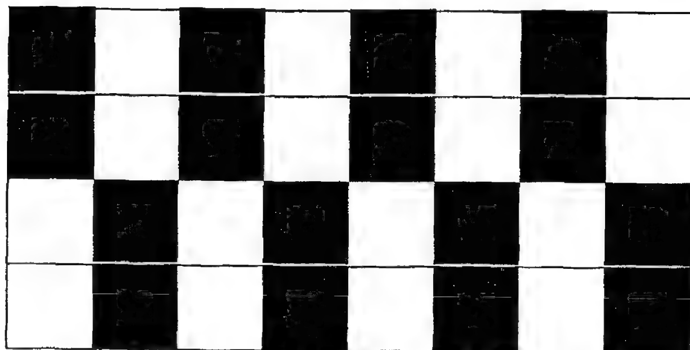
۳۳.۴ هر ساعت قایقها ۱۷ + ۱۲، یعنی ۲۹ مایل به هم نزدیک می‌شوند. پس قایقها هر دقیقه $\frac{۲۹}{۶۰}$ مایل به هم نزدیک می‌شوند. پس یک دقیقه پیش از برخورد، قایقها $\frac{۲۹}{۶۰}$ مایل از هم فاصله داشته‌اند.

۳۵.۴ برای ساده شدن استدلال، فرض می‌کنیم از هر مایع یک واحد داریم. همچنین فرض می‌کنیم که A حاوی آب و B حاوی اسید باشد. بعد از پس و پیش کردن مایعها مطابق مسأله، باز هم هریک از دو ظرف حاوی یک واحد از مخلوط مایعهاست. r را مقدار آب در ظرف B بگیرید. دراین صورت ظرف B حاوی $r-۱$ واحد اسید است. چون ابتدا یک واحد اسید داشتیم، باقی‌ماندهٔ اسید، یعنی $(r-۱)-۱$، یا r، باید در ظرف A باشد. پس همان مقدار اسید در ظرف A هست که آب در ظرف B است.

۳۷.۴ با کمتر از شش برش نمی‌توانیم مکعب را به ۲۷ مکعب کوچکتر تقسیم کنیم. فرض کنید به روشی مکعب را به ۲۷ مکعب کوچکتر با اندازهٔ یکسان تقسیم کرده باشیم. فرض کنید مکعبهای کوچکتر هنوز در محل اولیهٔ خود به‌صورت بخشی از مکعب بزرگتر قرار داشته باشند. یکی از این مکعبها کاملاً در مرکز مکعب بزرگ است و هر یک از مکعبهای دیگر دست‌کم یک وجه دارند که بخشی از یک وجه مکعب اصلی است. همهٔ وجه‌های مکعب درونی باید در مسیر برش باشند. این مکعب شش وجه دارد و دست‌کم شش برش لازم داریم.

۳۹.۴ این فرض که هر دو بار دانشمندان راست می‌گفته‌اند نادرست است و از فرضی نادرست هر چیزی را می‌توانیم نتیجه بگیریم.

۴۱.۴ صفحهٔ شطرنجی را به صورت زیر رنگ می‌کنیم:



اگر اسب بتواند از همهٔ خانه‌ها دقیقاً یک‌بار بگذرد و دوباره به خانهٔ اول برگردد، نباید اینکه حرکت را ازکدام خانه شروع می‌کند مهم باشد. اگر چنین دوری با شروع از یک خانه وجود داشته باشد، با شروع از هر خانهٔ دیگری هم وجود دارد.
فرض کنید حرکت اسب از خانهٔ سمت چپ پایین صفحهٔ شطرنجی شروع شود. این خانه سفید است. فقط دو خانه هست که اسب می‌تواند به آنها برود. پس اگر بتوانیم یک دورکامل را طی کنیم،

اسب باید ازیکی از این دو خانه به خانهٔ اول برگردد. یکی از این دو خانه را برای شروع حرکت و خارج شدن ازگوشهٔ صفحه لازم داریم. توجه کنید که این دو خانه هر دو سفیدند. پس حرکت اول به خانهٔ سفید و حرکت آخر از خانهٔ سفید انجام می‌شود. بین حرکت اول و حرکت آخر اسب باید دقیقاً یک بار در هر یک از خانه‌های سیاه قرارگیرد. ولی توجه کنید که فقط در دو ردیف وسط اسب می‌تواند از خانه‌ای سفید به خانه‌ای سیاه، یا برعکس، برود. چون اولین و آخرین حرکت هر دو از خانه‌های سفیدند، اولین و آخرین خانهٔ سیاهی که اسب در آنها قرار می‌گیرد باید در دو ردیف وسط باشند. ۸ خانهٔ سیاه در ردیف پایین و ردیف بالا هستند. هر بارکه اسب در یکی از این خانه‌ها قرارگیرد، حرکت بعدی به خانه‌ای سیاه در یکی از دو ردیف وسط خواهد بود (اینها تنها حرکتهای ممکن‌اند). پس برای اینکه اسب در همهٔ خانه‌های سیاه ردیفهای بالا و پایین قرارگیرد باید ۹ خانهٔ سیاه در دو ردیف وسط داشته باشیم. یکی برای شروع و یکی برای هر بارکه اسب در یکی از خانه‌های سیاه ردیفهای بالا و پایین قرارگیرد. ولی فقط ۸ خانهٔ سیاه در دو ردیف وسط داریم. پس جواب مسأله منفی است. ولی حرکت به‌گونه‌ای که اسب دقیقاً یک بار در هر یک از خانه‌ها قرار گیرد ممکن است. یافتن راه حل را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. فقط به خاطر داشته باشید که در این حالت خانه‌ای که حرکت از آن شروع می‌شود مهم است.

۴۳.۴ می‌توان از او پرسید که مرد است یا نه. اگر سرش را با حرکت چپ به راست تکان دهد می‌فهمیم که از آن قبیله است. هر حرکت دیگر سرش نشان می‌دهد که از آن قبیله نیست.

۴۷.۴ پیش از شروع حل مسأله به چند نماد نیاز داریم. چهار نفر را با A، B، C و D نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم

$$P(X) = \mathbf{Pr}\{\text{کارتی با شمارهٔ بزرگتر از ۱۰ نداشته باشد } X\}$$

$$P(X,Y) = \mathbf{Pr}\{\text{و } Y \text{ هیچ‌یک کارتی با شمارهٔ بزرگتر از ۱۰ نداشته باشند } X\}$$

همچنین P را احتمال این بگیرید که دست‌کم یک نفرکارتی با شمارهٔ بزرگتر از ۱۰ نداشته باشد. به نظر معقول می‌رسد که

$$P = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$$

ولی این معادله کمی تصحیح لازم دارد. با بررسی طرف راست معادلهٔ بالا می‌بینیم که $P(A,B)$ دوبار حساب شده است، یک‌بار در $P(A)$ و یک‌بار در $P(B)$. همچنین $P(B,C)$، ... دوبار حساب شده‌اند. برای تصحیح این اشتباه، باید هر یک از ترکیبهای $P(X,Y)$ را یک بارکم کنیم. اکنون می‌توان نوشت

$$P = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A,B) - \cdots - P(C,D)$$

چون ممکن نیست بیشتر از دو نفر کارت بزرگتر از ۱۰ نداشته باشند، جملهٔ دیگری لازم نیست و برابری بالا صحیح است. توجه کنید که همهٔ $P(X)$ها با هم برابرند. همچنین همهٔ ترکیبهای مختلف $P(X,Y)$ با هم برابرند. پس می‌توانیم بنویسیم

$$P = ۴P(A) - ۶P(A,B) \qquad (۲.۴)$$

از $\binom{۵۲}{۱۳}$ راه مختلف برای دادن ۱۳ کارت، در $\binom{۳۶}{۱۳}$ تا از آنها کارتی با شمارهٔ بزرگتر از ۱۰ نیست. پس

$$P(A) = \frac{\binom{۳۶}{۱۳}}{\binom{۵۲}{۱۳}}$$

اگر A کارتی با شمارهٔ بزرگتر از ۱۰ نداشته باشد، $\binom{۲۳}{۱۳}$ راه مختلف برای دادن ۱۳ کارت به B که شمارهٔ هیچ کدام بزرگتر از ۱۰ نباشد وجود دارد. پس

$$P(A,B) = \frac{\binom{۳۶}{۱۳}\binom{۲۳}{۱۳}}{\binom{۵۲}{۱۳}\binom{۳۹}{۱۳}}$$

با قرار دادن این مقادیر در (۲.۴) به‌دست می‌آوریم

$$P = ۴\frac{\binom{۳۶}{۱۳}}{\binom{۵۲}{۱۳}} - ۶\frac{\binom{۳۶}{۱۳}\binom{۲۳}{۱۳}}{\binom{۵۲}{۱۳}\binom{۳۹}{۱۳}} \approx ۰{,}۰۱۴۵۵۲۸$$

فصل ۵

ریاضیات در سرگرمیها

۱.۵ مجموع همهٔ مربعها از ۱ تا ۲۷ برابر است با ۶۹۳۰، یا ۲۳۱۰×۳. پس وزن هر زیرمجموعه باید ۲۳۱۰ باشد. یکی از جوابهای ممکن که با کامپیوتر به‌دست آمده است چنین است:

$$۲۳۱۰ = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲ + ۶^۲ + ۷^۲ + ۸^۲$$
$$+ ۹^۲ + ۱۰^۲ + ۱۱^۲ + ۱۳^۲ + ۱۴^۲ + ۱۵^۲ + ۱۸^۲ + ۱۹^۲ + ۲۳^۲$$

$$۲۳۱۰ = ۱۲^۲ + ۱۷^۲ + ۲۴^۲ + ۲۵^۲ + ۲۶^۲$$

$$۲۳۱۰ = ۱۶^۲ + ۲۰^۲ + ۲۱^۲ + ۲۲^۲ + ۲۷^۲$$

۳.۵ یکی از راه‌کارهای ممکن این است که همهٔ بنزین لازم را در ۵ مرحلهٔ ۱۰۰ مایلی حمل کنیم. توجه کنید که جیپ می‌تواند بدون سوختگیری بین راه، از نقطهٔ شروع به انتهای ۱۰۰ مایل اول برود و برگردد. پس در هر مرحله ۴ بشکهٔ بنزین لازم است تا سه بشکه به انتهای مرحله حمل

شود (بشکهٔ چهارم به عنوان سوخت جیپ مصرف می‌شود). ابتدا همهٔ بنزین موردنظر به انتهای مرحلهٔ اول حمل می‌شود. توجه کنید که وقتی همهٔ بنزین موردنظر به این نقطه حمل شود، نیمی از باک جیپ هنوز پر است. باک بنزین را پر کنید (پس اکنون بشکه‌ای داریم که فقط ۵ گالن بنزین دارد) و همین کار را برای رساندن بنزین به انتهای مرحلهٔ دوم و غیره تکرار کنید. می‌توان تعداد گالنهای بنزین لازم را برای اینکه دقیقاً ۱۰۰ گالن بنزین به انتهای آخرین مرحله حمل شود به دقت شمرد: در ابتدا ۴۳۰ گالن بنزین لازم داریم (به فرض اینکه باک بنزین جیپ خالی باشد؛ اگر پر باشد فقط ۴۲۰ گالن بنزین لازم داریم)؛ در پایان مرحلهٔ اول ۳۲۰ گالن، در پایان مرحلهٔ دوم ۲۳۵ گالن، در پایان مرحلهٔ سوم ۱۸۰ گالن، در پایان مرحلهٔ چهارم ۱۳۵ گالن و در پایان مرحلهٔ پنجم ۱۰۰ گالن بنزین داریم.

۹.۵ مربع وفقی ۳ × ۳ای را درنظر بگیرید. همهٔ درایه‌ها را در ۲ ضرب و سپس از همهٔ آنها ۱ را کم کنید. مربعی وفقی به‌دست می‌آورید که درایه‌هایش اولین نُه عدد طبیعی فردند.

۱۱.۵ فرض کنید $a+1$، $a+2$، ...، $a+9$ دنباله‌ای دلخواه از نُه عدد صحیح متوالی باشد. مربع وفقی ۳ × ۳ای را درنظر بگیرید و به همهٔ درایه‌های آن a را اضافه کنید. مربعی وفقی به‌دست می‌آورید که درایه‌هایش $a+1$، $a+2$، ... و $a+9$ هستند.

۱۳.۵ در مورد ۱۲ دانه مروارید، در هر کفه چهار مروارید بگذارید. یکی از کفه‌ها با دو کفهٔ دیگر هم‌وزن نیست. پس مروارید استثنایی بین چهار مروارید این کفه است. اکنون سه دانه از این مرواریدها را با هم مقایسه کنید و مروارید چهارم را در دستتان نگاه دارید. اگر یکی از کفه‌ها با دو کفهٔ دیگر هم‌وزن نباشد حاوی مروارید استثنایی است. اگر سه کفه هم‌وزن باشند، مروارید استثنایی همان است که در دستتان دارید.

در مورد ۱۵ مروارید، باز هم در هر کفه چهار مروارید بگذارید. اگر کفه‌ها در تعادل باشند مروارید استثنایی یکی از سه مروارید باقی‌مانده است و می‌توان آن را با یک‌بار توزین پیدا کرد. اگر سه کفه با هم در تعادل نباشند مانند حالت ۱۲ مروارید عمل می‌کنید.

۱۵.۵ تنها مربعهای لاتین ۲ × ۲ عبارت‌اند از

$$\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix} \quad \text{و} \quad \begin{matrix} b & a \\ a & b \end{matrix}$$

که در آنها a و b دلخواه‌اند.

دوازده مربع لاتین ۳ × ۳ وجود دارد که مربعهایی هستند که توسط همهٔ جایگشتهای $\{a, b, c\}$ در

$$\begin{matrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{matrix} \quad \text{و} \quad \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{matrix}$$

تولید می‌شوند. توجه کنید که بدون اینکه از کلیت استدلال کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که سطر اول

$$a \quad b \quad c$$

است. دراین صورت در سطر دوم فقط دو جا برای قرار دادن a داریم و وقتی جای a تعیین شود، جای b و c خودبه‌خود مشخص می‌شود. پس تا جایی که به‌جایگشتهای $\{a, b, c\}$ مربوط است فقط دو حالت ممکن است.

برای یافتن کران بالایی برای تعداد مربعهای لاتین ۸ × ۸ می‌توانیم چنین عمل کنیم. !۸ آرایش برای سطر اول وجود دارد (همهٔ جایگشتهای ۸ شیء). اگر یکی از این آرایشها مفروض باشد، !۷ آرایش برای ستون اول وجود دارد (جایگشتهای ۷ شیء، چون شیئی که گوشهٔ سمت چپ بالا را اشغال کرده قبلاً تثبیت شده است). سپس وقتی که آرایش سطر اول و ستون اول را داشته باشیم، !۷ طریق برای آرایش سطر دوم، و سپس !۶ طریق برای آرایش ستون دوم وجود دارد. اگر همین شیوه را تکرار کنیم، درمی‌یابیم که کران بالایی برای تعداد مربعهای لاتین ۸ × ۸ عدد زیر است:

$$۸!۷!۷!۶!۶!۵!۵!۴!۴!۳!۳!۲!۲! = ۶۳۴۱۵۳۰۰۸۰۰۹۹۷۴۹۰۶۸۸ \times ۱۰^{۷}$$

این کران درواقع بسیار بی‌دقت است. تعداد واقعی مربعهای لاتین ۸ × ۸ عدد زیر است:

$$۱۰۸۷۷۶۰۳۲۴۵۹۰۸۲۹۵۶۸۰۰$$

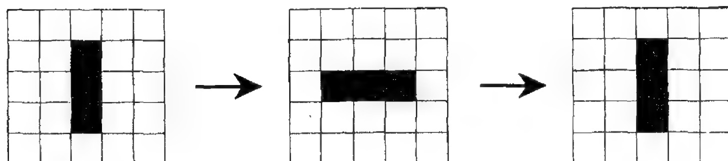
که بسیار کوچکتر از کرانی است که به‌دست آوردیم، ولی اثبات این واقعیت بسیار دشوار است. به آسانی می‌توان کران پایینی یافت. همهٔ امکانات هر سطر را می‌شماریم. اشیا را a، b، c، d، e، f، g و h بنامید. برای سطر اول آشکارا !۸ آرایش داریم (همهٔ طرق جابه‌جاکردن ۸ عنصر). باید ببینیم به‌ازای هر آرایش سطر اول چند طریق برای آرایش سطر دوم داریم. در سطر دوم شیءِ a را در ۷ محل می‌توان قرار داد (همهٔ محلها غیر از آنکه a در سطر اول اشغال کرده است). به‌ازای هر محلی که a اشغال کند دست‌کم ۶ محل برای قرار دادن شیءِ b وجود دارد (همهٔ محلها غیر از آنکه b در سطر اول اشغال کرده است و آنکه قبلاً به a اختصاص دادیم). توجه کنید که اگر در سطر دوم a را در همان ستونی قرار دهیم که در سطر اول b در آن قرار دارد، در سطر دوم b را می‌توانیم در ۷ محل مختلف قرار دهیم. پس ۶ کران پایینی است. به‌ازای هر دو محلی که a و b اشغال کنند، دست‌کم ۵ محل برای قرار دادن شیءِ c وجود دارد (همهٔ محلها غیر از آنکه در سطر اول c اشغال کرده است و محلهایی که قبلاً به a و b اختصاص داده‌ایم). باز هم حالتهایی هست که c درواقع می‌تواند ۶ محل مختلف را اشغال کند. با تکرار این شیوه می‌بینیم که به‌ازای هر آرایش سطر اول دست‌کم !۷ آرایش برای سطر دوم وجود دارد. به همین شیوه می‌توانیم در مورد سطرهای ۳ تا ۸ استدلال کنیم و دریابیم که به‌ازای هر آرایش سطرهای اول و دوم دست‌کم !۶ آرایش برای سطر سوم وجود دارد؛ به‌ازای هر آرایش سطرهای اول، دوم و سوم، دست‌کم !۵ آرایش برای سطر چهارم وجود دارد؛ و غیره. پس دست‌کم

$$۸!۷!۶!۵!۴!۳!۲! = ۵۰۵۶۵۸۴۷۴۴۹۶۰۰۰۰$$

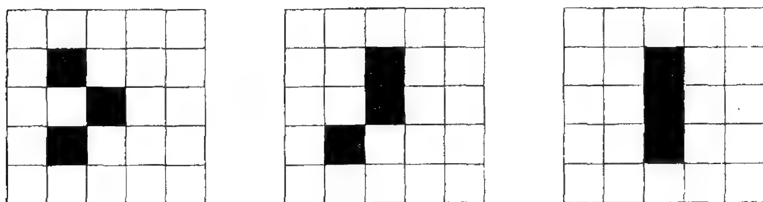
مربع لاتین ۸ × ۸ مختلف داریم.

برای آگاهی یافتن بیشتر دربارهٔ مربعهای لاتین [BAL, p · 189ff.] را ببینید.

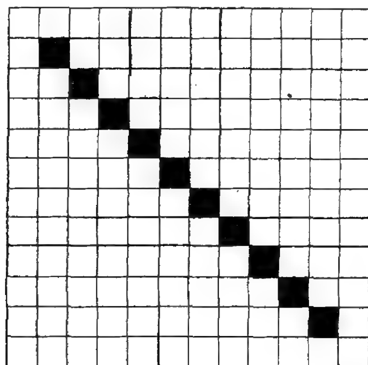
۱۷.۵ یکی از آرایشهایی که جمعیت متناوب تولید می‌کند چنین است:



داشتن جمعیت ثابت فقط درصورتی ممکن است که تعداد افراد نامتناهی باشد. اگر فقط یک یا دو مربع داشته باشیم، ساکنانش می‌میرند. اگر تعداد مربعها بیشتر از دو تا باشد به آسانی می‌توانید بررسی کنید که اگر شخصی سه همسایه داشته باشد حتماً فرد جدیدی به جمعیت اضافه می‌شود. پس برای اینکه آرایشی ثابت بماند، هر فردی باید حداکثر دو همسایه داشته باشد. از طرف دیگر، آرایشهای زیر نیز جمعیت را افزایش می‌دهند:

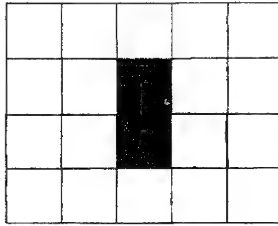


پس تنها امکان این است که مربعها آرایشی روی خط قطری داشته باشند:

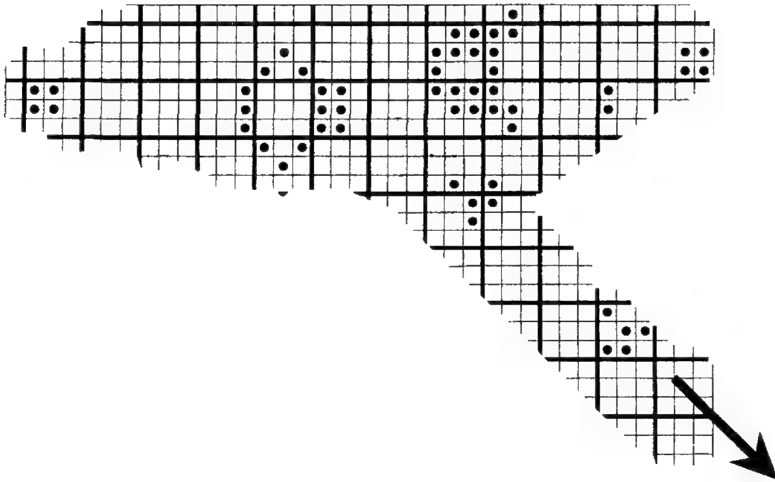


ولی مربعهای انتهایی از تنهایی می‌میرند (البته مگر اینکه خط انتهایی نداشته باشد، که مستلزم وجود جمعیت نامتناهی است).

یکی از آرایشهای جمعیتی که بی‌درنگ می‌میرد چنین است:



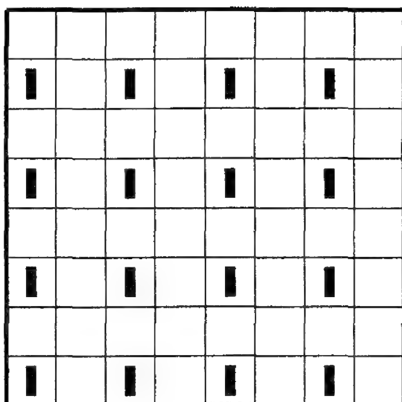
آرایشهایی وجود دارد که بی‌کران بزرگ می‌شوند. یکی از این آرایشها را ب. و. گاسپر در سال ۱۹۷۰ یافت. این آرایش چنین است:



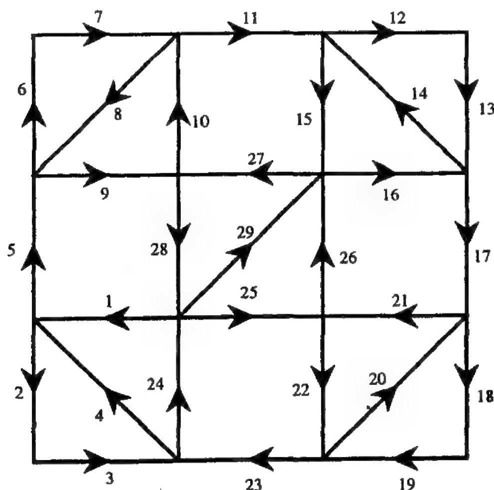
خواننده می‌تواند تحقیق کند که هر ۳۰ نسل یک‌بار زائدهٔ جدیدی در جهت جنوب شرقی ایجاد می‌شود. برای اطلاعات بیشتر در مورد «بازی زندگی» و بازیهای دیگر به کتاب راههای بردن نوشتهٔ الوین ر. برلکامپ، جان ه. کانوی و ریچارد ک. گای مراجعه کنید.

۱۹.۵ بز را به طرف دیگر ببرید، برگردید، گرگ را به طرف دیگر ببرید و بز را برگردانید. بعد کلمها را به طرف دیگر ببرید و پیش گرگ بگذارید. سرانجام برگردید و بز را ببرید. کار تمام است.

۲۱.۵ حداکثر می‌توانیم ۱۶ شاه در صفحه بگذاریم. توجه کنید که در هر ردیف بیشتر از ۴ شاه نمی‌توانیم بگذاریم. اگر در یک ردیف ۴ شاه داشته باشیم در ردیف بعد هیچ شاهی نباید باشد و اگر در سطری ۳ شاه داشته باشیم در سطر بعد فقط یک شاه می‌توانیم بگذاریم. بنابراین، بیشتر از ۱۶ شاه نمی‌توانیم در صفحه بگذاریم. یکی از آرایشهای ممکن برای گذاشتن ۱۶ شاه چنین است:



۲۳.۵ توجه کنید جز دو رأس مرکزی که پنج یال دارند، همهٔ رأسها تعدادی زوج یال دارند. پس باید از یکی از این رأسهای پنج یالی حرکت کنیم و در آخر به رأس پنج یالی دیگر برسیم. یکی از مسیرهای ممکن به شکل زیر است؛ عددها ترتیب پیمودن یالها را نشان می‌دهند.



۲۵.۵ گام ۱: ظرفهای ۵ اونسی و ۱۱ اونسی را از مایع پر کنید. توجه کنید که دقیقاً (۱۱ + ۵) − ۲۴، یعنی ۸ اونس از مایع در ظرف اصلی باقی مانده است.

گام ۲: مایع درون ظرف ۵ اونسی را کاملاً در ظرف ۱۳ اونسی بریزید و بقیهٔ ظرف ۱۳ اونسی را از ظرف ۱۱ اونسی پر کنید. توجه کنید که دقیقاً (۵ − ۱۳) − ۱۱، یعنی ۳ اونس از مایع در ظرف ۱۱ اونسی مانده است.

گام ۳: از ظرف ۱۳ اونسی آنقدر مایع در ظرف ۵ اونسی بریزید که این ظرف پر شود و سپس

مایع درون ظرف ۵ اونسی را در ظرف ۱۱ اونسی خالی کنید. اکنون ۸ اونس مایع در ظرف اصلی، ۸ اونس مایع در ظرف ۱۱ اونسی و ۸ اونس مایع در ظرف ۱۳ اونسی است.

۲۷.۵ عناصر ماتریس را با a_{ij}، $1 \leqslant i \leqslant k$ و $1 \leqslant j \leqslant m$، نشان می‌دهیم. فرض کنید r_i حاصل‌ضرب همهٔ درایه‌های سطر iام و c_j حاصل‌ضرب همهٔ درایه‌های ستون jام باشد. یعنی

$$r_i = a_{i1} \times a_{i2} \times \cdots \times a_{im}, \quad c_j = a_{1j} \times a_{2j} \times \cdots \times a_{kj}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned} & c_1 \times c_2 \cdots c_m \times r_1 \times r_2 \times r_k \\ &= (a_{11} \times a_{21} \cdots a_{k1}) \times (a_{12} \times a_{22} \cdots a_{k2}) \cdots (a_{1m} \times a_{2m} \cdots a_{km}) \\ &\quad \times (a_{11} \times a_{12} \cdots a_{1m}) \times (a_{21} \times a_{22} \cdots a_{2m}) \cdots (a_{k1} \times a_{k2} \cdots a_{km}) \\ &= \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

بنابراین، اگر بخواهیم c_j و r_i به‌ازای هر i و j برابر با -1 باشند، $k+m$ باید عددی زوج باشد. پس اگر $k+m$ فرد باشد، هیچ ماتریس $k \times m$ از این نوع وجود ندارد.

وقتی $k+m$ زوج است، می‌توانیم چنین عمل کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که برای هر سطر 2^m امکان داریم (چون برای هر درایه ۲ امکان، و m درایه داریم). این نتیجه بدون درنظر گرفتن این نکته است که می‌خواهیم حاصل‌ضرب درایه‌ها سطرها (یعنی r_iها) برابر با -1 باشد. برای چند تا از آنها $r_i = -1$؟ دقیقاً برای نصف آنها (ممکن است لازم باشد کمی فکر کنید، ولی توجه کنید که برای هر ترکیبی که به‌ازای آن r_i برابر با ۱ باشد ترکیب دیگری داریم که به‌ازای آن r_i برابر با -1 است . کافی است همهٔ درایه‌ها را در -1 ضرب کنید. بنابراین، ترکیبهایی که به‌ازای آنها r_i برابر با ۱ است با ترکیبهایی که به‌ازای آنها r_i برابر با -1 است تناظر یک‌به‌یک دارند). بنابراین، $\frac{2^m}{2}$ یعنی 2^{m-1} امکان برای هر سطر داریم.

اکنون می‌توانیم $k-1$ سطر اول را به دلخواه بنویسیم و برای این کار روی‌هم رفته $(2^{m-1})^{k-1}$ امکان داریم. اکنون توجه کنید که در سطر آخر انتخابی نداریم، چون باید مطمئن شویم که در هر ستون c_j برابر با -1 است. تا اینجا

$$\begin{aligned} c_j &= -1, \quad j = 1, 2, \ldots, m \\ r_i &= 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

اکنون بنابر دستور بالا و با توجه به این نکته که اگر $k+m$ زوج باشد، $k+m-1$ فرد است، نتیجه می‌گیریم

$$c_1 \times c_2 \cdots c_k \times r_1 \times r_2 \cdots r_m = (-1)^{k+m-1} \times r_k = -r_k = 1$$

بنابراین باید $r_k = -1$. پس تعداد کلِّ ماتریسهای $k \times m$ از این نوع برابر است با

$$\begin{cases} 2^{(k-1)(m-1)} & \text{اگر } k+m \text{ زوج باشد} \\ 0 & \text{اگر } k+m \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

فصل ۶

جبر و آنالیز

۱.۶ می‌توانیم چنین عمل کنیم:

$$\begin{aligned}(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \\ &= 1-a-b-c-d+ab+ac+ad+bc+bd+cd \\ &\quad -abc-abd-acd-bcd+abcd \\ &= 1-a-b-c-d+ab(1-c)+bc(1-d)+cd(1-a) \\ &\quad +ad(1-b)+ac+bd+abcd \\ &\geqslant 1-a-b-c-d\end{aligned}$$

چون $0 \leqslant a,b,c,d \leqslant 1$ مستلزم این است که

$$ab(1-c)+bc(1-d)+cd(1-a)+ad(1-b)+ac+bd+abcd \geqslant 0$$

۳.۶ فرض کنید

$$M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

که در آن $n > 1$. فرض کنید k بزرگترین عدد صحیحی باشد که $2^k \leqslant n$. توجه کنید که $k \geqslant 1$. بنابر تعریف k باید

$$2^k \leqslant n < 2^{k+1}$$

اکنون توجه کنید که هیچ‌یک از عددهای 2^k+1، 2^k+2، ... و n بر 2^k بخش‌پذیر نیست (اگر یکی از این عددها بر 2^k بخش‌پذیر باشد، این عدد باید به شکل $\ell 2^k$ باشد که در آن $\ell \geqslant 2$،

ولی دراین صورت باید $n \geqslant ۲^k \times ۲$ که خلاف انتخاب k است). پس فقط یکی از مخرجها در سمت راست

$$M = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$$

بر ۲^k بخش‌پذیر است. اکنون فرض کنید D کوچکترین مضرب مشترک عددهای ۱، ۲، ۳، ... و n باشد. توجه کنید که D بر ۲^k بخش‌پذیر است ولی بر $۲^{k+۱}$ بخش‌پذیر نیست. سمت راست رابطهٔ بالا را با مخرج مشترک می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} M &= ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n} \\ &= \frac{D + D/۲ + D/۳ + \cdots + D/۲^k + \cdots + D/n}{D} \end{aligned}$$

سرانجام توجه کنید که در صورت عبارت کسری اخیر، همهٔ جمعوندها جز $\frac{D}{۲^k}$ زوج‌اند. پس صورت این عبارت فرد است (چون مجموع عددهای زوج، زوج است و مجموع عددی زوج با عددی فرد، فرد است)، درحالی‌که مخرج آن زوج است (چون D بر ۲^k بخش‌پذیر است). اما حاصل تقسیم عددی فرد بر عددی زوج عددی صحیح نیست. پس ممکن نیست M عددی صحیح باشد.

۵.۶ می‌توانیم قضیهٔ دوجمله‌ای را به صورت زیر به‌کار گیریم:

$$\begin{aligned} & ۱۱^{۱۰} - ۱ \\ &= (۱۰ + ۱)^{۱۰} - ۱ \\ &= \left[\binom{۱۰}{۰}۱۰^{۱۰} + \binom{۱۰}{۱}۱۰^{۹} + \cdots + \binom{۱۰}{۸} \times ۱۰۰ \right. \\ &\qquad \left. + \binom{۱۰}{۹} \times ۱۰ + ۱\right] - ۱ \\ &= \left[\binom{۱۰}{۰}۱۰^{۱۰} + \binom{۱۰}{۱}۱۰^{۹} + \cdots + \binom{۱۰}{۸} \times ۱۰۰ + ۱۰ \times ۱۰\right] \\ &= ۱۰۰\left[\binom{۱۰}{۰}۱۰^{۸} + \binom{۱۰}{۱}۱۰^{۷} + \cdots + \binom{۱۰}{۸} + ۱\right] \end{aligned}$$

۷.۶ به آسانی می‌توان با ماشین‌حساب بررسی کرد که

$$\left(\frac{۹۹}{۱۰۱}\right)^{۵۰} + \left(\frac{۱۰۰}{۱۰۱}\right)^{۵۰} < ۱ = \left(\frac{۱۰۱}{۱۰۱}\right)^{۵۰}$$

بنابراین چون به‌ازای هر $N \geqslant ۰$،

$$\left(\frac{۹۹}{۱۰۱}\right)^{N} \leqslant \left(\frac{۹۹}{۱۰۱}\right)^{۵۰}$$

و

$$\left(\frac{۱۰۰}{۱۰۱}\right)^N \leqslant \left(\frac{۱۰۰}{۱۰۱}\right)^{۵۰}$$

پس

$$\left(\frac{۹۹}{۱۰۱}\right)^N + \left(\frac{۱۰۰}{۱۰۱}\right)^N < ۱ = \left(\frac{۱۰۱}{۱۰۱}\right)^N$$

که اگر دو طرف را در ۱۰۱^N ضرب کنیم تبدیل می‌شود به

$$۹۹^N + ۱۰۰^N < ۱۰۱^N$$

به‌خصوص به‌ازای هر $N \geqslant ۱۰۰۰$ این نابرابری درست است.

۹.۶ برای شمردن ۷ها می‌توانیم چنین عمل کنیم:

۱ در هر ۱۰ عدد، در موضع یکان .... $۱۰^۷$

۱۰ در هر ۱۰۰ عدد، در موضع دهگان .... $۱۰^۷$

⋮

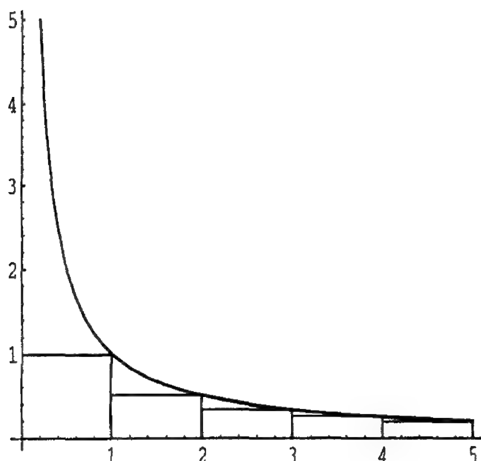
$۱۰^۶$ در هر $۱۰^۷$ عدد، در موضع میلیونگان ...... $۱۰^۷$

جمع .... ۷×۱۰^۷

۱۱.۶ $\ln n$ مساحت زیر منحنی $y = \frac{۱}{x}$ بین $x = ۱$ و $x = n$ است. مجموع

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$$

مساحت مستطیلهای زیر منحنی در شکل زیر است:



تقریبی برای

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

۱ منهای مجموع مساحتهای نواحی بین مستطیلها و منحنی است. هر یک از این ناحیه‌ها تقریباً مثلث است. مساحت kاُمین مثلث (یعنی ناحیهٔ مستطیل به ارتفاع $\frac{1}{k+1}$) برابر است با

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

با جمع کردن این عبارتها به‌ازای ۱ تا n مجموعی ادغامی به‌دست می‌آوریم که برابر است با

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

بنابراین مقدار

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

تقریباً برابر است با

$$1-\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(n+1)}$$

که مشخصاً کوچکتر از ۴ است.

راهی هندسیتر برای تخمین مجموع مساحتهای نواحی بین مستطیلها و منحنی این است که همهٔ ناحیه‌ها را به‌طور افقی بلغزانیم تا در مربع اول (که یک رأسش $(0,0)$ است) قرار گیرند. دراین‌صورت این ناحیه‌های از هم جدا همه در مربعی به مساحت ۱ قرار دارند، و بنابراین مجموع مساحتهایشان کوچکتر از ۱ است.

۱۳.۶ S_n را مجموع جزئی تا جملهٔ nام در سری همساز بگیرید. دراین‌صورت همان‌طورکه در تمرین ۱۱ دیدید، $S_n \approx \ln n$. ایدهٔ کار این است که مجموع عددهایی در S_n که یک ۷ در مخرج دارند تقریباً $\ln\frac{n}{10}$ است. پس S_n منهای عددهایی در S_n که یک ۷ در مخرج دارند تقریباً

$$\ln n-\ln\frac{n}{10}=\ln\left(\frac{n}{n/10}\right)=\ln 10<\infty$$

است. تکمیل جزئیات کار را به عهدهٔ خوانندهٔ علاقه‌مند می‌گذاریم.

۱۵.۶ توجه کنید که $p^2-1=(p-1)(p+1)$. اما p چون اول است، بر ۳ بخش‌پذیر نیست. پس یا $p-1$ یا $p+1$ بر ۳ بخش‌پذیر است. توجه کنید که p بر ۲ نیز بخش‌پذیر نیست. پس $p-1$ و $p+1$ هر دو بر ۲ بخش‌پذیرند. بخصوص $(p-1)(p+1)$ بر ۴ بخش‌پذیر است. پس p^2-1 بر ۱۲ بخش‌پذیر است. به بیان دیگر، باقیماندهٔ تقسیم p^2 بر ۱۲ همواره ۱ است.

۱۷.۶ جواب ۸ است. یک راه‌حل این است که 2^{43} را به صورت $8\times(24+1000)^4$ بنویسیم و ضرب کنیم.

۱۹.۶ یک راه این است:

$$S_k = a + a \times r + a \times r^{۲} + \cdots + a \times r^k$$

$$r \times S_k = a \times r + a \times r^{۲} + \cdots + a \times r^k + a \times r^{k+۱}$$

دو معادلهٔ بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$S_k - r \times S_k = a - a \times r^{k+۱}$$

این معادله را برحسب S_k حل می‌کنیم:

$$S_k = \frac{a(۱ - r^{k+۱})}{۱ - r}$$

۲۱.۶ مساحت کره‌ای به شعاع r برابر با $۴\pi r^{۲}$ و حجم آن $\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ است. بنابراین

$$۴\pi r = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

این معادله را برحسب r حل می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم $r = ۳$ که نشان می‌دهد نسبت حجم به مساحت کره ۳۶π است.

۲۳.۶ $۱۰^{۱/۱۰}$ و $۲^{۱/۳}$ را به توان ۳۰ می‌رسانیم که به ترتیب $۱۰^{۳}$ و $۲^{۱۰}$ می‌شوند. پس مسأله هم‌ارز است با مقایسهٔ این دو عدد اخیر. توجه کنید که

$$۲^{۱۰} = ۱۰۲۸ > ۱۰^{۳}$$

پس $۲^{۱/۳}$ بزرگتر از $۱۰^{۱/۱۰}$ است.

۲۵.۶ هر دو طرف معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
۰ &= ۲a^{۲} + ۲b^{۲} + ۲c^{۲} + ۲d^{۲} - ۲ab - ۲bc - ۲cd - ۲da \\
&= (a^{۲} - ۲ab + b^{۲}) + (b^{۲} - ۲bc + c^{۲}) + (c^{۲} - ۲cd + d^{۲}) \\
&\quad + (d^{۲} - ۲da + a^{۲}) \\
&= (a-b)^{۲} + (b-c)^{۲} + (c-d)^{۲} + (d-a)^{۲}
\end{aligned}$$

چون عبارت اخیر فقط وقتی صفر است که همهٔ جمعوندها صفر باشند، باید

$$a = b = c = d$$

۲۷.۶ فرض کنید a و b به ترتیب آخرین دو رقم عددی مانند n باشند. دراین‌صورت

$$n = ۱۰۰T + ۱۰a + b$$

که در آن T عددی صحیح است. بنابراین

$$n^{۲} = ۱۰۰L + ۲ab(۱۰) + b^{۲}$$

که در آن L عددی صحیح است. پس آخرین دو رقم $n^۲$ آخرین دو رقم $۲ab(۱۰) + b^۲$ هستند. اگر فرض کنیم که همهٔ رقمهای $n^۲$، ۱ هستند، باید آخرین دو رقم $۲ab(۱۰) + b^۲$ نیز ۱ باشند. این مستلزم آن است که یا $b = ۱$ یا $b = ۹$. اگر $b = ۱$، رقم دوم آخرین رقم $۲a$ خواهد بود که زوج است. پس نمی‌تواند ۱ باشد. اگر $b = ۹$، رقم دوم آخرین رقم $۲a + ۸$ (۸ از حاصل‌ضرب ۹×۹ آمده است) خواهد بود که این عدد نیز زوج است. پس باز هم رقم دوم نمی‌تواند ۱ باشد. پس آخرین دو رقم نمایش اعشاری هیچ مربع کاملی ۱ نیست.

۲۹.۶ A را مجموعهٔ همهٔ حاصل‌ضربهای جفت عددهای اول متمایز بگیرید:

$$A = \{p \cdot q \mid \text{عددهایی اول و متمایزند } q \text{ و } p\}$$

دراین‌صورت اگر S مجموعه‌ای دلخواه از عددهای اول باشد، A حاوی همهٔ حاصل‌ضربها از دو عضو S است و متمم A حاوی همهٔ حاصل‌ضربها از سه عضو S است. (توجه کنید که در این تمرین گفته شده است «دست‌کم دو عضو S».)

۳۱.۶ بله ممکن است. فرض کنید خلاف این باشد. می‌دانیم که $\sqrt{۲}$ گنگ است. بنابر فرض، $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ باید گنگ باشد. ولی دراین‌صورت

$$\left(\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۲}} = (\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}$$
$$= (\sqrt{۲})^۲$$
$$= ۲$$

باید گنگ باشد که نیست. پس به تناقض رسیده‌ایم.

۳۳.۶ می‌توان نوشت $\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta = a$. توجه کنید که

$$(\sin\theta + \cos\theta)^۲ = \sin^۲\theta + \cos^۲\theta + ۲\sin\theta\cos\theta = ۱ + a$$

پس چون θ حاده است، $\sin\theta + \cos\theta \geqslant ۰$، و

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{۱ + a}$$

۳۵.۶ چون فرض می‌کنیم

$$۲ = x^{(x^{(x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

پس

$$x^۲ = x^{(x^{(x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$
$$= ۲$$

نتیجه می‌شود $x = \sqrt{۲}$.

۳۷.۶ فرض کنید L محل عقربهٔ دقیقه‌شمار برحسب دقیقه، با شرط $\circ \leqslant L < ۶\circ$، و l محل عقربهٔ ساعت‌شمار برحسب ساعت، با شرط $\circ \leqslant l < ۱۲$، باشد (مثلاً در ساعت سه، $L = \circ$ و $l = ۳$). دراین‌صورت L و l باید در معادلهٔ زیر صدق کنند:

$$k + \frac{L}{۶\circ} = l$$

که در آن $k = \circ, ۱, ۲, \cdots, ۱۱$. عقربه‌ها وقتی به هم می‌رسند که $L = ۵l$. پس در این حالت l در معادلهٔ

$$k + \frac{l}{۱۲} = l$$

صدق می‌کند. پس عقربه‌ها در ساعت l و L دقیقه به‌طوری‌که

$$l = \frac{۱۲k}{۱۱}, \quad L = \frac{۶\circ k}{۱۱}, \quad k = \circ, ۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۱$$

برهم منطبق می‌شوند. چون به‌ازای $k = ۱۱$ به‌دست می‌آوریم $l = ۱۲$ و $L = ۶\circ$ (که چیزی جز $l = \circ$ و $L = \circ$، یعنی حالت $k = \circ$، نیست)، نتیجه می‌گیریم که عقربه‌ها در مدت ۱۲ ساعت ۱۱ بار برهم منطبق می‌شوند.

۳۹.۶ توجه کنید که $a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲)$. چون a و b فردند، $a^۲ + ab + b^۲$ فرد است، و بنابراین به‌ازای هیچ عددی مانند $n \geqslant ۱$ بر ۲^n بخش‌پذیر نیست. پس $a^۳ - b^۳$ بر ۲^n بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر $a - b$ بر ۲^n بخش‌پذیر باشد.

۴۱.۶ خلاف این را فرض کنید. اگر n زوج باشد طرف چپ زوج و طرف راست فرد است. پس n باید فرد باشد. اگر n فرد باشد، معادله را به صورت $(n+۲)^۳ - n^۳ = (n+۱)^۳$ می‌نویسیم. پس باید

$$۸ + ۱۲n + ۶n^۲ = (n+۱)^۳$$

طرف راست بر ۸ بخش‌پذیر است. طرف چپ بر ۸ بخش‌پذیر نیست، چون اگر باشد، $۶n + ۳n^۲$ باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد و دراین‌صورت n باید زوج باشد. بنابراین تساوی برقرار نیست.

۴۳.۶ اگر n زوج باشد عددی صحیح مانند k وجود دارد به‌طوری‌که

$$۳^n + ۱ = (۴-۱)^n + ۱ = ۴k + (-۱)^n + ۱ = ۴k + ۲$$

که بر ۴ و بنابراین به‌ازای $n > ۱$ بر ۲^n بخش‌پذیر نیست.

اگر n فرد باشد، قرار می‌دهیم $n = ۲\ell + ۱$. به‌ازای عددی صحیح مانند k'،

$$۳^n + ۱ = ۳ \times (۸+۱)^\ell + ۱ = ۸k' + ۳ \times ۱^\ell + ۱ = ۸k' + ۴$$

که بر ۸ و بنابراین بر ۲^n بخش‌پذیر نیست (توجه کنید که فرض کرده‌ایم $n > ۱$ و n فرد است؛ پس $n \geqslant ۳$).

۴۵.۶ چون ۳ − ۸ = ۵، می‌توانیم بنویسیم

$$5^n + 2 \times 3^{n-1} + 1 = (8-3)^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$$
$$= 8 \times k + (-3)^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$$

اگر n زوج باشد قرار می‌دهیم $n = 2\ell$، و در نتیجه

$$8 \times k + (-3)^n + 2 \times 3^{n-1} + 1 = 8 \times k + 5 \times 3^{n-1} + 1$$
$$= 8 \times k + (8-3) \times 3^{n-1} + 1$$
$$= 8 \times k' - 3^n + 1$$
$$= 8 \times k' - (8+1)^\ell + 1$$
$$= 8 \times k'' - 1^\ell + 1$$
$$= 8 \times k'''$$

که در آن k، k'، k'' و k''' عددهایی صحیح‌اند.

اگر n فرد باشد، قرار می‌دهیم $n = 2j + 1$، و در نتیجه

$$8 \times m + (-3)^n + 2 \times 3^{n-1} + 1 = 8 \times m - 3 \times 3^{n-1} + 2 \times 3^{n-1} + 1$$
$$= 8 \times m - 3^{n-1} + 1$$
$$= 8 \times m - 3^{2j} + 1$$
$$= 8 \times m - (8+1)^j + 1$$
$$= 8 \times m' - 1^j + 1$$
$$= 8 \times m''$$

که در آن m، m' و m'' عددهایی صحیح‌اند.

۴۷.۶ بدون اینکه از کلیت استدلال کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم a فقط دو رقم دارد؛ یعنی $a = 10b + c$ با شرط $0 \leqslant b, c \leqslant 9$. دراین صورت

$$a^2 = 100b^2 + 10(2bc) + c^2$$

پس باید

$$7 = (\text{رقم دهگان } c^2) + (\text{رقم یکان } 2bc)$$

این شرط مستلزم آن است که رقم دهگان c^2 فرد باشد و این انتخابهای ما را به $c = 4$ و $c = 6$ محدود می‌کند. اگر $c = 4$، رقم یکان $2bc$ باید ۶ باشد. با قرار دادن $c = 4$ معلوم می‌شود که رقم یکان $8b$ باید ۶ باشد، و در نتیجه $b = 2$، $b = 7$ یا $b = 9$. اگر $c = 6$، رقم یکان $2bc$ باید ۴ باشد.

با قرار دادن مقدار $c = ۶$ معلوم می‌شود که رقم یکان $۱۲b$ باید ۴ باشد، و در نتیجه $b = ۲$ یا $b = ۷$. پس مقدارهای ممکن a عبارت‌اند از ۲۴، ۷۴، ۹۴، ۲۶ و ۷۶، که در آنها رقم یکان ۴ یا ۶ است.

۴۹.۶ با بسط دادن طرف چپ معادلهٔ

$$(x^۲ + ax + b)(x^۲ + cx + d) = x^۴ + ۲x^۲ + ۲x + ۲$$

رابطه‌های زیر حاصل می‌شود:

$$a + c = ۲$$

$$b + ac + d = ۲$$

$$ad + bc = ۲$$

$$bd = ۲$$

با توجه به رابطهٔ آخر می‌توانیم فرض کنیم $|b| = ۲$ و $|d| = ۱$. از رابطهٔ اول معلوم می‌شود که a و c یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد. اگر هر دو زوج باشند، طرف چپ رابطهٔ دوم فرد و طرف راست زوج است. پس a و c هر دو باید فرد باشند. اما دراین‌صورت طرف چپ رابطهٔ سوم فرد و طرف راست آن زوج است. بنابراین ممکن نیست که a، b، c و d همه صحیح باشند.

۵۱.۶ فرض کنید $r \neq -۱$ (حالتی که $r = -۱$ ساده است). اگر $|a| > ۱$، a (که ۱ نیست) $a_{a+۱}$ یعنی $a + ar$ را می‌شمارد. اگر $a = -۱$، $a = ۰$ یا $a = ۱$ آنگاه $a + ۳r$ (که ۱ نیست) $a_{a+۳r+۳}$ را می‌شمارد، زیرا

$$a_{a+۳r+۳} = a + ar + ۳r^۲ + ۳r = (a + ۳r)(۱ + r)$$

۵۳.۶ $۴! \times \binom{۵}{۴}$، یعنی ۲۴×۵ عدد از این نوع وجود دارد ($\binom{۵}{۴}$ راه برای انتخاب ۴ رقم داریم و هر انتخاب $۴!$ جایگشت دارد). عددها را در ستونی به صورت زیر بنویسید:

۱۲۳۴

۱۲۳۵

۱۲۴۳

۲۵۴۳

⋮

دراین‌صورت ملاحظه کنید که هر یک از ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در $\frac{۱}{۵}$ این عددها در موضع یکان، در $\frac{۱}{۵}$ عددها در موضع دهگان، در $\frac{۱}{۵}$ عددها در موضع صدگان و در $\frac{۱}{۵}$ عددها در موضع هزارگان است. پس مجموع همهٔ عددها برابر است با

$$۲۴ \times ۱۱۱۱ + ۲۴ \times ۲۲۲۲ + ۲۴ \times ۳۳۳۳ + ۲۴ \times ۴۴۴۴ + ۲۴ \times ۵۵۵۵ = ۳۹۹۹۶۰$$

۵۵.۶ توجه کنید که

$$۱۷x + ۱۷y - (۹x + ۵y) = ۸x + ۱۲y = ۴(۲x + ۳y)$$

پس $۳y + ۲x$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر $۹x + ۵y$ بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد.

۵۷.۶ کمترین مقدار ممکن n برابر $p_۱p_۲\cdots p_k$ است که در اینجا p_iها عددهای اول متوالی به ترتیب صعودی با شرط $p_۱ = ۲$ هستند. پس $p_i \geqslant ۲$ و این مستلزم آن است که $n \geqslant ۲^k$، و این هم‌ارز است با $\log n \geqslant k \log ۲$.

۵۹.۶ عدد $n^{n-۱} - ۱$ را می‌توان به‌صورت $((n-۱)+۱)^{n-۱} - ۱$ نوشت. با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} n^{n-۱} - ۱ &= ((n-۱)+۱)^{n-۱} - ۱ \\ &= \binom{n-۱}{۰}(n-۱)^{n-۱} + \binom{n-۱}{۱}(n-۱)^{n-۲} + \cdots \\ &\quad + \binom{n-۱}{n-۳}(n-۱)^۱ + \binom{n-۱}{n-۲} + ۱ - ۱ \\ &= \binom{n-۱}{۰}(n-۱)^{n-۱} + \binom{n-۱}{۱}(n-۱)^{n-۲} + \cdots \\ &\quad + \binom{n-۱}{n-۳}(n-۱)^۲ + (n-۱)(n-۱) \end{aligned}$$

که در آن از $\binom{n-۱}{n-۲} = n - ۱$ استفاده کرده‌ایم. سرانجام توجه کنید که هر جملهٔ آخرین مجموع بر $(n-۱)^۲$ بخش‌پذیر است. پس $n^{n-۱} - ۱$ بر $(n-۱)^۲$ بخش‌پذیر است.

۶۱.۶ توجه کنید که

$$n^۲(n^۲-۱)(n^۲-۴) = (n-۲)(n-۱)n^۲(n+۱)(n+۲)$$

(در طرف راست پنج عدد طبیعی متوالی داریم.) از عددهای سمت راست یکی بر ۴ و یکی بر ۲ بخش‌پذیر است، دو تا بر ۳ بخش‌پذیرند و یکی بر ۵ بخش‌پذیر است. پس حاصل‌ضرب آنها بر $۵ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۴$، یعنی بر ۳۶۰ بخش‌پذیر است.

۶۳.۶ می‌توانیم بنویسیم $a = ۱۲r$ و $b = ۱۲s$، که در آنها r و s نسبت به هم اول‌اند. دراین صورت $۱۲rs = ۴۳۲$ و یا $rs = ۳۶ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳$. چون r و s عامل مشترک ندارند، باید $r = ۹$ و $s = ۴$ (یا برعکس). پس $a = ۱۰۸$ و $b = ۴۸$ (یا برعکس).

۶۵.۶ $(m+n+k)^۳$ را بسط می‌دهیم:

$$(m+n+k)^۳ = k^۳ + ۳k^۲m + ۳km^۲ + m^۳ + ۳k^۲n + ۶kmn$$
$$+ ۳m^۲n + ۳kn^۲ + ۳mn^۲ + n^۳$$
$$= m^۳ + n^۳ + k^۳ + ۳K$$

که در آن K عددی صحیح است. پس $(m+n+k)^۳$ بر ۳ بخش‌پذیر است، اگر و فقط اگر $m^۳+n^۳+k^۳$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۶۷.۶ می‌نویسیم

$$m^۲ = p^۲ - n^۲ = (p+n)(p-n)$$

قرار می‌دهیم $a = p+n$ و $b = p-n$. توجه کنید که به‌ازای هر مقدار a و b مقدارهای p و n با حل معادله‌های تعریف‌کنندهٔ a و b به‌دست می‌آیند. درواقع

$$p = \frac{a+b}{۲}, \quad n = \frac{a-b}{۲}$$

چون p و n عددهایی صحیح‌اند، تنها شرطی که a و b باید داشته باشند این است که هر دو زوج یا هر دو فرد باشند (تا $a+b$ و $a-b$ بر ۲ بخش‌پذیر باشند).

پس به‌ازای هر m و به‌ازای هر دو عدد صحیحی مانند a و b که هر دو زوج یا هر دو فرد باشند و در معادلهٔ

$$m^۲ = ab$$

صدق کنند، می‌توانیم دو عدد صحیح p و n را به‌طوری‌که در معادلهٔ

$$m^۲ + n^۲ = p^۲$$

صدق کنند به‌طور یکتا تعیین کنیم. به این ترتیب همهٔ سه‌تاییهای فیثاغورسی رده‌بندی می‌شوند.

۶۹.۶ تجزیه با ضرایب حقیقی چنین است:

$$x^۸ + x^۴ + ۱ = (۱ - x + x^۲)(۱ + x + x^۲)(x^۲ - x\sqrt{۳} + ۱)(x^۲ + x\sqrt{۳} + ۱)$$

۷۱.۶ می‌خواهیم مجموع رقمهای مجموع رقمهای مجموع رقمهای $۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ را بیابیم. از این واقعیت استفاده می‌کنیم که اگر عددی را بتوان به شکل $۹c + r$ نوشت، مجموع رقمهای آن را می‌توان به شکل $۹c' + r$ نوشت (r در هر دو یکی است). ابتدا توجه کنید که $۴۴۴۴ = ۹ \times ۴۹۴ - ۲$. پس

$$۴۴۴۴^{۴۴۴۴} = (۹ \times ۴۹۴ - ۲)^{۴۴۴۴}$$
$$= ۹ \times \ell + ۲^{۴۴۴۴}$$

که در آن ℓ عددی صحیح است. اکنون چون

$$۲^۳ = ۸ = ۹ - ۱, \qquad ۴۴۴۴ = ۳ \times ۱۴۸۱ + ۱$$

پس

$$۲^{۴۴۴۴} = ۲^{۳\times ۱۴۸۱+۱} = ۸^{۱۴۸۱} \times ۲ = (۹ - ۱)^{۱۴۸۱} \times ۲$$
$$= (۹ \times k - ۱) \times ۲ = ۹ \times k' - ۲$$

که در آن k و k' عددهایی صحیح‌اند. بنابراین عدد $۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ را می‌توان چنین نوشت:

$$۹ \times \ell + ۹ \times k' - ۲ = ۹ \times (\ell + k') - ۹ + ۷ = ۹ \times k'' + ۷$$

که در آن k'' عددی صحیح است.

پس مجموع رقمهای مجموع رقمهای مجموع رقمهای $۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ نیز به شکل $۹c + ۷$ است. عدد $۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ کوچکتر از $۱۰۰۰۰^{۴۴۴۴}$ است که ۴۴۴۵ رقم دارد. پس مجموع رقمهای $۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ کوچکتر از یا برابر با ۴۴۴۵×۹، یعنی ۴۰۰۰۵، است. اکنون توجه کنید که ۴۰۰۰۵ پنج رقم دارد. پس مجموع رقمهای مجموع رقمهای $۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ کوچکتر از یا برابر با ۹×۵، یعنی ۴۵ است. سرانجام توجه کنید که مجموع رقمهای عددی که از ۴۵ کوچکتر باشد حداکثر ۱۲ است. پس دریافته‌ایم که مجموع رقمهای مجموع رقمهای مجموع رقمهای $۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ عددی کوچکتر از یا برابر با ۱۲ و به شکل $۹c + ۷$ است. تنها امکان خود عدد ۷ است. پس مجموع رقمهای مجموع رقمهای مجموع رقمهای $۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ برابر با ۷ است.

۷۵.۶ ثابت می‌کنیم که $n^{۱۱} - n$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است. حالت $n^{۱۳} - n$ هم مشابه همین است. ابتدا توجه کنید که چون هر n را می‌توان به شکل $۱۱m + q$ با شرط $۰ \leqslant q < ۱۱$ نوشت، با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای می‌توان نوشت

$$n^{۱۱} - n = (۱۱ \times m + q)^{۱۱} - (۱۱ \times m + q) = ۱۱ \times A + q^{۱۱} - q$$

پس $n^{۱۱} - n$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر $q^{۱۱} - q$، که در آن $۰ \leqslant q < ۱۱$، بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. بررسی این موضوع آسان است.

به‌طورکلی، به‌ازای هر دو عدد صحیح مانند n و k، $n^k - n$ بر k بخش‌پذیر است. این را «قضیهٔ کوچک فرما» می‌نامند (با «قضیهٔ بزرگ فرما» اشتباه نگیرید). برهان این قضیه با استفاده از حساب پیمانه‌ای چندان دشوار نیست.

فصل ۷

مسأله‌های گوناگون

۱.۷ یک مثال این است:

$$۴ + ۵ + ۹ + ۱۳ + \frac{۷۲}{۸} + ۶۰$$

این کار بدون استفاده ازکسر ممکن نیست. دلیل این موضوع را چنین توضیح می‌دهیم:

$$۰ + ۱ + ۲ + \cdots + ۹ = ۴۵$$

توجه کنید که ۴۵ بر ۹ بخش‌پذیر است. می‌دانیم که عددی بر ۹ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموع رقمهایش بر ۹ بخش‌پذیر باشد. درواقع باقیماندهٔ تقسیم هر عدد طبیعی بر ۹ همان باقیماندهٔ تقسیم مجموع رقمهایش بر ۹ است. این یعنی اینکه اگر مجموع رقمهای عددی طبیعی را از خود عدد کم کنیم، نتیجه بر ۹ بخش‌پذیر خواهد بود. مثلاً $۲۸ - (۲ + ۸) = ۱۸$ و $۴۹ - (۴ + ۹) = ۳۶$. فرض کنید N مجموع گردایه‌ای از عددهای طبیعی باشد که در آن همهٔ رقمهای ۰، ۱، $\cdots$ و ۹ یک و فقط یک بار به کار رفته‌اند. دراین صورت، $N - (۰ + ۱ + \cdots + ۹)$ یعنی $N - ۴۵$ باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد. پس N برابر با ۱۰۰ نیست، چون $۱۰۰ - ۴۵ = ۵۵$ و ۵۵ بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

۳.۷ همان قراردادهای مسألهٔ قبل را به‌کار می‌گیریم. روشن است که راه‌حل مسألهٔ قبل جواب این مسأله نیز هست، ولی در آن همهٔ ظرفیت قایق به‌کار گرفته نمی‌شود. یکی از راه‌حلهایی که در آن از همهٔ ظرفیت قایق استفاده می‌شود چنین است:

الف) A، M و m به طرف ۲ می‌روند.

ب) A قایق را به طرف ۱ برمی‌گرداند.

ج) A، a و b به طرف ۲ می‌روند.

د) A قایق را به طرف ۱ برمی‌گرداند (اگر فکر می‌کنید همهٔ کارها را A کرده است می‌توانید او را با یکی دیگر عوض کنید).

ه) سرانجام A و B به طرف ۲ می‌روند.

۵.۷ افراد را مانند مسألهٔ قبل نامگذاری می‌کنیم و فرض می‌کنیم می‌خواهند از طرف ۱ به طرف ۲ بروند. همچنین قایقها را T_1 و T_2 می‌نامیم.

الف) a_1 و b_1 با T_1 و a_2 و b_2 با T_2 به طرف ۲ می‌روند.

ب) a_1 با T_1 و a_2 با T_2 به طرف ۱ برمی‌گردند.

ج) a_1 و c_1 با T_1 و a_2 و c_2 با T_2 به طرف ۲ می‌روند.

د) b_1 و b_2 قایقهای T_1 و T_2 را به طرف ۱ برمی‌گردانند.

ه) m_1 و b_1 با T_1 و m_2 و b_2 با T_2 به طرف ۲ می‌روند.

و) اکنون فقط ۴ نفر در طرف ۱ هستند، مرد سوم با سه همسرش و قایقها در طرف ۲ هستند. دو مرد اول چون نمی‌توانند هیچ‌یک از همسرانشان را به طرف ۱ بفرستند (دراین صورت زنها بدون شوهرانشان با m_3 در طرف ۱ می‌مانند)، مجبورند خودشان قایقها را به طرف ۱ برگردانند.

ز) m_3 با یکی از همسرانش با T_1، و m_1 و m_2 با T_2 به طرف ۲ می‌روند.

ح) اکنون دو زن در طرف ۲ می‌توانند قایقها را به طرف ۱ برگردانند و دو زن باقی‌مانده در طرف ۱ را به طرف ۲ بیاورند.

۷.۷ جواب این است:

B,C,D,G,I,J,L,M,N,O,P,Q,R,S,U,V,W,Z

برای توضیح بیشتر مسألهٔ ۳.۲.۷ را ببینید.

۹.۷ روشن است که اگر تقاطع درون دایره‌ها با ضلعهای مربع مجاز باشد مسأله حتی با فقط یک دایره حل‌پذیر است. پس فرض این است که درون دایره‌ها با ضلعهای مربع تقاطع نداشته باشند. مرز هر دایره حداکثر ممکن است با یک یا دو ضلع مربع در تماس باشد. روشن است که اگر بخواهیم مربع را با تعدادی متناهی دایره پر کنیم، بعضی از دایره‌ها باید بر ضلعها مماس باشند. خط و دایره دقیقاً در یک نقطه بر هم مماس می‌شوند. با تعدادی متناهی دایره حداکثر می‌توانیم تعدادی متناهی از نقاط ضلعهای مربع را بپوشانیم. چون تعدادی نامتناهی نقطه روی ضلعهای مربع هست، همهٔ نقاط ضلعها جز تعدادی متناهی از آنها خارج از همهٔ دایره‌ها قرار می‌گیرند.

۱۱.۷ اگر طول ضلع مثلثی متساوی‌الاضلاع ۱ باشد مساحت آن $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ است. پس اگر بتوان با چنین مثلثی یک مربع ساخت، طول ضلع مربع باید $\frac{\sqrt[۴]{۳}}{۲}$ باشد؛ قطر چنین مربعی $\frac{\sqrt[۴]{۳} \times \sqrt{۲}}{۲}$ است. توجه کنید که هم طول ضلع و هم قطر مربع کمتر از ۱ است. پس اگر بتوان مثلث را فقط با یک برش طوری برید که با دو قطعهٔ حاصل بتوان مربع ساخت، هر سه ضلع مثلث (که طول هر کدام ۱ است) باید بریده شوند. چنین کاری آشکارا با یک برش امکان‌پذیر نیست.

۱۳.۷ ابتدا ۱ را بررسی می‌کنیم. آنچه را می‌بینیم می‌شماریم: «یک» ۱ یا «۱» ۱. اینها را به دنباله اضافه می‌کنیم:

۱, ۱, ۱

باز می‌شماریم. اکنون «سه» ۱ می‌بینیم. ۳ و ۱ را به دنباله اضافه می‌کنیم:

۱, ۱, ۱, ۳, ۱

اکنون «چهار» ۱ و «یک» ۳ می‌بینیم. اینها را هم به‌دنباله اضافه می‌کنیم:

۱, ۱, ۱, ۳, ۱, ۴, ۱, ۱, ۳

اکنون «شش» ۱ و «دو» ۳ و «یک» چهار داریم. اکنون دنباله به‌صورت زیر درمی‌آید:

۱, ۱, ۱, ۳, ۱, ۴, ۱, ۱, ۳, ۶, ۱, ۲, ۳, ۱, ۴

با ادامهٔ این کار به دنبالهٔ زیر می‌رسیم:

۱, ۱, ۱, ۳, ۴, ۱, ۱, ۳, ۶, ۱, ۲, ۳, ۱, ۴, ۸, ۱, ۳, ۳, ۲, ۴, ۱, ۶, ۱, ۲

پس «؟» به جای ۱ است.

۱۷.۷ به‌طورکلی، $\frac{a^۳+b^۳}{۲}$ برابر با $\left(\frac{a+b}{۲}\right)^۳$ نیست، چون $Y \to Y^۳$ تابعی خطی نیست.

۱۹.۷ فرض کنید ۱۰۰۰ نفر بخواهند چرخ را بچرخانند. بنابر شانس مورد انتظار، تقریباً ۸۰۰ نفر هر کدام ۸۰۰ دلار می‌برند. پس ۲۰۰ نفر چیزی نمی‌برند. پس به‌طور میانگین هر نفر ۶۴۰ دلار می‌گیرد. پس به‌طور میانگین افراد با چرخاندن چرخ مبلغ بیشتری می‌گیرند. پس به‌نظر می‌رسد که چرخاندن چرخ عاقلانه‌تر است.

۲۳.۷ فرض کنید چنین عدد گویایی وجود داشته باشد. این عدد را r می‌نامیم. پس فرض این است که $r^۲ = ۸$. اگر r عددی گویا باشد $\frac{r}{۲}$ هم گویاست. ولی

$$\left(\frac{r}{۲}\right)^۲ = \frac{r^۲}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

پس عددی گویا یافته‌ایم که مربعش ۲ است. ولی این نتیجه با تمرین ۲۲.۷ که در آن نشان داده‌ایم چنین عددی وجود ندارد تناقض دارد. پس نتیجه می‌گیریم این فرض که $\sqrt{۸}$ گویاست نادرست است.

۲۵.۷ فرض کنید r و s دو عدد گویای متمایز باشند و r عدد کوچکتر باشد. دراین‌صورت $a = \frac{s-r}{\sqrt{۲}}$ عددی گنگ است، چون در غیراین‌صورت از برابری $\sqrt{۲} = \frac{s-r}{a}$ نتیجه می‌شود که $\sqrt{۲}$ عددی گویاست و این با تمرین ۲۲.۷ تناقض دارد. از طرف دیگر، a مثبت و کوچکتر از $s-r$ است. پس $r+a$ بزرگتر از r و کوچکتر از s است. در عین حال، $r+a$ عددی گنگ است، در غیراین‌صورت $a = r+a-r$ گویا خواهد بود، درحالی‌که نشان داده‌ایم a گنگ است.

فصل ۸

زندگی واقعی

۱.۸ فرض کنید R شعاع کمان مستدیر بیان‌شده در صورت مسأله و ϕ زاویه‌ای بر حسب رادیان باشد که روبه‌روی این کمان است. دراین‌صورت باید

$$۲R\sin\frac{\phi}{۲} = ۵۲۸۰$$

و

$$R\phi = ۵۲۸۱$$

می‌خواهیم مقدار

$$h = R - R\cos\frac{\phi}{۲}$$

را بیابیم. با استفاده از معادلهٔ اول به‌دست می‌آوریم

$$h = R - \sqrt{R^۲ - (۲۶۴۰)^۲}$$

پس مسأله به یافتن R تبدیل شده است. این کار آسان نیست، ولی شدنی است. دو معادلهٔ اول به‌دست می‌دهند

$$R\sin\frac{۲۶۴۰/۵}{R} = ۲۶۴۰$$

با استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری می‌توان جوابی تقریبی به‌دست آورد. راهی دیگر این است که با استفاده از کامپیوتر، مثلاً نمودار $R\sin\frac{۲۶۴۰/۵}{R} - ۲۶۴۰$ را رسم کنیم و سپس با صبر و حوصله فاصله‌ای را که در آن این تابع تقریباً صفر است بیابیم. ما با این روش و با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا به‌دست آورده‌ایم $R \approx ۷۸۳۳۵/۰۸۰۵۱$. از اینجا h تقریباً ۴۴/۴۹۸۵ فوت به‌دست می‌آید که بسیار بزرگتر از آن است که انتظار می‌رود.

۵.۸ ایدهٔ مسأله این است که آمار و ارقام بسته به اینکه چه سالی را مبنای هزینهٔ زندگی بگیریم فرق می‌کنند. توضیح جالب کتاب چگونه با آمار دروغ بگوییم،[1] نوشتهٔ دارِل هاف، را هم ببینید.

هزینهٔ زندگی بالا رفته است: سال قبل را مبنا بگیرید. یعنی برای یافتن درصد تغییر قیمتها، قیمت اجناس در سال قبل را ۱۰۰ می‌گیریم. پس قیمت نان ۲۰۰٪ بیشتر از سال پیش است و قیمت شیر ۵۰٪ کم شده است. میانگین ۲۰۰ و ۵۰ برابر با ۱۲۵ است. پس هزینهٔ زندگی ۲۵٪ افزایش یافته است.

هزینهٔ زندگی پایین آمده است: امسال را مبنا بگیرید. فرض کنید قیمت اجناس در سال جاری ۱۰۰ است. سال قبل قیمت شیر ۲۰۰٪ بیشتر از امسال بوده است و قیمت نان ۵۰٪ قیمت امسال بوده است. میانگین ۱۲۵ است. پس سال پیش هزینهٔ زندگی ۲۵٪ بیشتر از امسال بوده است.

هزینهٔ زندگی تغییر نکرده است: سال قبل را مبنا بگیرید، ولی به جای میانگین حسابی از میانگین هندسی استفاده کنید. امسال قیمت شیر ۵۰٪ قیمت سال قبل و قیمت نان ۲۰۰٪ قیمت سال قبل است. میانگین هندسی برابر است با

$$\sqrt{۵۰ \times ۲۰۰} = ۱۰۰$$

پس امسال قیمتها به‌طور میانگین ۱۰۰٪ قیمتهای سال قبل‌اند؛ به بیان دیگر، هزینهٔ زندگی تغییر نکرده است.

1- How to Lie with Statistics

۷.۸ به همان مرجع تمرین ۵.۸، صفحهٔ ۸۲ مراجعه کنید. روشن است که سود در کلِّ فروش ۱٪ بوده است (در هر فروش ۱ سنت سود برای ۱ دلار فروش). از طرف دیگر، کلاً ۹۹ سنت پول سرمایه‌گذاری شده است و کل سود سالانه ۳۶۵ سنت است که تقریباً ۳۶۵٪ سرمایه است.

۹.۸ بنابر دایرةالمعارف بریتانیکا، مو ۰٫۵ اینچ در ماه رشد می‌کند. در هر ماه ۳۰ × ۲۴، یعنی ۷۲۰ ساعت هست و هر مایل ۵۲۸۰ × ۱۲، یعنی ۶۳۳۶۰ اینچ است. پس مو با آهنگ

$$\frac{0{,}5 \times 720}{63360} = 0{,}315657 \times 10^{-4} \quad \text{مایل بر ساعت}$$

رشد می‌کند.

۱۱.۸ در این مسأله از دستور بیز (فصل ۳ را ببینید) استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{Pr}\{\text{ابتلا به بیماری} \mid \text{آزمایش } +\}$$
$$= \frac{\mathbf{Pr}\{+ \text{آزمایش} \mid \text{ابتلا به بیماری}\} \cdot \mathbf{Pr}\{\text{ابتلا به بیماری}\}}{\mathbf{Pr}\{+ \mid \text{بیماری}\} \cdot \mathbf{Pr}\{\text{بیماری}\} + \mathbf{Pr}\{+ \mid \text{سلامتی}\} \cdot \mathbf{Pr}\{\text{سلامتی}\}}$$
$$= \frac{0{,}98 \times 0{,}005}{0{,}98 \times 0{,}005 + 0{,}02 \times 0{,}995}$$
$$= 0{,}197581$$

و این احتمال بسیار کم است. بحث این مسأله را در [PAUL1]، صفحهٔ ۸۹، هم ببینید. احتمال ابتلا به بیماری وقتی که نتیجهٔ یک آزمایش منفی باشد برابر است با

$$\mathbf{Pr}\{\text{ابتلا به بیماری} \mid \text{آزمایش } -\}$$
$$= \frac{\mathbf{Pr}\{- \mid \text{بیماری}\} \cdot \mathbf{Pr}\{\text{بیماری}\}}{\mathbf{Pr}\{- \mid \text{بیماری}\} \cdot \mathbf{Pr}\{\text{بیماری}\} + \mathbf{Pr}\{- \mid \text{سلامتی}\} \cdot \mathbf{Pr}\{\text{سلامتی}\}}$$
$$= \frac{0{,}02 \times 0{,}005}{0{,}02 \times 0{,}005 + 0{,}98 \times 0{,}995}$$
$$= 0{,}0001025$$

اکنون با توجه به اینکه آزمایشها مستقل از هم‌اند، احتمال ابتلا به بیماری بعد از دو آزمایش با نتیجهٔ منفی، مربع احتمال ابتلای به بیماری بعد از یک آزمایش با نتیجهٔ منفی، یعنی مربع ۰٫۰۰۰۱۰۲۵۲۴۳ است.

پس احتمال ابتلا به بیماری بعد از دو آزمایش با نتیجهٔ منفی تقریباً 10^{-8} است.

۱۳.۸ نکتهٔ مهم در این تمرین این است که دانشجو اولین قطاری را که برسد سوار می‌شود. پس اگر مثلاً قطار نیویورک همیشه ۲ دقیقه زودتر از قطار فیلادلفیا برسد، دانشجوی مورد نظر ما به‌ندرت سوار قطار فیلادلفیا می‌شود. درواقع این دانشجو همیشه به نیویورک می‌رود، مگر اینکه در همان

فاصلهٔ ۲ دقیقه‌ای به ایستگاه برسد. در هر ساعت سه قطار به مقصد هر یک از دو شهر حرکت می‌کند، پس در هر ساعت ۳ فاصلهٔ ۲ دقیقه‌ای از این نوع داریم. پس احتمال اینکه دانشجو قطار فیلادلفیا را سوار شود برابر است با

$$۲ \times \frac{۳}{۶۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

به بیان دیگر، دانشجوی ما دوست نیویورکی‌اش را ۹ بار بیشتر از دوست فیلادلفیایی‌اش می‌بیند.

۱۵.۸ او تعداد قدمهایش را تا خانهٔ دوستش می‌شمارد. بعد وقتی که در خانهٔ دوستش است تا همان عدد را تقریباً با همان آهنگ قدم‌زدنش می‌شمارد و به این ترتیب مدت زمان پیاده‌روی را تخمین می‌زند. او هنگام ترک خانهٔ دوستش ساعت را نگاه می‌کند و وقتی که به خانه می‌رسد مدت زمان پیاده‌روی را به آن اضافه می‌کند و می‌تواند ساعتش را تنظیم کند.

۱۷.۸ حداکثر تعداد موهای سر انسان حدود ۵۰۰۰۰۰ است. چون جمعیت نیویورک حدود ۱۰۰۰۰۰۰۰ نفر است، بنابر اصل لانه‌کبوتری حتماً دو نفر تعداد موهای سرشان یکی است. برای بحث بیشتر [PAUL1]، صفحهٔ ۴۲ را ببینید.

۱۹.۸ احتمال اینکه باران نبارد برابر است با

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

پس احتمال اینکه باران ببارد برابر است با

$$۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

یعنی به احتمال ۷۵٪ باران می‌بارد.

۲۱.۸ بنابر دایرةالمعارف بریتانیکا، تقریباً ۶۰ میلی‌لیتر خون به‌ازای هر کیلوگرم وزن در بدن انسان هست. میانگین وزن افراد را ۵۰ کیلوگرم بگیرید (توجه کنید که بچه‌ها هم هستند). جمعیت ایالات متحد امریکا ۲۵۰ میلیون نفر است و خون همهٔ آنها

$$۶۰ \times ۵۰ \times ۲۵۰ \times ۱۰^{۶} = ۷۵ \times ۱۰^{۱۰} \quad \text{میلی‌لیتر}$$

یعنی ۷۵۰ مترمکعب است. حالا باید شعاع قاعدهٔ ورزشگاه را برحسب متر بدانید. اگر این شعاع را r و ارتفاع خون را h بنامید، h از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\pi r^{۲} h = ۷۵۰$$

۲۳.۸ احتمال اینکه پیشخدمت همبرگری را بیندازد ۰٫۳ است. فرض می‌کنیم که رویدادها مستقل‌اند، یعنی احتمال افتادن هر همبرگر، مستقل از اینکه چه بر سر همبرگرهای قبلی آمده است، ۰٫۳ است. پس احتمال اینکه پیشخدمت ۴ تا از ۱۰ همبرگر بعدی را بیندازد برابر است با

$$(۰٫۳)^{۴} \times (۰٫۷)^{۶} \times \binom{۱۰}{۴} \approx ۰٫۲۰۰۱۲۱$$

۲۵.۸ چون حداکثر تعداد موهای سر انسان ۵۰۰۰۰۰ است، هر نفر ممکن است بین ۰ تا ۵۰۰۰۰۰ تار مو داشته باشد، یعنی ۵۰۰۰۰۱ امکان مختلف هست. پس باید ۵۰۰۰۰۲ نفر باشند تا کاملاً مطمئن باشیم تعداد موهای سر دو نفر از آنها یکی است.

مسالهٔ یافتن تعداد افراد لازم برای اینکه موهای سر دو نفر از آنها یکی باشد شبیه مسألهٔ روز تولد است که در متن کتاب بررسی شد. فرض می‌کنیم که توزیع تعداد تارهای مو در جمعیت یکنواخت و بین ۰ تا ۵۰۰۰۰۰ باشد و تعداد موهای سر دو نفر متغیرهایی مستقل باشند. می‌توان نوشت

$$\mathbf{Pr}\{\text{دست‌کم دو نفر از } N \text{ نفر تعداد موهای سرشان یکسان باشد}\}$$

$$= ۱ - \mathbf{Pr}\{N \text{ نفر تعداد موهای متفاوت داشته باشند}\}$$

$$= ۱ - \frac{۵۰۰۰۰۱ \times ۵۰۰۰۰۰ \times \cdots \times (۵۰۰۰۰۱ - N + ۱)}{(۵۰۰۰۰۱)^N}$$

با استفاده از کامپیوتر درمی‌یابیم که این عدد به‌ازای $N \geqslant ۸۳۳$ بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ و به‌ازای $N < ۸۳۳$ کوچکتر از $\frac{۱}{۲}$ است. پس اگر بخواهیم احتمال یافتن دو نفر با تعداد تارهای موی یکسان دست‌کم $\frac{۱}{۲}$ باشد، ۸۳۳ نفر لازم داریم.

۲۹.۸ میانگین صید دو سال برابر با مجموع میانگینهای صید هر سال نیست، مثلاً اگر ماهیگیر اول در سال اول در یک صید ۴ ماهی و در سال دوم در یک صید ۳ ماهی گرفته باشد، و ماهیگیر دوم در سال اول در ۸ صید ۳۱ ماهی و در سال دوم در ۲ صید ۵ ماهی گرفته باشد، آنگاه

$$\frac{۴}{۱} > \frac{۳۱}{۸}, \qquad \frac{۳}{۱} > \frac{۵}{۲}$$

ولی میانگین صید دو سال برای ماهیگیر اول برابر است با

$$\frac{۴+۳}{۱+۱} = \frac{۷}{۲} = ۳/۵$$

و برای ماهیگیر دوم برابر است با

$$\frac{۳۱+۵}{۸+۲} = \frac{۳۶}{۱۰} = ۳/۶$$

می‌بینید که میانگین صید دو سال ماهیگیر دوم بیشتر است. برای مطالعهٔ این مسأله و مسائل مرتبط با آن [PAUL1]، صفحهٔ ۴۴ را هم ببینید.

۳۳.۸ اگر باران قائم ببارد، آشکارا بهترین راه‌کار این است که اصلاً حرکت نکنیم، چون به این ترتیب سطح کمتری را در معرض باران قرار می‌دهیم. اگر باران با زاویه ببارد، بهترین راه‌کار این است که در جهت باران و با همان سرعت افقی باران حرکت کنیم. ایدهٔ این راه‌کار این است که اگر با باران، یعنی در همان جهت و دقیقاً با همان سرعت، حرکت کنیم اساساً مثل این است که باران قائم می‌بارد و ما ساکن ایستاده‌ایم.

۳۵.۸ فرض کنید هزینهٔ تولید لاستیک متناسب با دوام آن باشد. اگر شرکت لاستیکهایی بسازد که کمتر از ۲۰۰۰۰ مایل کار کنند، پول زیادی را باید صرف جایگزین کردن لاستیکهایی بکند که ضمانت کرده است. همچنین، اگر لاستیکهایی بسازد که بیشتر از ۴۰۰۰۰ مایل کار کنند، قیمتها پایین خواهد بود. عددی که سود را ماکسیمم می‌کند میانگین این حالتهاست. در این مسأله، شرکت باید همهٔ لاستیکها را با دوام ۳۰۰۰۰ مایل بسازد. توجه کنید که دراین صورت، به‌طور میانگین فقط نیمی از افرادی که لاستیکهای ۳۰۰۰۰ مایل ضمانت شده را خریده‌اند لاستیک را برمی‌گردانند.

۳۷.۸ دلیل گرد بودن آنها این است که از پایین افتادن آنها و مجروح شدن کارگرانی که زیر دریچه کار می‌کنند جلوگیری شود. روشن است که اگر دریچه کمی با دایرهٔ کامل فرق داشته باشد باز هم همین کار را می‌کند، ولی گذاشتن دریچه سرجایش وقتی که کار تمام شد دشوار می‌شود (این دریچه‌ها بسیار سنگین‌اند).

۴۳.۸ درصورتی‌که ماشین تایپ ۳۵ کلید و هملت ۵۰۰۰۰۰ نویسه داشته باشد، احتمال اینکه میمون هملت را تایپ کند $\frac{۱}{۳۵}$ به توان ۵۰۰۰۰۰ است. این احتمال را p می‌نامیم. اگر زنجیره‌ای بسیار طولانی از نویسه‌ها به طول K داشته باشیم، هملت ممکن است در ۵۰۰۰۰۰ نویسهٔ اول این زنجیره یا در نویسه‌های ۲ تا ۵۰۰۰۰۱، یا در نویسه‌های ۳ تا ۵۰۰۰۰۲ باشد و غیره. پس هملت ممکن است از اولین، دومین، سومین، ... یا $(K - ۵۰۰۰۰۰ + ۱)$اُمین نویسه شروع شود. پس $K - ۴۹۹۹۹۹$ راه برای یافتن هملت در رشتهٔ نویسه‌ها داریم. نتیجه می‌گیریم که احتمال یافتن هملت در این رشته $p(K - ۴۹۹۹۹۹)$ است. چون می‌خواهیم این احتمال ۰٫۵ باشد، باید

$$K = ۴۹۹۹۹۹ + \frac{۱}{۲ \times p} = ۴۹۹۹۹۹ + \frac{۱}{۲ \times ۳۵^{۵۰۰۰۰۰}} \geqslant ۱۰^{۷۲۷۲۷۲}$$

با فرض اینکه میمون یک میلیارد نویسه در سال تایپ کند (یعنی بیشتر از ۴۰۰۰۰۰ صفحه، چون در هر صفحه حدوداً ۲۴۰۰ نویسه است) بیشتر از $۱۰^{۷۲۷۲۶۳}$ سال طول می‌کشد تا میمون شانسی هملت را تایپ کند. عمر عالم بسیار بسیار کمتر از این عدد تخمین زده شده است. برای مطالعهٔ بحثی جالب در مورد این مسأله و مسأله‌های مرتبط با آن، [PAUL1]، صفحهٔ ۷۵، را ببینید. همچنین به خواننده توصیه می‌کنیم که داستان کوتاه کتابخانهٔ بابل،[1] نوشتهٔ خورخه لوئیس بورخس را که در آن از ایده‌هایی مشابه ایدهٔ این مسأله به شیوهٔ ادبی و شاعرانه بحث شده است بخواند.

1- The Library of Babel

کتابنامه

[MPI] D. Albers and J. Alexanderson, *Mathematical People: Profiles and Interviews*, Birkhauser, Cambridge, 1985.

[BAL] W. W. Rouse Ball and H. S. M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, 13th ed., Dover, New York, 1987.

[BER] E. R. Berlekamp, *et al, Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Academic Press, New York, 1982.

[CRC] S. Krantz, K. Rosen, and D. Zwillinger, eds., *Standard Mathematical Tables*, 30^{th} ed., CRC Press, Boca Raton, 1996.

[BHS] G. Blom, L. Holst, D. Sandell, *Problems and Snapshots from the World of Probability*, Springer Verlag, Berlin, 1994.

[CUN] F. Cunningham, The Kakeya problem for simply connected and star-shaped sets, *Am. Math. Monthly* 78(1971), 114-129.

[DOR] H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*, Dover Publishing, New York, 1965.

[ERD] P. Erdös, On the fundamental problem of mathematics, *Am. Math. Monthly* 79(1972),.149-150.

[GAR] M. Gardner, ed., *Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, Dover, New York, 1959.

[GOF] C. Goffman, And what is your Erdös number?, *Am. Math. Monthly* 76(1969), 791.

[HAL] P. Halmos, *Problems for Mathematicians Young and Old*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1991.

[HUF1] D. Huff, *How to Lie with Statistics*, 34th Edition, W. W. Norton & Co., New York, 1954.

[HUF2] D. Huff, *How to Take a Chance*, W. W. Norton & Co., New York, 1959.

[JEA] J. Jeans, *An Introduction to the Kinetic Theory of Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, 1942.

[KLW] V. Klee and S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Therory*, Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1991.

[KRA1] S. Krantz, *The Elements of Advanced Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[KAR2] S. Krantz, *Real Analysis and Foundations*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[LAK] Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge Unibersity Press, Cambridge, 1976.

[LAR] L. Larsen, *Problem Solving through Problems*, Springer Verlag, Berlin, 1983.

[LIT] J. E. Littlewood, *A Mathematician's Miscellany*, Methuen, London, 1953.

[GUI] P. Matthews, *The Guinness Book of World's Records*, Bantam Books, New-York, 1994.

[MOO] David S. Moore, *Statistics: Concepts and Controversies*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1979.

[MON] O. Morgenstern and J. von Neumann, *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[PAUL1] J. A. Paulos, *Innumeracy*, Hill and Wang, New York, 1988.

[PAUL2] J. A. Paulos, *Beyond Innumeracy*, Vintage, New York, 1992.

[POL1] G. Polya, *How to Solve It*, Princeton University Press, Princeton. 1988.

[POL2] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, in two volumes. Princeton University Press Princeton. 1954.

[POK] G. Polya and J. Kilpatrick, *The Stanford Mathematics Problem Book*, Teachers College Press, New York. 1974.

[REN] P. Renz, Thoughts on *Innumeracy*: Mathematics Versus the World. *Am. Math. Monthly* 1993, 732-742.

[RIN] G. Ringel, *Map Color Theorem*, Springer Verlag, 1974.

[SCHO] A. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, New York 1985.

[SH] J. R. Shoenfeld, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, Reading, 1967.

[SIM1] W. Simon, *Mathematical Magic*, Charles Scribner's Sons, New York, 1964.

[SIM2] W. Simon, *Mathematical Magic*, Dover Books. New York, 1993.

[STR] S. Straszewicz, *Mathematical Problems and Puzzles from the Polish Mathematical Olympiads*, Pergamon Press, Oxford, 1965.

[SUP] P. Suppes, *Axiomatic Set Theory*, Dover Publications, New York, 1972.

[TIE] J. Tierney, Paul Erdös is in town. His brain is open, *Science 84* 5(1984), 40-47.

نمایه